

СКВОРЦОВ Евгений Дмитриевич

**КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ
МИНКОВСКОГО И (АНТИ)-ДЕ СИТТЕРА В РАМКАХ
РАЗВЁРНУТОГО ФОРМАЛИЗМА**

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Отделении теоретической физики им. И.Е. Тамма
Учреждения Российской академии наук Физического института
им. П.Н. Лебедева РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Васильев Михаил Андреевич
Учреждение Российской академии наук
Физический институт им. П.Н. Лебедева
РАН, г. Москва

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
Белавин Александр Абрамович
Учреждение Российской академии наук
Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау РАН, г. Черноголовка
кандидат физико-математических наук,
Зиновьев Юрий Михайлович
Государственный научный центр
Институт физики высоких энергий,
г. Протвино

Ведущая организация: Учреждение Российской академии наук
Институт ядерных исследований РАН,
г. Москва

Защита состоится 24 мая 2010 года в ___:___ч. на заседании диссертационно-
го совета Д 002.023.02 при Физическом Институте им. П.Н. Лебедева РАН
по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического Института
им. П.Н. Лебедева РАН или на сайте <http://td.lpi.ru/>.

С авторефератом диссертации можно ознакомиться на сайте
<http://td.lpi.ru/>.

Автореферат разослан «___» апреля 2010 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д 002.023.02
доктор физико-математических наук

Я.Н. Истомин

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена исследованию калибровочных полей наиболее общего тензорного типа в пространствах Минковского и (анти)-де Ситтера произвольной размерности.

Актуальность темы. Построение теории квантовой гравитации и фундаментальной теории всех взаимодействий представляются одними из наиболее важных проблем в физике высоких энергий. Основным кандидатом, способным решить обе задачи, является теория суперструн, формулировка которой включает: дополнительные пространственные измерения, суперсимметрию, а также башню массивных тензорных возбуждений всех рангов — в настоящее время не очевидно, насколько всё это необходимо для квантования гравитации. Кроме того и в самой теории струн имеются открытые вопросы, например, выявление её скрытых симметрий.

В рамках теории поля актуален вопрос о поиске нетривиальных взаимодействующих теорий, спектр которых аналогичен теории струн, что важно как для развития полевого взгляда на теорию струн, так и для более глубокого понимания самой теории поля.

Фундаментальное значение в теории поля имеет калибровочная симметрия, которая играет определяющую роль при построении нелинейных теорий, фиксируя типы возможных взаимодействий.

На данный момент известно не так много калибровочных теорий поля со взаимодействиями. К основным следует отнести: теорию Янга-Миллса, на основе которой построена Стандартная модель электрослабых взаимодействий и хромодинамика, теорию гравитации Эйнштейна, теории супергравитации. Также сюда следует включить теорию Васильева¹, спектр которой содержит калибровочные поля всех спинов от нуля до бесконечно-

теория	спектр полей: кратность \times спин (s), масса = 0
Янг-Миллс	$N \times (s = 1)$, N -размерность группы Ли
гравитация	$1 \times (s = 2)$
\mathcal{N} -супергравитация	$1 \times (s = 2) + \mathcal{N} \times (s = \frac{3}{2}) + \dots$, $\mathcal{N} = 1, 2, \dots, 8$
теория Васильева	$\sum_{s=0}^{\infty} N \times (s)$, N -размерность группы Ли

¹М. А. Vasiliev, *Phys. Lett.* **B243** (1990) 378–382.

сти, что делает её похожей на теорию струн. Последняя теория в фазе с ненарушенными калибровочными симметриями требует ненулевой космологической постоянной, а также содержит бесконечное число вершин взаимодействий, аналогично теории гравитации. Исследование полей произвольного спина составляет предмет теории полей *высших спинов*.

В настоящее время наибольший интерес представляют теории поля в пространствах Минковского, де Ситтера (дС) и анти-де Ситтера (АдС) — максимально симметричных решениях уравнений Эйнштейна с космологической постоянной: нулевой, положительной и отрицательной соответственно. Активное развитие теорий супергравитации и суперструн делает актуальными исследования теорий поля в пространстве размерности большей четырёх, $d > 4$.

При $d > 4$ понятие спина значительно усложняется. Спин частицы в d -мерном пространстве задаётся не одним (полу)целым числом, а последовательностью таких чисел, определяющих тензор физических поляризованных частицы. Соответствующие поля называются полями *смешанного(произвольного) типа симметрии*, так как описываются тензорами, не являющимися только симметричными или антисимметричными. С общей точки зрения поля спина s , исчерпывающие классификацию при $d = 4$, отвечают частному случаю полностью симметричных тензорных полей.

Изучение полей *произвольного типа симметрии* актуально поскольку

- Спектр теории струн содержит массивные поля *произвольного типа симметрии*. Масштаб массы задаётся струнным натяжением α'^{-1} . Поэтому, в пределе нулевого натяжения следует ожидать² перехода теории струн в некоторую теорию взаимодействующих безмассовых, т.е. калибровочных, полей *произвольного типа симметрии*.

- Обратная гипотеза состоит в том, что сама теория струн может получаться путём некоторого нарушения симметрий в теории калибровочных полей *произвольного типа симметрии*.

- В рамках гипотезы АдС/КТП-соответствия³ теория Васильева должна быть дуальна⁴ $O(N)$ -сигма модели. Для изучения в рамках дуальности

²D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. **60**, 1229 (1988).

³J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998).

⁴I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **550**, 213 (2002).

«гравитация/калибровочная теория»⁵ физически более интересных моделей, где с полевой стороны дуальности присутствует, например, КХД, необходимо развивать теорию полей *смешанного типа симметрии*, которые появляются уже в пятимерном пространстве анти-де Ситтера, АдС₅.

• В теориях *высших спинов* снимается ограничение $\mathcal{N} \leq 8$ на количество суперсимметрий в супергравитации, что даёт ещё большую надежду на построение конечной квантовой теории гравитации в рамках теории поля.

Что касается массивных полей, то они могут в определённом смысле считаться производными от безмассовых, получаясь из последних за счёт некоторого механизма Хиггса нарушения симметрий. Также массивные поля допускают формулировку в терминах наборов безмассовых полей⁶, что позволяет формулировать их как калибровочные теории.

В пространстве (анти)-де Ситтера благодаря наличию космологической постоянной ($\Lambda \neq 0$), действующей эффективно как некоторый потенциал, даже безмассовые поля имеют ненулевые массовые слагаемые в волновом уравнении. Ввиду этого безмассовые поля удобно определять как калибровочные поля. Такой принцип, конечно, применим и в пространстве Минковского ($\Lambda = 0$).

Калибровочные поля *смешанного типа симметрии* проявляют ряд необычных свойств при $\Lambda \neq 0$ по сравнению со случаем $\Lambda = 0$. Так, теория уже не определяется однозначно спином поля⁷, и существуют несколько неэквивалентных теорий с данным спином. Также при $\Lambda \neq 0$ появляются частично-безмассовые поля⁸, число степеней свободы которых оказывается промежуточным между массивными и безмассовыми полями.

Из ранее полученных фундаментальных результатов в теории калибровочных полей *смешанного типа симметрии* следует выделить формулировку Лабастиды⁹ для свободных полей в пространстве Минковского.

Методы и подходы. Основным методом, используемым в диссертации, является развёрнутый подход¹⁰, оказавшийся наиболее эффективным в задаче о поиске теории со взаимодействиями, включающей в себя калибро-

⁵S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998).

⁶Yu. M. Zinoviev, On massive high spin particles in AdS, hep-th/0108192.

⁷R. R. Metsaev, *Phys. Lett.* **B354** (1995) 78–84.

⁸S. Deser and R. I. Nepomechie, *Ann. Phys.* **154** (1984) 396.

⁹J. M. F. Labastida, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 185.

¹⁰M. A. Vasiliev, *Phys. Lett.* **B209** (1988) 491–497.

вочные поля *высших спинов*. Данный подход, в частности, обобщает тетрадную формулировку гравитации на случай полей спина s . Развёрнутый подход есть специальная форма записи уравнений движения, которая гарантирует их общекоординатную и калибровочную инвариантность, а также оказывается тесно связан с теорией представлений группы симметрий пространства-времени. Развёрнутую формулировку допускают любые теории, например, теории Янга-Миллса и гравитации¹¹.

Целью работы является построение развёрнутой формулировки для калибровочных полей *смешанного типа симметрии* в пространствах Минковского и (анти)-де Ситтера произвольной размерности, а также построение действия для таких полей.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются оригинальными и получены впервые.

Научная и практическая ценность диссертационной работы состоит в возможности непосредственного применения полученных в ней результатов к теории полей *высших спинов*, теориям поля в пространстве произвольной размерности, для исследовании полевых моделей, связанных с теорией струн и супергравитацией.

В представленных работах сделаны важные шаги в развитии теории свободных калибровочных полей *произвольного типа симметрии*, на основе которых предполагается исследовать вопрос об их взаимодействиях.

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 5 статей в журналах из списка рекомендованных ВАК РФ, [1-5].

Апробация работы. Результаты настоящего исследования были представлены на следующих научных конференциях и семинарах: 7-ой международный семинар «Суперсимметрии и квантовые симметрии», ОИЯИ, г. Дубна, 30 июля — 4 августа, 2007; 15-ый международный семинар по физике высоких энергий, Кварки-2008, г. Сергиев Посад, 23–29 мая, 2008; приглашённый доклад на семинаре в Scuola Normale Superiore, г. Пиза, Италия, 18 ноября, 2008; 2-ая международная конференция по полевой теории струн и связанным проблемам, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, 12–19 апреля, 2009; 4-ая международная Сахаровская конференция по физике, 18–23 мая, 2009, Физический Ин-

¹¹М. А. Vasiliev, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **3**, 37 (2006).

ститут им. П.Н. Лебедева РАН, г. Москва; 8-ой международный семинар «Суперсимметрии и квантовые симметрии», ОИЯИ, г. Дубна, 29 июля — 3 августа, 2009; семинар отделения теоретической физики Физического института им. П.Н. Лебедева РАН; семинар Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

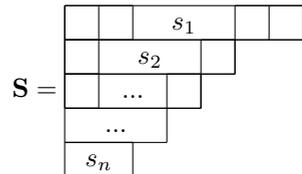
Структура диссертации и объём работы. Диссертация содержит 200 страниц и состоит из введения, двух глав с описанием предметной области и используемых методов, четырёх глав с описанием результатов, выводов, библиографии, включающей 210 источников, и четырёх приложений.

Краткое содержание работы

Во **введении** описана история вопроса и основные ранее полученные результаты в теории полей *смешанной симметрии*, проводятся параллели с другими теориями поля и теорией струн. Рассматриваются качественные особенности калибровочных полей в пространствах с ненулевой космологической постоянной Λ по сравнению с пространством Минковского. Сформулированы задачи диссертации.

В **первой главе** даётся полное описание всех возможных типов калибровочных полей в пространствах Минковского ($\Lambda = 0$) и (анти)-де Ситтера ($\Lambda \neq 0$) произвольной размерности. Новый результат состоит в получении полной классификации полей в пространстве (анти)-де Ситтера.

Спин частицы, т.е. тензор физических поляризацй, во всех рассматриваемых случаях преобразуется как представление ортогональной группы $SO(N)$. Само N зависит от размерности пространства d , а также от того равна или нет нулю космологическая постоянная Λ . Неприводимое представление $SO(N)$ задаётся набором n , $n = [N/2]$, (полу)целых неотрицательных чисел $(s_1 + (\frac{1}{2}), \dots, s_n + (\frac{1}{2}))$, $s_i \geq 0$, $s_i \geq s_{i+1}$, который удобно изображать диаграммой Юнга $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$, представляющей собой таблицу из n строк, в i -ой строке которой находится s_i клеток. Каждой диаграмме Юнга отвечает определённый тип симметрии тензора, ранг которого равен числу клеток в ней.



Полевое описание на массовой оболочке удобно строить в терминах потенциалов. Потенциал $\phi^{\mathbf{S}}(x)$ поля спина \mathbf{S} есть тензор группы Лоренца $SO(d-1, 1)$ с типом симметрии, определяемым той же диаграммой \mathbf{S} , что и спин. На потенциал $\phi^{\mathbf{S}}$ наложены все лоренц-ковариантные условия¹²

$$(\square + m^2)\phi^{\mathbf{S}} \equiv (\square + m^2)\phi^{a(s_1), \dots, u(s_n)} = 0, \quad (1)$$

$$D_m \phi^{a(s_1), \dots, mc(s_i-1), \dots, u(s_n)} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\text{свёртка любых двух индексов (след)} \phi^{\mathbf{S}} = 0, \quad (3)$$

где $\square \equiv D_m D^m$ и D_m — ковариантная производная в пространстве (анти)-де Ситтера или Минковского.

Результат состоит в том, что при $\Lambda \neq 0$ тип калибровочного поля однозначно определяется спином \mathbf{S} , а также двумя дискретными параметрами q, t . Причём калибровочная симметрия у уравнений (1)-(3) возникает при

$$m^2(\mathbf{S}, q, t) = \Lambda(E_0(E_0 - d + 1) - \sum_i s_i), \quad E_0(q, t) = d + s_q - t - q - 1. \quad (4)$$

Закон калибровочных преобразований содержит t производных, а тип симметрии калибровочного параметра $\xi^{\mathbf{G}(q,t)}$ задаётся диаграммой \mathbf{G} , полученной удалением t клеток от q -ой строки \mathbf{S} , при условии, что \mathbf{G} тоже диаграмма. Поля с $t = 1$ и $t > 1$ принято называть безмассовыми и

$$\mathbf{G}(\mathbf{S}, q, t) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & s_1 & & \\ \hline & & & \dots & & \\ \hline & & & s_{q-1} & & \\ \hline & & & s_q - t & & \\ \hline & & & s_{q+1} & & \\ \hline & & & \dots & & \\ \hline & & & s_n & & \\ \hline \end{array}$$

частично-безмассовыми соответственно. Данный результат обобщает ранее известные случаи ($\mathbf{S}, q, t = 1$) безмассового поля произвольного спина \mathbf{S} и частично-безмассового поля спина s , ($\mathbb{Y}(s), q = 1, t = 2 \dots s$). В пространстве анти-де Ситтера унитарно только поле с минимальным q и $t = 1$.

Как хорошо известно, в пространстве Минковского ($\Lambda = 0$) калибровочная симметрия у уравнений (1)-(3) возникает только при $m^2(\mathbf{S}, q, t) = 0$, что следует, в частности, из (4). Теории с $t > 1$ приводимы и не рассматриваются. Поэтому калибровочная теория однозначно определяется спином \mathbf{S} , а в закон калибровочных преобразований входят все параметры $\xi^{\mathbf{G}(q,1)}$.

¹²Группа k симметричных индексов $a_1 \dots a_k$ обозначается $a(k)$. По группам индексов, отделённых запятой, подразумевается выполнение юнговских условий.

	Минковский	(анти)-де Ситтер
спин калибровочного поля	$\mathfrak{so}(d-2)$	$\mathfrak{so}(d-1)$
масса калибровочного поля	0	$m^2(\mathbf{S}, q, t)$
параметры, определяющие калибровочную теорию	спин \mathbf{S}	спин \mathbf{S}, q, t
закон калибровочных преобразований	$\delta\phi^{\mathbf{S}} = \sum_i \partial\xi^{\mathbf{G}(i,1)}$	$\delta\phi^{\mathbf{S}} = \overbrace{D\dots D}^t \xi^{\mathbf{G}(q,t)}$

Проблема полевого описания состоит в том, чтобы построить формулировку, в которой ни поля, ни калибровочные параметры не подчинены дифференциальным условиям. В частности, это нужно для построения лагранжиана. Бесследовость $\phi^{\mathbf{S}}$ влечёт условия вида (2) для калибровочных параметров. Поэтому потенциал $\phi^{\mathbf{S}}$ должен быть заменён некоторым *расширением* $\bar{\phi}^{\mathbf{S}}$ — тензорным полем того же типа симметрии, но подчинённым более слабым следовым условиям. Для полей произвольного спина \mathbf{S} в пространстве Минковского такие условия были найдены Лабастидой⁹, а для полей (\mathbf{S}, q, t) — в настоящей диссертации.

Вторая глава не содержит новых результатов и посвящена описанию формализма разворачивания, являющегося основным методом, используемым в диссертации. Говорится, что некоторый набор дифференциальных уравнений имеет развёрнутый вид, если он может быть записан как равенство нулю напряжённостей вида

$$R^{\mathcal{A}} \equiv dW^{\mathcal{A}} + F^{\mathcal{A}}(W) = 0, \quad (5)$$

где $W^{\mathcal{A}}$ — набор дифференциальных форм на некотором d -мерном многообразии \mathcal{M}_d со значениями в некоторых векторных пространствах, которые обозначаются индексами \mathcal{A} ; $|\mathcal{A}|$ есть степень $W^{\mathcal{A}}$ как дифференциальной формы; d — внешний дифференциал на \mathcal{M}_d ; $F^{\mathcal{A}}(W)$ — функция степени $(|\mathcal{A}| + 1)$ от $W^{\mathcal{A}}$, которая предполагается разложимой только в терминах внешних произведений форм с постоянными коэффициентами перед ними.

Формальная совместность (5) с $d^2 \equiv 0$, требует выполнения условия

$$F^{\mathcal{B}} \frac{\delta F^{\mathcal{A}}}{\delta W^{\mathcal{B}}} \equiv 0, \quad \iff \quad dR^{\mathcal{A}} - R^{\mathcal{B}} \frac{\delta F^{\mathcal{A}}}{\delta W^{\mathcal{B}}} \equiv 0 \quad (6)$$

которое называется обобщённым тождеством Якоби (слева) или тождеством Бьянки (справа). Любое решение (6) определяет некоторую свободную дифференциальную алгебру¹³.

Если решения (6) удовлетворяют условиям универсальности¹⁴, то уравнения (5) инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$\delta_\epsilon W^{\mathcal{A}} = d\epsilon^{\mathcal{A}} - \epsilon^{\mathcal{B}} \frac{\delta F^{\mathcal{A}}}{\delta W^{\mathcal{B}}}, \quad \text{если } |\mathcal{A}| > 0, \quad (7)$$

$$\delta_\epsilon W^{\mathcal{A}} = -\epsilon^{\mathcal{B}'}, \quad \mathcal{B}' : |\mathcal{B}'| = 1, \quad \text{если } |\mathcal{A}| = 0, \quad (8)$$

где калибровочный параметр $\epsilon^{\mathcal{A}}$ поля $W^{\mathcal{A}}$ является формой степени ($|\mathcal{A}| - 1$) и принимает значение в том же пространстве \mathcal{A} , что и $W^{\mathcal{A}}$. Формы $W^{\mathcal{A}}$ степени большей нуля, $|\mathcal{A}| > 0$, представляют собой калибровочные поля, поскольку с каждой из них ассоциирован калибровочный параметр $\epsilon^{\mathcal{A}}$.

Пусть \mathfrak{g} есть алгебра Ли группы симметрий пространства Минковского, де Ситтера или анти-де Ситтера, т.е. $\mathfrak{iso}(\mathfrak{d} - 1, 1)$, $\mathfrak{so}(\mathfrak{d}, 1)$ или $\mathfrak{so}(\mathfrak{d} - 1, 2)$. Алгебра Лоренца $\mathfrak{so}(\mathfrak{d} - 1, 1)$ есть подалгебра в \mathfrak{g} . При надлежащем выборе ограниченной снизу градуировки g на пространстве полей материи W , линейные по W развёрнутые уравнения имеют следующую структуру¹⁵

$$R = d\Omega + [\Omega, \Omega] = 0, \quad (9)$$

$$R^g = DW_{q_g}^g + \sigma_-(\Omega|W_{q_g+1}^{g+1}) + \dots = 0, \quad g = 0, 1, \dots \quad (10)$$

• Ω есть один-форма связности \mathfrak{g} . Уравнение (9) есть равенство нулю напряжённости Янга-Миллса для Ω и описывает геометрию пространства как часть развёрнутой системы. Связность Ω состоит из тетрады $h^a \equiv h_\mu^a dx^\mu$ и лоренцевой спин-связности $\varpi^{a,b} \equiv \varpi_\mu^{a,b} dx^\mu$. Условие (9) принимает вид

$$T^a = dh^a + \varpi^a{}_b h^b = 0, \quad R^{a,b} = d\varpi^{a,b} + \varpi^a{}_c \varpi^{c,b} + \Lambda h^a h^b = 0, \quad (11)$$

т.е. требует, чтобы кручение было равно нулю, а тензор Римана пропорционален метрике. В случае $\Lambda \neq 0$ связность Ω алгебры (анти)-де Ситтера может быть записана в компонентах как $\Omega^{A,B} \equiv \Omega_\mu^{A,B} dx^\mu$, $\Omega^{A,B} = -\Omega^{B,A}$,

¹³D. Sullivan, *Publ. Math. IHES* **47** (1977) 269–331.

¹⁴X. Bekaert, S.nockaert, C. Iazeolla and M. A. Vasiliev, *hep-th/0503128*.

¹⁵Нижний индекс обозначает ранг формы, $\omega_q \equiv \omega_{\mu_1 \dots \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}$.

т.е. антисимметрична по касательным индексам A, B , пробегающим значения $0, \dots, d$, опускаемым и поднимаемым с помощью инвариантной метрики η_{AB} . Тогда условие нулевой кривизны (9) Ω примет вид

$$R^{A,B} = d\Omega^{A,B} + \Omega^A{}_C \wedge \Omega^{C,B} = 0. \quad (12)$$

Из связности $\Omega^{A,B}$ можно выделить фоновые тетраду и спин-связность

$$\Omega^a{}_d = \sqrt{|\Lambda|} h^a, \quad \Omega^{a,b} = \varpi^{a,b}, \quad (13)$$

где d есть лишнее значение векторного индекса алгебры (анти)-де Ситтера по сравнению с алгеброй Лоренца.

- D в (10) есть лоренц-ковариантная производная $D = d + \varpi$ и имеет градуировку ноль.
- $\sigma_-(\Omega|W_{q+1}^{g+1})$, далее просто $\sigma_-(W^{g+1})$, есть линейный алгебраический оператор градуировки (-1) на пространстве полей W^g , который, однако, может быть полиномиальным по Ω .
- Многоточие в (10) обозначает возможные алгебраические операторы неотрицательной градуировки.

Совместность (9)-(10) требует $(\sigma_-)^2 = 0$, что позволяет поставить задачу о σ_- -когомологиях, теоретико-полевая интерпретация которых состоит в следующем: представители H^{q_0} отвечают физическим полям, например, *расширениям* потенциалов; H^{q_0-i} , $i = 1, \dots, q_0$ — это калибровочные параметры на i -ом уровне приводимости; H^{q_0+1} — калибровочно-инвариантные уравнения; H^{q_0+i+1} дают тождества Бьянки i -го уровня.

Вычисление σ_- -когомологий формализует задачу о физическом содержании развёрнутой системы уравнений, поскольку большинство уравнений (10) оказываются связями, выражающими одни поля через производные других, а большая сдвиговая (штюкельбергова) калибровочная симметрия, присутствующая в (10), позволяет откалибровать некоторые поля. Такое расширение состава полей, необходимых для построения развёрнутой формулировки, обеспечивает координатную независимость, явную калибровочную-инвариантность и тесную связь с теорией представлений группы симметрий пространства-времени. Вычисление σ_- -когомологий эквивалентно интерпретации теории в терминах потенциалов.

Третья глава основана на работе [1], в которой строится развёрнутая формулировка для калибровочных полей *произвольного типа симметрии*

(спина) \mathbf{S} в пространстве Минковского, что существенно расширяет ранее известный результат¹⁶ о развёрнутой формулировке для полей спина s .

Результат состоит в том, что для поля спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}[h_1, \dots, h_{s_1}] \equiv \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$, где диаграмму Юнга удобно задавать, перечисляя длины столбцов h_i , развёрнутые уравнения имеют вид

$$D\omega_{q_g}^{\mathbf{F}_g} + \sigma_-(\omega_{q_{g+1}}^{\mathbf{F}_{g+1}}) = 0,$$

где поле $\omega_{q_g}^{\mathbf{F}_g}$ есть дифференциальная форма степени q_g , несущая тензорные индексы группы Лоренца, по которым она является неприводимым тензором с типом симметрии диаграммы \mathbf{F}_g . Степени форм q_g и диаграммы \mathbf{F}_g однозначно определяются спином \mathbf{S}

$$q_k = h_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbb{Y}[h_1 + 1, \dots, h_k + 1, h_{k+2}, \dots],$$

где следует положить $h_k = 0$ при $k > s_1$. Действие $\sigma_-(\omega_{q_{g+1}}^{\mathbf{F}_{g+1}})$ оператора σ_- определяется как свёртка необходимого числа тетрад h^a с полем и затем применение проектора Юнга для получения типа симметрии \mathbf{F}_g .

Развёрнутые уравнения для фермионного поля спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1 + \frac{1}{2}, \dots, s_n + \frac{1}{2})$ имеют тот же вид, что и развёрнутые уравнения для бозонного поля спина $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$. Единственное различие состоит в замене неприводимых тензоров на неприводимые спин-тензоры, характеризуемые теми же диаграммами Юнга \mathbf{F}_g .

Поля $\omega_{q_g}^{\mathbf{F}_g}$ представляют собой обобщения поля тетрады и спин-связности и в случае $\mathbf{S} = \square$, т.е. поля спина два, прямо совпадают с ними. Первое поле $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$ развёрнутой системы есть обобщённая тетрада, которая имеет следующий явный вид

$$e_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\alpha(s_1-1), \dots, u(s_n-1)} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (14)$$

С помощью обратной тетрады $h^{\mu a}$, можно явно вложить потенциал Лабастиды⁹ $\bar{\phi}^{\mathbf{S}} \equiv \bar{\phi}^{\alpha(s_1), \dots, u(s_n)}$ в обобщённую тетраду¹⁷

$$\bar{\phi}^{\alpha(s_1), \dots, u(s_n)} = e_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\alpha(s_1-1), \dots, u(s_n-1)} h^{a\mu_1} \dots h^{u\mu_n}, \quad (15)$$

¹⁶М. А. Vasiliev, Nucl. Phys. B **307**, 319 (1988).

¹⁷По повторяющемуся сверху индексу подразумевается симметризация.

что обобщает связь флуктуаций метрики и тетрады в случае спина два. Заметим, что довольно необычные следовые условия Лабастиды на *расширение* $\bar{\phi}^{\mathbf{S}}$ потенциала $\phi^{\mathbf{S}}$

$$\eta_{mm}\eta_{nn}\bar{\phi}^{a(s_1),\dots,mmnbn(s_i-4),\dots,u(s_n)} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

на самом деле являются простым следствием неприводимости тетрады $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$ по касательным индексам и отсутствия каких бы то ни было условий между касательными индексами и индексами формы. В этой главе также показано как уравнения Лабастиды⁹ вытекают из развёрнутой формулировки.

Отметим, что чисто техническая сложность подхода Лабастиды, связанная с тем, что *расширения* $\bar{\xi}^{\mathbf{G}(i,1)}$ калибровочных параметров $\xi^{\mathbf{G}(i,1)}$ оказывались зависимыми друг от друга посредством следовых условий, автоматически разрешается в развёрнутом подходе, где все $\bar{\xi}^{\mathbf{G}(i,1)}$ являются различными компонентами одного параметра $\xi_{q_0-1}^{\mathbf{F}_0}$.

Четвёртая глава основана на работе [2], в которой было построено действие первого порядка для калибровочных полей произвольного спина в пространстве Минковского. Основой для данной работы было хорошо известное действие Эйнштейна-Гильберта-Вейля в переменных тетрада-связность, и его обобщение¹⁸ на случай полей спина s , а также работы Ю.М.Зиновьева¹⁹, в которых были разобраны важные частные примеры.

Результат состоит в том, что действие для поля *произвольного типа симметрии* (спина) \mathbf{S} имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_d} \left\langle R_{q_0+1}^{\mathbf{F}_0} \middle| \omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1} \right\rangle + \beta \left\langle e_{q_0}^{\mathbf{F}_0} \middle| R_{q_1+1}^{\mathbf{F}_1} \right\rangle, \quad (17)$$

где параметр β однозначно фиксируется $\beta = (-)^{q_0+1}$ требованием калибровочной инвариантности. $R_{q_0+1}^{\mathbf{F}_0}$ и $R_{q_1+1}^{\mathbf{F}_1}$ есть напряжённости для первых двух полей развёрнутой системы, т.е. для обобщенных тетрады $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$ и спин-связности $\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}$,

$$R_{q_0+1}^{\mathbf{F}_0} = D e_{q_0}^{\mathbf{F}_0} + \sigma_-(\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}), \quad R_{q_1+1}^{\mathbf{F}_1} = D \omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1} + \sigma_-(\omega_{q_2}^{\mathbf{F}_2}). \quad (18)$$

Напряжённости инвариантны относительно калибровочных преобразований (7,10) и удовлетворяют тождествам Бьянки (6).

¹⁸M. A. Vasiliev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **32** (1980) 439.

¹⁹Y. M. Zinoviev, arXiv:hep-th/0304067, hep-th/0306292, hep-th/0211233.

Угловые скобки в (17) обозначают скалярное произведение, которое для формы $\Phi_{p+1}^{\mathbf{F}_0}$ степени $(p+1)$ и формы $\Psi_q^{\mathbf{F}_1}$ степени q таких, что $q_0+q_1 = p+q$, определяется как

$$\left\langle \Phi_{p+1}^{\mathbf{F}_0} \left| \Psi_q^{\mathbf{F}_1} \right. \right\rangle = \Phi_{p+1}^{ua(s_1-2), \dots, uc(s_n-2)} \Psi_q^u{}_{a(s_1-2) \dots c(s_n-2)} E_{u[q_0+q_1+1]}$$

и является d -формой, которая может интегрироваться по пространству в (17). $E_{u[k]}$ есть $(d-k)$ -форма с k антисимметричными касательными индексами, построенная из фоновой тетрады,

$$E_{u[k]} \equiv \epsilon_{u[k]b_1 \dots b_{d-k}} h^{b_1} \dots h^{b_{d-k}}. \quad (19)$$

По отношению к введённому таким образом скалярному произведению σ_- обладает важными свойствами

$$\begin{aligned} \left\langle \sigma_-(\Theta_q^{\mathbf{F}_1}) \left| \Psi_{2q_1-q}^{\mathbf{F}_1} \right. \right\rangle &= (-)^{q^2-q_1} \left\langle \sigma_-(\Psi_{2q_1-q}^{\mathbf{F}_1}) \left| \Theta_q^{\mathbf{F}_1} \right. \right\rangle, \\ \left\langle \Phi_p^{\mathbf{F}_0} \left| \sigma_-(\Upsilon_{q_0+q_2-p}^{\mathbf{F}_2}) \right. \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Эти свойства используются при проверке калибровочной инвариантности действия и при получении вариационных уравнений движения.

Действие (17) также можно переписать, подставив явные выражения для напряжённостей,

$$S = \int_{\mathcal{M}_d} \left\langle D e_{q_0}^{\mathbf{F}_0} + \frac{1}{2} \sigma_-(\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}) \left| \omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1} \right. \right\rangle. \quad (20)$$

Форма (20) более компактна, а форма (17) более симметрична и удобна для вывода полевых уравнений.

Число слагаемых в действии Лабастиды⁹, записанном в терминах потенциала, растёт экспоненциально с количеством ненулевых строк в диаграмме $\mathbf{S} = \mathbb{Y}(s_1, \dots, s_n)$. Это происходит из-за того, что потенциал (15) не является неприводимым тензором, а удовлетворяет более слабым, чем полная бесследовость условиям (16). Количество неэквивалентных следов, градиентов и дивергенций быстро растёт для тензоров общего типа симметрии, а действие Лабастиды содержит все возможные слагаемые с некоторыми коэффициентами, фиксирующимися требованием калибровочной инвариантности. Напротив, поля $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$, $\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}$ являются неприводимыми тензорами группы Лоренца по касательным индексам. В результате в терминах

D , $e_{q_0}^{\mathbf{F}_0}$, $\omega_{q_1}^{\mathbf{F}_1}$ и внешнего произведения действие содержит только два слагаемых, что демонстрирует эффективность развёрнутого подхода.

Пятая глава и работа [3] посвящены одному из простейших типов калибровочных полей в пространстве (анти)-де Ситтера, а именно полностью симметричным частично-безмассовых полям, т.е. полям семейства $(\mathbb{Y}(s), 1, t)$, для которых предьявлено простое описание и построено явно калибровочно-инвариантное действие.

Работа обобщает известное действие²⁰ для гравитации, которое построено в аналогичной действию Янга-Миллса форме из напряжённости $R^{A,B}$ (12) для $\Omega^{A,B}$, а также действие²¹ для безмассовых полей спина s , т.е. полей типа $(\mathbb{Y}(s), 1, 1)$.

Результат состоит в том, что поле $(\mathbb{Y}(s), 1, t)$ -типа можно описать одной формой $W_\mu^{A(s-1), B(s-t)} dx^\mu$, которая есть неприводимый тензор алгебры (анти)-де Ситтера, определяемый диаграммой $\begin{array}{|c|c|} \hline & s-1 \\ \hline & s-t \\ \hline \end{array}$. С использованием ковариантной производной $D_\Omega = d + \Omega$, удовлетворяющей (12), закон калибровочных преобразований, калибровочно-инвариантная напряжённость и тождества Бьянки для неё имеют простой вид

$$\begin{aligned} \delta W_1^{A(s-1), B(s-t)} &= D_\Omega \xi_0^{A(s-1), B(s-t)}, \\ R_2^{A(s-1), B(s-t)} &= D_\Omega W_1^{A(s-1), B(s-t)}, \quad D_\Omega R_2^{A(s-1), B(s-t)} = 0. \end{aligned}$$

Напряжённость явно калибровочно-инвариантна поскольку из (12) следует $D_\Omega^2 = 0$. Наиболее общее явно калибровочно-инвариантное P-чётное действие строится в терминах билинейной комбинации напряжённостей, свёрнутых всевозможными способами, и имеет вид

$$\begin{aligned} S^{s,t} &= \frac{1}{4\kappa^2 \Lambda} \sum_{k=0, m=0}^{k=s-2, m=s-t-1} \tilde{b}_{k,m}^{s,t} \int_{\mathcal{M}_d} \epsilon_{A_1 A_2 \dots A_{d+1}} V^{A_5} E^{A_6} \dots E^{A_{d+1}} V_{C(2k+2m)} \times \\ &\times R_2^{A_1 B(s-k-2) C(k), A_2 D(s-t-m-1) C(m)} R_2^{A_3}_{B(s-k-2)} \quad \quad \quad C(k), A_4 \quad \quad \quad C(m), \end{aligned}$$

где было введено векторное поле компенсатор $V^A(x)$, нормированное так, что $V^B V_B = -\text{sign}(\Lambda)$, а $E^A = D_\Omega V^A$. Поле $V^A(x)$ позволяет²² сделать

²⁰K. S. Stelle and P. C. West, *Phys. Rev. D* **21**, 1466 (1980).

²¹M. A. Vasiliev, *Nucl. Phys.* **B616** (2001) 106–162.

²²K. S. Stelle and P. C. West, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 1466.

симметрию алгебры (анти)-де Ситтера явной. Без ограничения общности можно выбрать калибровку $V^A = \delta_d^A$, $A = a, d$.

Требованием, чтобы в действие входили производные не выше второго порядка и оно имело правильный предел $\Lambda \rightarrow 0$, коэффициенты $b_{k,m}^{s,t}$ фиксируются с точностью до общего фактора $b^{s,t}$

$$b_{k,m}^{s,t} = b^{s,t} \frac{(s-k-m-1)!(d-5+2(k+m))!}{k!m!(s-k-2)!(s-m)!}.$$

Различные проекции $W_1^{A(s-1),B(s-t)}$ на поле компенсатора $V^A(x)$, обобщающие (13), определяются правилом ограничения представления алгебры (анти)-де Ситтера на алгебру Лоренца.

Вычисление σ_- -когомологий позволяет связать данную калибровочную теорию с описанием в терминах полей-потенциалов. Единственный дифференциальный калибровочный параметр в $\xi_0^{A(s-1),B(s-t)}$ даёт проекцией максимально параллельной полю компенсатора $\xi_0^{b(s-t)} = \xi_0^{A(s-1),b(s-t)} V_{A_1} \dots V_{A_{s-1}}$. Потенциал $\phi^{a(s)}$ определяется как бесследовая часть $\phi^{a(s)} = W_\mu^{a(s-1),C(s-t)} h^{\mu a} V_{C_1} \dots V_{C_{s-t}}$.

Поле $\phi^{a(s)}$ имеет закон калибровочных преобразований частично-безмассовых полей

$$\delta \phi^{a(s)} = \overbrace{D^a \dots D^a}^t \xi^{a(s-t)} + \dots,$$

где многоточие обозначает слагаемые с меньшим числом производных, а также слагаемые, обеспечивающие бесследовость выражения.

В **шестой главе**, следуя [4] и [5], изучаются калибровочные поля *произвольного типа симметрии* в пространстве (анти)-де Ситтера, т.е. поля типа (\mathbf{S}, q, t) , см. главу 1, с произвольными допустимыми значениями спина \mathbf{S} и параметров q, t , определяющих тип калибровочной симметрии.

Пусть \mathfrak{g} есть алгебра Ли группы симметрий пространства (анти)-де Ситтера, т.е. $\mathfrak{so}(d, 1)$ или $\mathfrak{so}(d-1, 2)$. Основной результат состоит в следующем. Калибровочное поле, отвечающее неприводимому представлению (\mathbf{S}, q, t) , см. главу 1, может быть описано с помощью одного обобщённого поля Янга-Миллса W_q^A алгебры \mathfrak{g} . В общем случае обобщённое поле Янга-Миллса W_q^A алгебры \mathfrak{g} определяется как дифференциальная форма произвольной степени $q > 0$, имеющая тензорные индексы A, B, \dots алгебры \mathfrak{g} и являющаяся по ним неприводимым тензором с типом симметрии,

задаваемым диаграммой \mathbf{A} . Для обычного поля Янга-Миллса алгебры \mathfrak{g} имеем $q = 1$ и $\mathbf{A} = \square$, т.е. $W_1^{A,B} \equiv -W_1^{B,A}$.

Связь между типом (\mathbf{S}, q, t) калибровочного поля и обобщённым полем Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}}$ имеет следующий вид

$$(\mathbf{S}, q, t) \iff (\mathbf{A}, q)$$

$\mathbf{S} =$

			s_1			
			...			
			s_{q-1}			
			s_q			
			s_{q+1}			
			...			
			s_n			

$\mathfrak{so}(d-1), \mathfrak{so}(d-1, 1)$

\iff

$\mathbf{A} =$

			$s_1 - 1$			
			...			
			$s_q - 1$			
			$s_q - t$			
			s_{q+1}			
			...			
			s_n			

\mathfrak{g}

(21)

Показано, что калибровочная теория, имеющая на массовой оболочке в терминах потенциалов закон калибровочных преобразований вида

$$\delta\phi^{a(s_1), \dots, v(s_n)} = \overbrace{D^c \dots D^c}^t \xi^{a(s_1), \dots, c(s_q-t), \dots, v(s_n)} + \dots, \quad (22)$$

вне массовой оболочки может быть описана обобщённым полем Янга-Миллса вида

$$W_{\mu_1 \dots \mu_q}^{A(s_1-1), \dots, B(s_q-1), C(s_q-t), D(s_{q+1}), \dots, F(s_n)} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q}. \quad (23)$$

Многоточие в (22) обозначает ряд из слагаемых с производными более низкого порядка, а также слагаемые, проектирующие на тип симметрии \mathbf{S} .

С помощью ковариантной производной $D_\Omega = d + \Omega$, удовлетворяющей (12), т.е. $D_\Omega^2 = 0$, для данного обобщённого поля Янга-Миллса $W_q^{\mathbf{A}}$ можно построить $(q+1)$ -форму напряжённости $R_{q+1}^{\mathbf{A}} = D_\Omega W_q^{\mathbf{A}}$, которая инвариантна относительно калибровочных преобразований $\delta W_q^{\mathbf{A}} = D_\Omega \xi_{q-1}^{\mathbf{A}}$, где калибровочный параметр есть $(q-1)$ -форма со значениями в том же представлении алгебры (анти)-де Ситтера, что и поле $W_q^{\mathbf{A}}$. Напряжённость $R_{q+1}^{\mathbf{A}}$ удовлетворяет тождествам Бьянки $D_\Omega R_{q+1}^{\mathbf{A}} \equiv 0$.

Уравнения движения в терминах напряжённости $R_{q+1}^{\mathbf{A}}$ имеют вид $R_{q+1}^{\mathbf{A}} = E \dots EC^{\mathbf{W}}$, где $E^A = D_\Omega V^A$, а $C^{\mathbf{W}}$ — обобщённый тензор Вейля, параметризующий те компоненты напряжённости, которые могут быть отличными от нуля на уравнениях движения. В случае $(\mathbf{S} = \square, q = 1, t = 1)$, т.е. гравитона, обобщённый тензор Вейля совпадает с обычным тензором Вейля, т.е. бесследовой частью тензора кривизны.

Отметим, что в частных случаях идентификация обобщённых полей Янга-Миллса уже была проведена для безмассового поля спина s^{23} ; частично-безмассового поля спина s в главе 5 настоящей диссертации; для полей серии $(\mathbb{Y}[h_1, h_2], 1, 1)^{24}$; для полей серии $(\mathbf{S}, q_{\min}, 1)$, где q_{\min} есть высота последней колонки в \mathbf{S}^{25} .

Отдельный результат состоит в вычислении всех σ_- -когомологии для произвольного поля (\mathbf{S}, q, t) . Теорема о σ_- -когомологиях включает в себя все известные в литературе на настоящий момент частные случаи. Вычислив σ_- -когомологии, удалось не только отождествить калибровочную теорию поля $W_q^{\mathbf{A}}$ с частицей, определяемой (\mathbf{S}, q, t) , но и предъявить *расширения* $\bar{\phi}^{\mathbf{S}}$ потенциалов $\phi^{\mathbf{S}}$, необходимые для построения теории вне массовой оболочки. Отметим, что за исключением частных случаев описание в терминах $\bar{\phi}^{\mathbf{S}}$ отсутствовало в литературе.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

В приложениях собраны используемые обозначения, необходимые сведения из теории представлений и некоторые коэффициенты к главе 5.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Построена развёрнутая формулировка для бозонных и фермионных полей *произвольного типа симметрии* (спина) в пространстве Минковского произвольной размерности. Результат опубликован в [1].

2. Предложено обобщение тетрадной формулировки на случай безмассовых полей *произвольного типа симметрии*. Построено простое действие первого порядка, содержащее всего два слагаемых для поля произвольного спина. Результат опубликован в [2].

3. Получена классификация калибровочных полей *произвольного типа симметрии* в d -мерном пространстве (анти)-де Ситтера: калибровочное поле однозначно определяется спином — неприводимым представлением $\mathfrak{so}(d-1)$, и двумя дискретными параметрами, фиксирующими тип калибровочной симметрии. Результат опубликован в [4].

²³M. A. Vasiliev, Nucl. Phys. B **616**, 106 (2001).

²⁴K. B. Alkalaev, Theor. Math. Phys. **140**, 1253 (2004).

²⁵K. B. Alkalaev, O. V. Shaynkman and M. A. Vasiliev, Nucl. Phys. B **692**, 363 (2004).

4. Для каждого калибровочного поля *произвольного типа симметрии* из полученной классификации построено полевое описание в терминах обобщённого поля Янга-Миллса. Показано, что каждое обобщённое поле Янга-Миллса описывает некоторое калибровочное поле из классификации. Результат опубликован в [4].

5. Для семейства частично-безмассовых полей спина s построено явно калибровочно-инвариантное действие, квадратичное по напряжённости обобщённого поля Янга-Миллса. Результат опубликован в [3].

6. В общем случае вычислены σ_- -когомологии, которые отвечают за интерпретацию обобщённого поля Янга-Миллса в терминах полевых потенциалов. Результат опубликован в [5].

Публикации по теме диссертации

[1] E. D. Skvortsov. Mixed-Symmetry Massless Fields in Minkowski space Unfolded // *JHEP*. — 2008. — 0807:004.

[2] E. D. Skvortsov. Frame-like Actions for Massless Mixed-Symmetry Fields in Minkowski space // *Nucl. Phys.* — 2009. — B808:569–591.

[3] E. D. Skvortsov and M. A. Vasiliev. Geometric formulation for partially massless fields // *Nucl. Phys.* — 2006. — B756:117–147.

[4] E. D. Skvortsov. Gauge fields in (anti)-de Sitter space and Connections of its symmetry algebra // *J.Phys.* — 2009. — A42:385–401.

[5] E. D. Skvortsov. Gauge fields in $(A)dS_d$ within the unfolded approach: algebraic aspects // *JHEP*. — 2010. — 1001:106.