

Физический Институт им. П. Н. Лебедева
Российской академии наук
Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма

УДК 531.3

Васильев Евгений Александрович

**ДИНАМИКА ТЁМНОЙ МАТЕРИИ
В ЦЕНТРАХ ГАЛАКТИК**

01.04.02 – теоретическая физика

*Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель
к.ф.-м.н. М.И.Зельников

Москва

2006

Оглавление

Введение	4
Используемые обозначения и переменные	9
1 Тёмная и барионная материя в галактиках. Обзор литературы	12
1.1 Начальная структура гало тёмной материи	13
1.2 Барионное сжатие	17
1.3 Строение ядра галактики	18
1.4 Эволюция распределения звёзд и тёмной материи в окрестности центральной чёрной дыры	22
2 Начальные условия и барионное сжатие	29
2.1 Параметры распределения и движения звёзд и тёмной материи	29
2.1.1 Две модели функции распределения тёмной материи	30
2.1.2 Анизотропия скоростей частиц тёмной материи . . .	33
2.1.3 Функция распределения звёзд	35
2.1.4 Параметры движения	36
2.2 Барионное сжатие	37
2.2.1 Степень сжатия	37
2.2.2 Тёмная материя в ядре нашей Галактики	39
2.2.3 Изменение показателя анизотропии скоростей	40
3 Взаимодействие тёмной материи со звёздами ядра галактики и чёрной дырой	43
3.1 Уравнение диффузии	43

3.1.1	Орбитально-усреднённое уравнение	43
3.1.2	Выбор переменных	44
3.2	Коэффициенты диффузии	46
3.2.1	Коэффициенты диффузии для балджа	47
3.2.2	Коэффициенты диффузии для области влияния чёрной дыры	50
3.3	Граничные условия для уравнения диффузии	51
3.4	Начальные условия	55
4	Эволюция распределения тёмной материи	57
4.1	Одномерное приближение – диффузия по моменту	58
4.1.1	Диффузия в модели Б	58
4.1.2	Диффузия в модели А	62
4.2	Одномерная диффузия по энергии	64
4.2.1	Диффузия в области балджа	64
4.2.2	Влияние кулоновской области	66
4.3	Решение полного двумерного уравнения	67
4.3.1	Особенности двумерной диффузии	67
4.3.2	Интегрирование двумерного уравнения диффузии	69
4.3.3	Варианты расчёта	69
4.3.4	Поглощение тёмной материи чёрной дырой	70
4.3.5	Нагрев тёмной материи звёздами	72
4.3.6	Эволюция пространственной плотности тёмной материи	74
4.3.7	Аннигиляция тёмной материи	75
4.3.8	Детектирование аннигиляционного излучения	76
	Заключение	88
	Список литературы	94

Введение

В настоящее время считается доказанным, что бóльшую часть материи во Вселенной составляет так называемая тёмная материя [1]. Её вклад в полную плотность энергии во Вселенной оценивается в 23%, в то время как вклад обычной (барионной) материи составляет не более 5% (остальное приходится на долю так называемой тёмной энергии) [2]. Наиболее вероятно, что холодная (нерелятивистская) тёмная материя состоит в основном из ещё не открытых элементарных частиц, чрезвычайно слабо взаимодействующих с барионным веществом и друг с другом [3]. Тем не менее, поскольку основным видом взаимодействия во Вселенной в больших масштабах является гравитация, которой подвержены все виды материи, тёмная материя играет определяющую роль в формировании структуры Вселенной.

По современным представлениям, первоначальные малые флуктуации плотности вещества из-за гравитационной неустойчивости приводят к образованию наблюдаемого ныне сложного пространственного распределения материи. Поскольку тёмная материя является основной по массе компонентой вещества, то первоначальная структура обусловлена именно эволюцией распределения тёмной материи. В целом картина эволюции следующая: возмущения различных пространственных масштабов растут по амплитуде и при достижении некоторого критического значения превышения плотности над средним её значением переходят на нелинейную стадию развития и формируют гравитационно связанные объекты (гало). Эти объекты различных масштабов образуют сложную иерархическую структуру, сливаются между собой и дают основу для формирования видимых объек-

тов во Вселенной – галактик и скоплений галактик. Процесс образования структуры очень сложен и доступен лишь для весьма упрощённого аналитического описания [4] либо для численного моделирования [5]. Результаты современных исследований структуры гало приводятся в разделе 1.1, а выбранные нами для дальнейших расчётов модели гало – в разделе 2.1.

После того, как тёмная материя формирует связанные объекты и определяет крупномасштабный гравитационный потенциал, барионное вещество начинает стекать в образовавшиеся потенциальные ямы. Поскольку, в отличие от тёмной, барионная материя (т.е. газ и плазма) может охлаждаться и терять энергию через излучение фотонов, то она в конечном итоге скапливается в центрах потенциальных ям и образует видимые объекты – галактики. Таким образом, оказывается, что в центральных частях галактик преобладает по массе барионное вещество, а на периферии – тёмное, составляющее так называемое гало галактик (что прослеживается, в частности, по кривым вращения). Разумеется, в результате концентрации барионов в центрах галактик гравитационный потенциал уже начинает определяться ими. При этом распределение тёмной материи также меняется в соответствии с этим изменением потенциала. Этот процесс называется барионным адиабатическим сжатием гало тёмной материи (адиабатическим – так как происходит оно достаточно медленно по сравнению с динамическим временем, т.е. орбитальным периодом частиц. Сжатием – так как в результате плотность тёмной материи увеличивается). Более подробно этот процесс описан в разделе 1.2, а расчёт сжатия для используемых нами моделей гало и сравнение с результатами других авторов – в разделе 2.2. Эта часть исследования опубликована в работе [6].

Впрочем, эволюция распределения тёмной материи не исчерпывается иерархическим скучиванием и барионным сжатием. На периферии галактик тёмная материя испытывает приливные возмущения со стороны окружающих галактик и скоплений, а в центральных областях – возмущения

со стороны звёзд, называемые гравитационным рассеянием. Оно аналогично кулоновскому рассеянию в плазме, которое приводит к установлению термодинамического равновесия. Однако в случае тёмной материи в ядре галактики (так называемом балдже) имеются два существенно отличающихся от плазмы обстоятельства. Во-первых, длина свободного пробега много больше характерных размеров системы, или, что то же самое, частота соударений гораздо меньше орбитальной частоты. Поэтому время установления равновесия может оказаться больше хаббловского времени (т.е. времени существования Вселенной, или, в нашем контексте, периода от момента образования галактики до настоящего времени). Во-вторых, масса частиц тёмной материи на десятки порядков меньше массы звёзд, поэтому термодинамическое равновесие, предполагающее одинаковую температуру для всех компонент системы, попросту невозможно. Вместо этого происходит процесс неограниченного нагрева частиц тёмной материи звёздами, с характерным временным масштабом порядка обратной частоты соударений. Кроме того, поскольку плотность в различных частях системы отличается на порядки, то процесс этот пространственно неоднороден и вообще довольно сложен.

Наконец, как известно из наблюдений, в центрах галактик, как правило, существуют сверхмассивные чёрные дыры [7]. Они обнаруживаются как в активных ядрах галактик, через наблюдение рентгеновского излучения от аккреционных дисков, так и в обычных галактиках, по измерению скоростей движения звёзд вокруг них. В частности, в нашей Галактике доказано наличие чёрной дыры с массой $M_{bh} \approx 3 \cdot 10^6 M_{\odot}$ (M_{\odot} – солнечная масса) [8, 9]. Строение ядра галактики описано в разделе 1.3.

Очевидно, что чёрная дыра не может не влиять на распределение окружающего вещества, как тёмного, так и барионного. Во-первых, она определяет гравитационный потенциал в области своего влияния, радиус которой r_h определяется из условия равенства массы звёзд в его пределах и удвоен-

ной массы чёрной дыры. Соответственно меняются плотность вещества и скорости частиц в этой области. Во-вторых, она поглощает частицы тёмной материи и звёзды, удельный момент импульса которых меньше критического значения $L_g = 2cr_g$, где r_g – радиус Шварцшильда $r_g = 2GM_{bh}/c^2$. Впрочем, для любого неэкстремального распределения вещества в центральной области доля частиц, попадающих в чёрную дыру за счёт этого эффекта, невелика, если пренебречь эволюцией этого распределения. Однако, как было сказано выше, за счёт гравитационного рассеяния распределение звёзд и тёмной материи меняется со временем, причём наиболее быстро именно в центральной области, где плотность вещества наибольшая. Поскольку, тем не менее, орбитальные времена в любом случае гораздо меньше времени эволюции, то она имеет диффузионный характер и описывается кинетическим уравнением со столкновительным членом, или уравнением Фоккера-Планка.

Рассмотрению эволюции тёмной материи в центральных областях галактик (на примере нашей Галактики) и посвящена основная часть данной работы, результаты которой опубликованы в статьях [10, 11, 12]. В разделе 1.4 приводится обзор литературы по эволюции вещества в окрестности чёрной дыры. В третьей главе вводится двумерное уравнение диффузии, описывающее эволюцию тёмной материи, и вычисляются его коэффициенты для различных пространственных областей. Затем выводятся граничные условия для уравнения диффузии, которые имеют достаточно нетривиальный вид (существенно зависят от своих аргументов). Также выбираются исходные параметры для нескольких моделей распределения тёмного вещества.

В четвёртой главе решается уравнение диффузии. Сначала проводится аналитическое рассмотрение одномерных пределов уравнения (диффузия отдельно по каждой из двух переменных), которое позволяет выяснить основные особенности процесса. Однако для детального анализа необхо-

димо решение полного двумерного уравнения, которое получено методом численного интегрирования конечно-разностной задачи. Описываются полученные с его помощью новые эффекты, которые не могут быть рассчитаны в одномерной задаче. Кроме того, учитывается влияние эффекта аннигиляции частиц тёмной материи и его роль в процессе эволюции её распределения. Наблюдение излучения от предполагаемой аннигиляции является фактически единственным способом экспериментального исследования распределения тёмной материи [3] (так как её общее количество в центре Галактики мало по сравнению с массой барионного вещества, и трудно определяемо по динамике звёзд и измерению массы. См., впрочем, работу [13], где делаются оценки на массу тёмного вещества из этих соображений). Поэтому в конце главы рассчитываются величины, связанные с наблюдениями (из-за неопределённости параметров частиц тёмной материи непосредственное сравнение с наблюдательными данными пока невозможно).

Таким образом, в данной работе подробно исследована эволюция распределения тёмной материи в центральных областях галактик под влиянием гравитационного взаимодействия с барионным веществом и чёрной дырой в центре галактики.

Используемые обозначения и переменные

Параметры тёмной материи

$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), f(E, L)$	функция распределения частиц в фазовом пространстве
v_r, v_t	радиальная и тангенциальная скорости частицы
$E = \frac{v_r^2 + v_t^2}{2} + \Phi(r)$	полная энергия частицы на единицу массы
$L = r v_t$	угловой момент импульса на единицу массы
r_-, r_+	peri- и апоцентр орбиты, корни уравнения $E - \Phi(r) - \frac{L^2}{2r^2} = 0$
$r_{max}(E)$	апоцентр радиальной орбиты с данной энергией: $E = \Phi(r_{max})$
$I = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} v_r dr$	радиальное действие
$J(E) = I(E, L = 0)$	оно же для полностью радиальной орбиты с данной энергией
$L_c(E)$	угловой момент для круговой орбиты с данной энергией
$\varkappa = J(E)/L_c(E)$	коэф-т пропорциональности между J и L_c , $\varkappa \approx 0.6 \div 1$
$T = 2\pi \frac{\partial I_r}{\partial E}$	орбитальный период частицы
$\rho(r) = \mathcal{K} r^{-\gamma_d}$	плотность тёмной материи до барионного сжатия
$\rho'(r) = \mathcal{K}' r^{-\gamma'_d}$	плотность после барионного сжатия
σ_r^2, σ_t^2	дисперсии радиальной и тангенциальной скоростей частицы
$\beta, \beta' = 1 - \frac{\sigma_t^2}{2\sigma_r^2}$	показатель анизотропии скоростей до и после сжатия
μ	показатель степени в начальной функции распределения (2.7)
$m_\chi, \langle \sigma_a v_\chi \rangle$	масса и сечение аннигиляции частиц тёмной материи

M_{bh}	масса центральной чёрной дыры
$r_g = 2GM_{bh}/c^2$	радиус Шварцшильда
$L_g = 2cr_g$	минимальный угловой момент вблизи чёрной дыры
m_*	масса звезды
E_*	полная энергия звезды на единицу массы
σ^2	одномерная дисперсия скоростей звёзд в балдже
$f_*(E_*)$	функция распределения звёзд
F_b, F_c	нормировочные константы f_* для балджа и центр.области
$\rho_*(r) = \mathcal{K}_* r^{-\gamma_b}$	плотность звёзд в балдже
$M_*(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_*(r') dr'$	масса звёзд в пределах радиуса r
$\Phi_*(r) = \int_0^r \frac{G M_*(r')}{r'^2} dr'$	гравитационный потенциал звёзд
$\Phi(r) = -\frac{G M_{bh}}{r} + \Phi_*(r)$	полный гравитационный потенциал
r_h	радиус влияния чёрной дыры: $M_*(r_h) = 2 M_{bh}$
r_1	нормировочный радиус ($= r_h$ в настоящее время)
t_h	время существования Галактики (10^{10} лет)

$\ln \Lambda$	кулоновский логарифм (~ 15)
$Q(E)$	безразмерная переменная, зависящая только от энергии
$R = L^2/L_c^2(E)$	нормированный квадрат углового момента
$R_g = L_g^2/L_c^2(E)$	минимальное значение R , граница поглощения чёрной дырой
$f_g = f(R = R_g)$	значение функции на границе
$\mathcal{D}_{QQ}, \mathcal{D}_{QR}, \mathcal{D}_{RR}$	коэффициенты диффузии по соответствующим переменным
$\mathcal{D} = \lim_{R \rightarrow 0} \mathcal{D}_{RR}/R$	предельное значение коэффициента
$\Delta R = \sqrt{2\mathcal{D}_{RR}T}$	среднеквадратичное изменение R за один период
$\alpha = \frac{f_g/R_g}{\partial f/\partial R _{R=R_g}}$	соотношение между функцией и её производной на границе
$q = \mathcal{D}T/R_g$	мера изменения R за период по сравнению с граничным значением
Q_{cr}	значение Q , при котором $q = 1$
Q_h	значение Q , разделяющее область влияния чёрной дыры и балдж
$T_D = 1/\mathcal{D}(Q)$	время релаксации для данной энергии

Глава 1

Тёмная и барионная материя в галактиках. Обзор литературы

Эволюция распределения вещества в больших пространственных масштабах (галактики, скопления галактик и т.д.) продолжается от самого начала расширения Вселенной до настоящего времени. Весьма условно её можно разделить на три этапа (рис. 1.1):

- Первоначальный рост флуктуаций плотности и образование гравитационно связанных объектов из тёмной материи различных масштабов, их иерархическое сгущивание и слияние.
- Накопление газа внутри гало тёмной материи, его охлаждение и конденсация к центру – образование собственно галактики и звёзд, и сопутствующее ему барионное сжатие гало.
- Эволюция тёмной материи в центральных областях галактики за счёт гравитационного рассеяния на звёздах.

Необходимо подчеркнуть, что разделение на эти этапы достаточно условное: и в настоящий момент происходят слияния галактик, образование всё больших гравитационно связанных объектов – скоплений и сверхскоплений галактик и т.д. Тем не менее, если мы интересуемся процессами, происходящими в масштабах одной галактики, то такое разделение вполне оправдано,

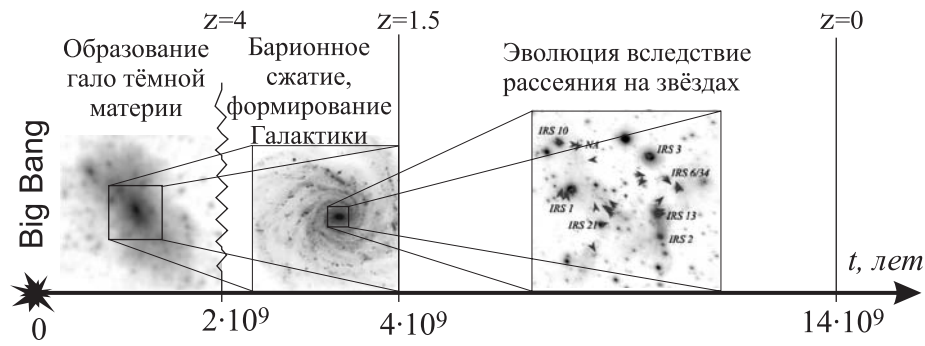


Рис. 1.1: Временные рамки исследуемых процессов.

Образование первоначальной структуры гало тёмной материи галактических масштабов происходит в первые миллиарды лет; затем конденсация газа в центре гало приводит к образованию собственно галактики, что соответствует фазе барионного сжатия в нашем исследовании. Дальнейшая эволюция происходит за счёт гравитационного рассеяния на звёздах ядра галактики. Продолжительность каждой стадии определяется, впрочем, довольно условно.

т.к., начиная с момента формирования гало тёмной материи галактических масштабов ($\sim 10^{12} M_{\odot}$) его эволюция происходит достаточно обособленно, по крайней мере в центральных областях.

В диссертации рассматривается эволюция тёмной материи на последних двух этапах предложенной схемы. Обзор литературы также организован в соответствии с этой схемой: вначале рассказывается о современном состоянии дел в области изучения формирования начальной структуры гало тёмной материи, затем описывается эффект барионного сжатия, далее изложены наблюдательные и теоретические данные о распределении барионной материи в центре галактики и сверхмассивных чёрных дырах, и наконец, рассказано об исследованиях эволюции распределения звёзд и тёмной материи в окрестности чёрной дыры.

1.1 Начальная структура гало тёмной материи

В настоящее время образование гало тёмной материи активно изучается как аналитическими методами, так и с помощью численного моделирова-

ния задачи N тел. Оба метода имеют как свои преимущества, так и недостатки. Аналитические модели, как правило, имеют дело с образованием одиночного гало и пренебрегают приливными силами со стороны соседних объектов и иерархическим слиянием гало. Численные расчёты учитывают пространственное расположение соседних гало, их сгущивание и слияние, однако из-за ограниченного пространственного разрешения не могут достаточно уверенно предсказать структуру внутренних областей гало, которые нас как раз и интересуют. В большинстве моделей, тем не менее, предсказывается, что внутренние области гало имеют пик плотности, описываемый степенной зависимостью от радиуса:

$$\rho_d(r) = \mathcal{K} r^{-\gamma_d}. \quad (1.1)$$

Как показано в работе [14], при слиянии двух гало внутренний пик плотности получившегося объекта соответствует более “крутому” профилю одного из его предшественников. В этом смысле можно говорить о том, что слияния мало влияют на внутренние части гало. Также ясно, что приливное воздействие более существенно опять же для внешних, а не для внутренних областей гало. Эти выводы подтверждаются и результатами численного моделирования слияния гало [15].

Аналитические теории в основном описывают динамику коллапса первичного максимума плотности на нелинейной стадии в самоподобном режиме. В результате коллапса образуется гравитационно-связанный объект со степенным профилем плотности, логарифмический наклон которого $-\gamma_d$ близок к -2 [4, 16, 17]. Придание частицам углового момента происходит, например, за счёт приливного взаимодействия со стороны соседних объектов на радиусе поворота частицы (когда она переходит от общекосмологического расширения к коллапсу) [18], или за счёт несферичности начального пика плотности тёмной материи [4]. В обоих случаях нет никаких дополнительных пространственных масштабов, и характерный угловой

момент естественно связать с радиусом орбиты частицы.

Численные расчёты позволяют проследить эволюцию пространственного распределения тёмной материи на многих масштабах, описывают иерархическое сгущивание и слияние объектов и позволяют исследовать структуру гало на масштабах вплоть до долей процента вириального радиуса. Большая часть исследователей сходятся на том, что гало различных масштабов имеют достаточно универсальную структуру, как правило, имеющую степенные асимптотики на малых и больших радиусах. Наиболее распространена модель Navarro, Frenk & White (NFW) [19], в которой $\rho(r) \propto (r/r_s)^{-1}(1 + r/r_s)^{-2}$, где $r_s = r_{vir}/c$ – характеристический радиус (на котором логарифмический наклон профиля плотности равен -2), $c \sim 10 - 15$ – т.н. “концентрация”. Также популярна модель Moore [20, 21], отличающаяся ббльшим наклоном профиля плотности в центре (-1.5 вместо -1 в NFW). Дальнейшие расчёты со всё более высоким разрешением не дают однозначного ответа на вопрос о значении логарифмического наклона в центре: в работах [22, 23, 24, 25] эта величина лежит в пределах $-1 \div -1.5$, возможно, завися от массы гало [26]. Анизотропия скоростей в моделируемых гало тёмной материи меняется от изотропной или слабо радиально анизотропной в центре до сильно радиально анизотропной на границе гало [27, 28]. Впрочем, в моделируемых гало большую роль играют процессы релаксации [29], которые в реальных условиях существенно меньше.

Интересно отметить, что хотя пространственный профиль плотности гало имеет нетривиальный вид (логарифмический наклон меняется с радиусом), но величина $\rho(r)/\sigma^3(r)$, имеющая размерность фазовой плотности, хорошо описывается степенным законом в широком диапазоне расстояний:

$$\rho(r)/\sigma^3(r) \propto r^{-\alpha}. \quad (1.2)$$

Это свойство было впервые отмечено в работе [30] на основании числен-

ных расчётов. В дальнейших работах [31, 32, 17] данное свойство бралось в качестве постулата и на его основании строились модели равновесного строения гало. В сферически симметричном стационарном случае самогравитирующая система подчиняется уравнению Джинса [33]:

$$\frac{d}{dr}(\rho \sigma_r^2) + \frac{2\beta}{r}(\rho \sigma_r^2) + \rho \frac{GM(r)}{r^2} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь σ_r^2 и σ_t^2 – дисперсии скоростей в радиальном и тангенциальном направлении, $\beta = 1 - \frac{\sigma_t^2}{2\sigma_r^2}$ – параметр анизотропии Бинни [33] (системы с $0 < \beta < 1$ радиально анизотропны, с $\beta < 0$ – тангенциально анизотропны, а $\beta = 0$ отвечает случаю изотропии). Для замкнутого описания необходимо задать зависимость β от расстояния. В работе [17] принималось $\beta = 0$, а в [32] использовалось соотношение между β и логарифмическим наклоном профиля плотности $\gamma_d = -d \ln \rho(r)/dr$:

$$\beta = \beta_0 + b(\gamma_d - \gamma_0). \quad (1.4)$$

Это эмпирическое соотношение было предложено в работе Hansen & Moogre [34] на основании анализа численных расчётов различных событий (образования гало в результате сферического коллапса в изолированном объёме, в космологическом моделировании и при слиянии двух гало). Во всех ситуациях наблюдалась корреляция между γ_d и β при различных радиусах, с коэффициентами $\beta_0 \approx 0.2$, $\gamma_0 \approx 0.8$.

Таким образом, получил развитие третий подход к проблеме строения гало тёмной материи, основанный не на изучении процессов образования гало, а на расчёте его равновесной конфигурации, с учётом некоторых эмпирически установленных зависимостей.

Мы будем исходить из некоторых физических предположений относительно функции распределения, при которых соотношения типа (1.2, 1.4) не постулируются, но тем не менее оказываются справедливыми.

В связи с имеющимися неопределённостями в структуре гало мы рассмотрим два класса функций распределения (А и Б), отвечающих в боль-

шей степени аналитическим теориям и результатам моделирования соответственно. Они будут описаны в разделе 2.1.1.

1.2 Барионное сжатие

Как уже было сказано, гало тёмной материи формируются до образования галактик, и в дальнейшем барионное вещество, охлаждаясь, натекает в образованную тёмной материей потенциальную яму. В результате в центральной части галактики барионное вещество в настоящее время преобладает по массе, определяя гравитационный потенциал. Реакция гало тёмной материи на изменение потенциала и называется эффектом барионного сжатия.

Для расчёта сжатия гало наиболее распространён метод Блюменталья [35], в котором предполагается сохранение углового момента частиц тёмной материи. Он строго применим только к частицам на круговых орбитах. Для таких частиц $L^2 = r^2 v_c^2 = G M(r) r$, где $M(r)$ – масса внутри данного радиуса. Следовательно, конечный радиус орбиты частицы r' связан с её начальным радиусом r соотношением

$$(M'_{dm}(r') + M_{\star}(r')) r' = M_{dm}(r) r, \quad (1.5)$$

где $M'_{dm} + M_{\star}$ – полная масса барионов и тёмной материи после сжатия, а M_{dm} – начальная масса тёмной материи в пределах данного радиуса.

В случае некруговых орбит, помимо углового момента, сохраняется также и радиальное действие (в методе Блюменталья оно равнялось нулю). Поскольку радиус орбиты частицы теперь непостоянен, то напрямую применять этот метод нельзя. В работах [36, 37] было предложено использовать комбинацию $M(\bar{r}) r$, где \bar{r} – средний орбитальный радиус частицы. При таком методе расчёта степень сжатия гало оказывается меньше, что лучше согласуется с приводимыми там же результатами численного моделирования. Авторы утверждают, что метод Блюменталья переоценивает плотность

в самой центральной части гало в полтора-два раза.

В работе [38] используется метод Юнга, в котором сохраняется функция распределения, записанная в переменных действия. Поскольку, как правило, мы имеем дело с функцией распределения, зависящей от энергии и момента, то в данном методе используется итерационная процедура для расчёта функции распределения. В работе показано, что при таком расчёте плотность после сжатия также меньше, чем в методе Блюменталья, причём разница более заметна для гало, обладающих изначально более плоским профилем (меньшим γ_d), и большей радиальной анизотропией.

Численные расчёты реакции гало на образование диска в работе [39] также подтверждают эти выводы. По мнению авторов, гало с более крутым начальным профилем обладают бóльшим превосходством круговых орбит над радиальными, при заданной степени анизотропии, чем и объясняется их относительно более близкая к предсказанию метода Блюменталья степень сжатия.

Для используемых нами моделей степень сжатия можно посчитать аналитически, что и сделано в разделе 2.2.

1.3 Строение ядра галактики

В настоящее время накоплено большое количество наблюдательных данных по распределению массы в нашей Галактике. Построение многокомпонентных самосогласованных моделей галактики, удовлетворяющих всем наблюдательным ограничениям, учитывает такие аспекты, как трёхосность ядра галактики (балджа) и наличие вращающейся компоненты внутреннего диска [40, 41, 42]. Для нашей цели подобные усложнения представляются излишними. Мы будем считать балдж сферически симметричным и обладающим изотропным распределением по скоростям звёзд. Таким образом, структура балджа задаётся профилем плотности звёзд $\rho_*(r)$ и соответ-

ствующим ему потенциалом $\Phi(r)$, а функция распределения звёзд зависит только от энергии звезды: $f_{\star}(E_{\star})$.

Как правило, отдельные звёзды в ядре галактик невозможно увидеть в оптическом диапазоне как из-за большой их плотности, так и из-за поглощения света пылевыми облаками. Поэтому приходится пользоваться косвенными методами нахождения распределения массы в балдже $M_{\star}(r)$, основным из которых является наблюдение одномерной дисперсии радиальных скоростей $\sigma^2(r)$ в зависимости от расстояния до центра балджа. Из неё затем вычисляется профиль плотности, если принять некоторые предположения относительно степени анизотропии скоростей звёзд (наиболее часто предполагается изотропия, мы также примем это допущение).

По измерению дисперсии скоростей часто можно сделать вывод о наличии сверхмассивной чёрной дыры в центре галактики [7, 43]. Если профиль плотности взять в степенном виде ($\rho \propto r^{-\gamma_b}$ в балдже, $\rho \propto r^{-\gamma_c}$ вблизи чёрной дыры), то дисперсия скоростей для балджа составляет

$$\sigma^2(r) = \frac{1}{2(\gamma_b - 1)} \frac{G M_{\star}(r)}{r}, \quad (1.6a)$$

а для области кулоновского потенциала чёрной дыры

$$\sigma^2(r) = \frac{1}{1 + \gamma_c} \frac{G M_{bh}}{r}. \quad (1.6b)$$

(последнее утверждение следует из формулы Джинса (1.3) для изотропного распределения звёзд в кулоновском потенциале). Таким образом, если дисперсия скоростей растёт к центру, то это свидетельствует о наличии чёрной дыры.

В нашей Галактике, кроме того, были проведены детальные наблюдения в инфракрасном диапазоне отдельных звёзд в центре балджа [44, 45, 9]. При этом оказалось возможным измерить не только лучевые скорости звёзд, но и их перемещение по небесной сфере, таким образом определяя трёхмерную скорость звезды без дополнительных предположений об изотропии. Оказалось, впрочем, что скорости распределены достаточно изотропно [46]. Эти

измерения доказывают, что в центре балджа находится чёрная дыра с массой от $2.6 \cdot 10^6 M_\odot$ [45] до $4 \cdot 10^6 M_\odot$ [9]. Мы примем значение $M_{bh} = 3 \cdot 10^6 M_\odot$, которое наиболее часто используется в расчётах других авторов.

Профиль плотности звёзд в окрестности чёрной дыры имеет следующий вид:

$$\rho_\star(r) = \rho_{\star,1} \cdot \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-\gamma}, \quad \gamma \approx \begin{cases} 1.4 \pm 0.1, & r < r_1 \\ 2.0 \pm 0.1, & r > r_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

При этом $r_1 = 0.4$ пс, $\rho_{\star,1} = 1.3 \cdot 10^6 M_\odot / \text{пс}^3$ [8].

В более отдалённых областях степенной профиль балджа имеет показатель степени $\gamma_b \approx 1.8$ [41]. Чаще всего, впрочем, принято считать балдж изотермическим, т.е. с показателем степени $\gamma_b = 2$.

Для расчёта адиабатического сжатия в главе 2 мы примем величину $\gamma_b = 1.8$ и пренебрежём областью влияния чёрной дыры, поскольку нас будет интересовать изменение плотности тёмной материи в пределах центральной области радиусом порядка 1 кпс. Масса внутри данного радиуса меняется как $M_\star(r) = 6 \cdot 10^9 M_\odot (r/1 \text{ кпс})^{1.2}$ (см. рис. 1.2).

Для расчёта же эволюции тёмной материи в центральной части балджа ($r \lesssim 100$ пс) и вблизи чёрной дыры, которая изучается в главах 3 и 4, мы примем немного другую модель распределения звёзд. А именно, для балджа принимается изотермическое распределение, т.е. дисперсия скоростей звёзд не зависит от расстояния, а показатель степени профиля плотности звёзд $\gamma_b = 2$. При этом постоянную дисперсию скоростей примем равной 80 км/с (рис. 1.3), что справедливо для внутренней области балджа ($r \lesssim 100$ пс), которая наиболее существенна для рассматриваемой задачи. (Отметим, что средняя величина дисперсии для всего балджа составляет 100-120 км/с [47, 42]). Внутри области влияния чёрной дыры (при $r < r_h$) показатель степени γ_c принят равным 1.5.

Радиус влияния чёрной дыры r_h определяется как

$$r_h = \frac{G M_{bh}}{\sigma^2}, \quad (1.8)$$

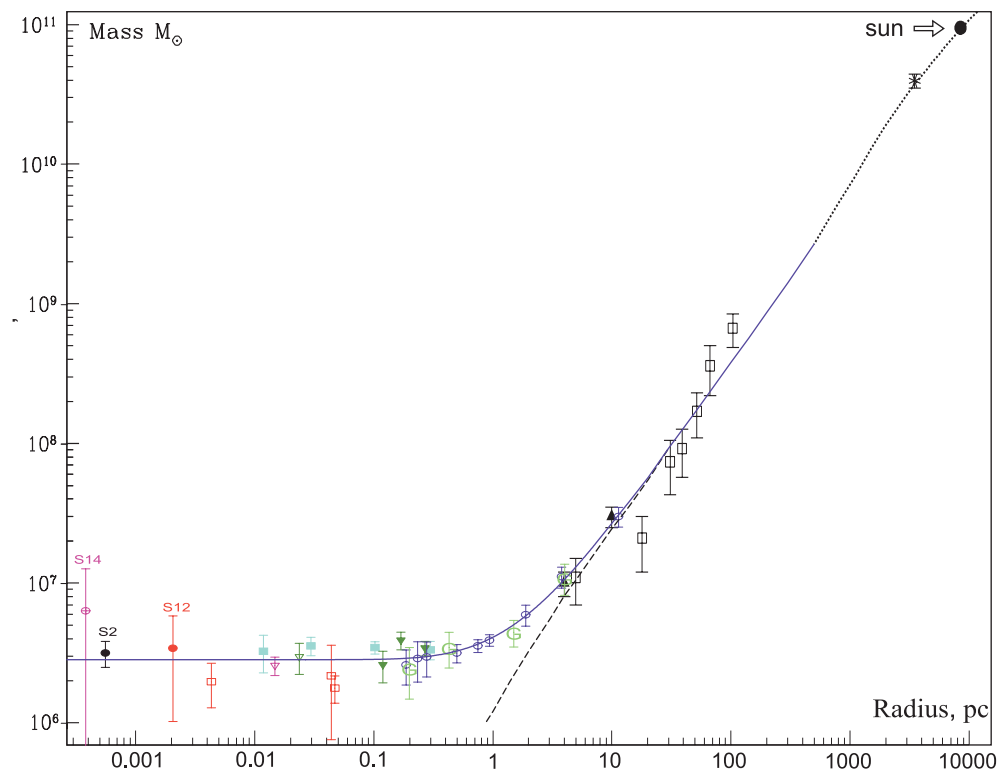


Рис. 1.2: Распределение массы внутри сферы данного радиуса для нашей Галактики (по данным [40, 44, 45]).

Штриховая линия – степенной профиль плотности балджа $M_*(r) = 6 \cdot 10^9 M_\odot \left(\frac{r}{1 \text{ кпс}}\right)^{1.2}$, сплошная линия – балдж плюс чёрная дыра с массой $M_{bh} = 3 \cdot 10^6 M_\odot$, точки – результаты наблюдений.

где σ^2 – дисперсия скоростей звёзд вне этой области. Для сингулярной изотермической сферы (т.е. $\gamma_b = 2$) $M_*(r_h) = 2 M_{bh}$. В нашей Галактике в настоящее время $r_h = 2$ пс.

В других галактиках строение балджа аналогично нашему. В основном, они делятся на две группы: галактики с ядром (core), т.е. областью постоянной или слабо возрастающей ($\rho_* \propto r^{-(0 \div 0.3)}$) плотности в центре, и галактики степенного профиля (cusp), в которых плотность растёт существенно быстрее ($\rho_* \propto r^{-(1.5 \div 2)}$) [48]. Поскольку сверхмассивные чёрные дыры легче обнаруживаются в последних, мы будем использовать именно такой степенной профиль плотности звёзд в балдже с показателем $\gamma_b \sim 2$. Кроме того, в таких балджах обычно распределение скоростей звёзд ближе к изотропному [43].

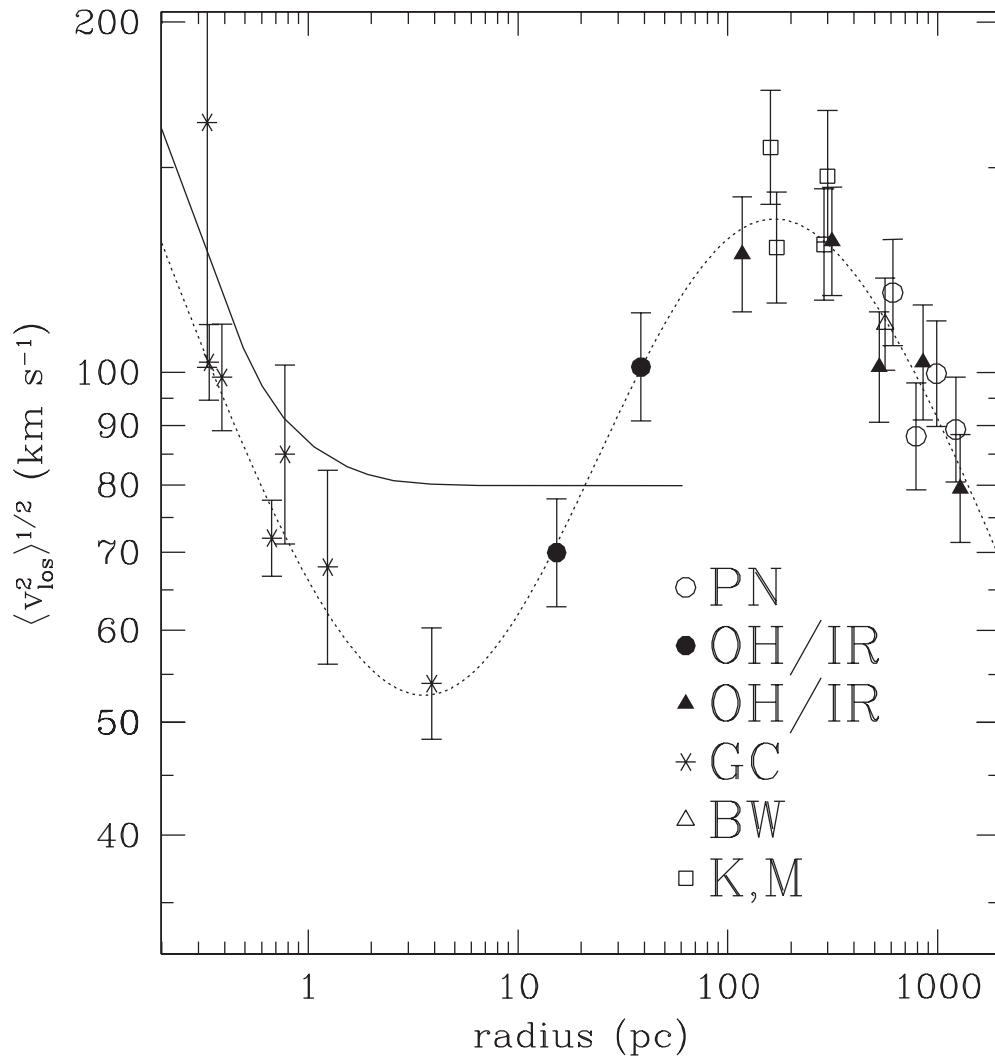


Рис. 1.3: Профиль дисперсии скоростей в балдже Галактики (компиляция наблюдательных данных из [47]).

Сплошная линия соответствует принятому постоянному значению дисперсии $\sigma = 80$ км/с при $r_h \lesssim r \lesssim 100$ пс и чёрной дыре массы $3 \cdot 10^6 M_{\odot}$. Штриховая линия из [47] соответствует чёрной дыре массы $2 \cdot 10^6 M_{\odot}$, что меньше принятого значения.

1.4 Эволюция распределения звёзд и тёмной материи в окрестности центральной чёрной дыры

Принято считать, что в центре большинства галактик находятся сверхмассивные чёрные дыры с массами от 10^6 до $10^9 M_{\odot}$ [7, 47]. В контексте исследования тёмной материи они представляют особенный интерес по той причине, что плотность тёмной материи в окрестности чёрной дыры осо-

бенно велика.

В настоящее время наиболее популярными кандидатами на роль тёмной материи являются т.н. слабо взаимодействующие тяжёлые частицы (WIMPs), среди которых чаще всего рассматриваются нейтралино – суперсимметричные партнёры нейтральных хиггсовских бозонов [3, 49]. Основным интересом в изучении тёмной материи в окрестности чёрных дыр связан с возможностью косвенного её обнаружения по аннигиляционному излучению, которое пропорционально квадрату плотности тёмного вещества [50, 51, 52].

Одна из первых попыток сделать оценку величины излучения была сделана в [53], где плотность тёмной материи в окрестности чёрной дыры вычислялась в приближении адиабатического роста массы чёрной дыры. В этом случае, как следует из (2.25) при $\gamma_b = 3$, соответствующем кулоновскому потенциалу чёрной дыры, показатель степени профиля плотности тёмной материи в окрестности чёрной дыры равен $\gamma'_d = (9 - 2\gamma_d)/(4 - \gamma_d)$, т.е. меняется в пределах $2.25 \div 2.5$ при $0 \leq \gamma_d < 2$. Такой крутой профиль получил название “spike”. Отметим, что при $\gamma'_d \geq 1.5$ полная мощность аннигиляционного излучения, пропорциональная $\int_{r_{min}}^{r_{max}} \rho^2(r) 4\pi r^2 dr$ расходуется на нижнем пределе, т.е. наибольший вклад вносят самые внутренние области. В реальной ситуации минимальный радиус ограничен по крайней мере радиусом Шварцшильда, а максимальная плотность – так называемым аннигиляционным плато: $\rho_a = m_\chi / \langle \sigma_a v_\chi \rangle t_h$, где m_χ – масса частицы, $\langle \sigma_a v_\chi \rangle$ – сечение аннигиляции, t_h – время существования галактики. Тем не менее, при $\gamma'_d > 1.5$ аннигиляционный поток очень сильно возрастает – авторы получили увеличение потока излучения на несколько порядков по сравнению с отсутствием чёрной дыры и сжатия гало вблизи неё.

Последующие исследования подчеркнули наличие ряда факторов, которые выглаживают профиль плотности тёмной материи в центре: возможное смещение чёрной дыры от центра гало тёмной материи [54], выбрасывание частиц тёмной материи из области взаимодействия двойной чёрной

дыры, образованной при слиянии двух галактик [55] и т.д. Впрочем, в других работах утверждается, что эти эффекты существенны далеко не всегда, в частности, в нашей Галактике все крупные слияния произошли ещё до образования чёрной дыры [56, 57]. Эффект асимметрии в распределении барионного вещества также не оказывает существенного влияния на распределение тёмной материи [58].

Ещё один интересный вопрос связан с оценкой количества тёмной материи, поглощённой чёрной дырой. В работе [59] утверждалось, что при наличии пика в распределении тёмной материи чёрная дыра растёт очень быстро за счёт её поглощения, но при этом не принималось во внимание обратное влияние чёрной дыры на распределение тёмной материи, т.е. захват частиц с моментами, меньшими критического ($L_g = 2cr_g$, где r_g – радиус Шварцшильда). Таким образом, подразумевалось, что частицы очень быстро перемешиваются в фазовом пространстве, и всегда заполняют область $L < L_g$. Аналогичная оценка поглощения тёмной материи была сделана в [60]. Во многом эти работы были мотивированы желанием объяснить корреляционную зависимость между массой чёрной дыры M_{bh} и дисперсией скоростей звёзд в балдже σ^2 : $M_{bh} \propto \sigma^{4\div 5}$ [47, 61].

Более корректная оценка роста чёрной дыры за счёт поглощения тёмной материи была сделана в [62, 63]. При наличии затравочной чёрной дыры в центре распределения тёмной материи она поглощает частицы с моментами, меньшими L_g , и если учесть это в функции распределения тёмной материи, то рост чёрной дыры оказывается ограниченным, а полная масса поглощённых частиц много меньше затравочной массы чёрной дыры. Таким образом, прямое поглощение частиц не приводит к заметному росту чёрной дыры, но вносит существенную анизотропию в распределение тёмного вещества – частицы с малыми моментами исчезают. Это обстоятельство редко принимается во внимание в расчётах.

Дальнейшие исследования эволюции тёмной материи в центре галак-

тики связаны с рассмотрением процессов релаксации, которые изменяют распределение тёмного вещества.

Релаксация вследствие гравитационного рассеяния хорошо изучена применительно к звёздам (см., например, [33], глава 8). Из-за гравитационного притяжения при пролёте звёзд друг мимо друга происходит диффузия звёзд в пространстве энергий и угловых моментов. Стационарным состоянием, как правило, является изотропное распределение по моментам и некоторое распределение по энергиям, зависящее от формы гравитационного потенциала.

Задача о распределении звёзд в окрестности массивного компактного объекта (чёрной дыры) была подробно разработана в 1970-х годах в работах [64, 65, 66, 67, 68, 69] применительно к чёрным дырам промежуточных масс в центрах шаровых скоплений. Характерное время релаксации в плотных шаровых скоплениях невелико, поэтому можно считать распределение звёзд вокруг чёрной дыры установившимся и квазистационарным и искать решение стационарной задачи. При этом роль чёрной дыры заключается, во-первых, в определении гравитационного потенциала, а во-вторых, в

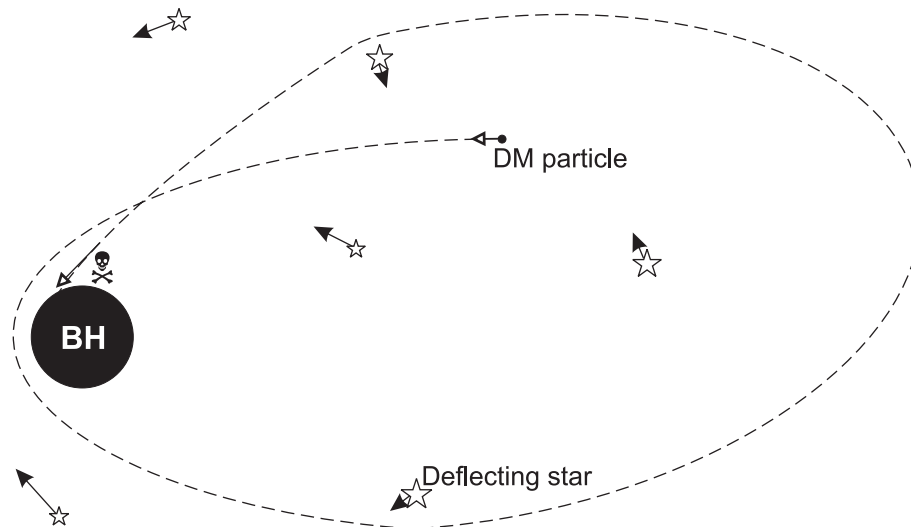


Рис. 1.4: Схема процесса гравитационного рассеяния. Частица тёмной материи на эллиптической орбите в результате взаимодействия со звёздами теряет угловой момент и попадает в чёрную дыру при следующем пролёте перигея.

поглощении звёзд, перицентр орбит которых меньше радиуса приливного разрушения. Это могут быть как звёзды на очень близких к чёрной дыре орбитах (с большой по модулю отрицательной полной энергией, близкой к минимальной энергии последней устойчивой круговой орбиты), так и звёзды на достаточно вытянутых орбитах с произвольной энергией, но малым угловым моментом. Таким образом, очевидно, что распределение звёзд по моменту не может быть изотропным в присутствии чёрной дыры, т.к. появляется т.н. “конус потерь”, включающий звёзды с угловым моментом, меньшим L_g (название пришло из аналогичной задачи в физике плазмы). Релаксация звёзд по моменту приводит к появлению потока звёзд в направлении малых моментов, а распределение по моментам приобретает логарифмический вид [66]. Однако для достаточно больших энергий звезды (существенно больших, чем минимальная энергия) отношение L_g к максимальному угловому моменту круговой орбиты невелико, и распределение по моментам почти однородно (кроме близких к L_g значений). Распределение же по энергиям определяется коэффициентом диффузии по энергии и имеет вид $f(E) \propto E^{1/4}$ [64, 66]. При этом поглощаются в основном звёзды с малыми моментами, т.е. диффузия по моментам играет определяющую роль в поглощении. Для каждого значения энергии можно подсчитать темп поглощения звёзд с малыми моментами и добавить этот член, определяющий потери, в уравнение диффузии по энергии, таким образом сводя задачу к квазиодномерной. Тем не менее, поскольку коэффициенты диффузии зависят от значений энергии и момента, то точное решение задачи требует рассмотрения полного двумерного уравнения Фоккера-Планка для пространства энергии и момента. Численное интегрирование уравнения Фоккера-Планка было сделано в работе [67] для стационарного распределения звёзд в шаровом скоплении; результаты относительно темпа поглощения и формы распределения близки к полученным аналитическими расчётами [66].

Описанная теория применялась и к ядрам галактик (см., например, [70, 71, 72, 73, 74]). Сложность, однако, в том, что в ядрах галактик времена релаксации обычно сравнимы с хаббловским, поэтому применимость стационарной теории под сомнением. Кроме того, стационарная теория не учитывает рост массы чёрной дыры и связанное с этим изменение распределения звёзд. Задача в такой постановке рассматривалась в [75], причём определяющим процессом являлась одномерная диффузия по моментам; влияние диффузии по энергии не учитывалось. Согласно расчётам, рост массы чёрной дыры происходит по степенному закону, с показателем степени около $1/2$.

Интегрирование нестационарного уравнения Фоккера-Планка в произвольном потенциале является одним из методов расчёта эволюции шаровых звёздных скоплений. Эта задача сложнее расчёта распределения звёзд вблизи чёрной дыры, так как нужно одновременно вычислять самосогласованный потенциал скопления, а также учитывать распределение звёзд по массам, влияние двойных и тройных звёзд и звёздную эволюцию [76]. Часто в исследованиях шаровых скоплений методом Фоккера-Планка уравнение сводят к одномерному изотропному; двумерное уравнение в пространстве энергии и момента было впервые рассмотрено в [77] и затем только через 15 лет в [78]. Чаще всего диффузию по энергии считают с использованием усреднённого по моментам коэффициента диффузии по энергии, хотя ещё в [79] было отмечено, что время релаксации отличается для радиальных и круговых орбит. Как будет видно из дальнейшего, в наших расчётах коэффициенты диффузии существенно зависят от энергии и момента.

Аналогичное явление релаксации справедливо и для тёмной материи, только её частицы рассеиваются не друг на друге, а на звёздах. Кинетическое уравнение для эволюции распределения тёмной материи в центре галактики было рассмотрено в [63] и затем в [10, 11]. В обеих работах начальная функция распределения бралась в виде (2.7а), и основным эффек-

том являлась диффузия по моменту (в работе [10] влияние диффузии по энергии было оценено как незначительное). При этом основная масса захваченных частиц приходилась на область вне зоны влияния чёрной дыры.

В работе [80], напротив, основным процессом считалась релаксация по энергии, но кинетическое уравнение, в сущности, не решалось – из соображений отсутствия передачи энергии было принято $\partial f / \partial E = 0$ и получен соответствующий ей профиль плотности $\rho \propto r^{-3/2}$.

В работах [57] и [81] эволюция тёмной материи вблизи чёрной дыры рассчитывалась с помощью интегрирования по времени уравнения Фоккера-Планка для диффузии по энергии с членом потерь из-за поглощения частиц с малыми моментами, аналогично [66]. Во второй из этих работ дополнительно вводились потери на аннигиляцию (делался расчёт для различных сечений аннигиляции). Было показано, что в достаточно широком диапазоне параметров первоначальный пик плотности тёмной материи практически исчезает к настоящему моменту. К недостаткам этой работы можно отнести то, что расчёт диффузии производился только для области влияния чёрной дыры, масса чёрной дыры была фиксирована, начальное распределение по моментам бралось изотропным, а коэффициент диффузии по энергии брался в усреднённом по моментам виде.

В данной работе описанный метод расчёта обобщён для различных форм начальной функции распределения, зависимости массы чёрной дыры от времени и более широкой пространственной области (балдж и область влияния чёрной дыры). Также более подробно исследовано отличие решений для двумерной и квазиодномерной диффузии. Эти процессы будут рассмотрены в главах 3 и 4.

Глава 2

Начальные условия и барионное сжатие

В этой главе мы введём используемые в дальнейших расчётах модели начального строения гало тёмной материи, вычислим ряд величин, относящихся к распределению звёзд и тёмной материи и их движению в гравитационном потенциале, а также рассмотрим явление барионного сжатия.

2.1 Параметры распределения и движения звёзд и тёмной материи

Мы будем рассматривать все процессы в сферически симметричном случае, поэтому выбор переменных достаточно очевиден – это угловой момент L и энергия E , которые являются интегралами движения в постоянном потенциале $\Phi(r)$. Если гравитационный потенциал меняется, но не слишком быстро (по сравнению с орбитальным периодом частиц), то в этом случае сохраняющейся величиной будет не энергия, а радиальное действие

$$I(E, L) = \frac{1}{2\pi} \oint v_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} \sqrt{2[E - \Phi(r)] - \frac{L^2}{r^2}} dr, \quad (2.1)$$

являющееся в этих условиях адиабатическим инвариантом. (v_r – радиальная скорость, r_- и r_+ – пери- и апоцентр орбиты тела).

Далее, плотность вещества (звёзд либо тёмной материи) и гравитационный потенциал в интересующих нас областях мы будем задавать в степенном виде:

$$\rho(r) = \mathcal{K} r^{-\gamma}, \quad M(r) = \frac{4\pi \mathcal{K} r^{3-\gamma}}{3-\gamma}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \frac{G M(r)}{(2-\gamma)r}, \quad \gamma \neq 2, \\ \Phi(r) &= \frac{G M(r)}{r} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad \gamma = 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Кулоновский потенциал чёрной дыры соответствует случаю $\gamma = 3$, при этом $M(r) = M_{bh} = \text{const}$.

Радиальное действие в степенном потенциале хорошо аппроксимируется выражением (см. также [53])

$$I(E, L) = J(E) - \varkappa L, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \varkappa(\gamma) = \frac{(2-\gamma/2)^{\frac{4-\gamma}{4-2\gamma}}}{\sqrt{2\pi} (2-\gamma)^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2-\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2-\gamma} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (2.5)$$

$$J(E) = \varkappa \left(\frac{2-\gamma}{2-\gamma/2}\right)^{\frac{2-\gamma/2}{2-\gamma}} \left(\frac{E^{2-\gamma/2} r}{G M(r)}\right)^{\frac{1}{2-\gamma}} r. \quad (2.6)$$

\varkappa меняется от $\sqrt{e/2\pi} \approx 0.66$ для $\gamma = 2$ до $\sqrt{3}/\pi \approx 0.55$ для $\gamma = 1$, а для кулоновского потенциала чёрной дыры ($\gamma = 3$) $\varkappa = 1$.

Выражения для $I(E, L)$ и других параметров движения будут приведены в разделе 2.1.4, после задания распределения звёзд.

2.1.1 Две модели функции распределения тёмной материи

Для наших целей функцию распределения частиц удобно записывать не в переменных координата-скорость $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}$, а в орбитально-усреднённом виде, т.е. через интегралы движения. В данном случае это переменные действие-угол, то есть I – радиальное действие, L – угловой момент и L_z – его проекция на одну из осей, и соответствующие им углы. В силу сферической симметрии функция распределения не зависит от L_z , и рассматрива-

емые нами процессы не вносят эту зависимость, поэтому L_z выпадает из уравнений. От угловых переменных, т.е. от орбитальной фазы, функция распределения также не зависит. Отметим, что переменные действие-угол являются каноническими.

Нас будут интересовать процессы, происходящие в центральной части галактики. Следовательно, на интересующих нас масштабах мы можем считать, что профиль плотности имеет степенной вид (1.1), т.к. в реальных гало, соответствующих масштабу галактики, он начинает меняться на расстояниях, примерно на порядок больших, чем радиус балджа. Степень анизотропии в начальном распределении мы также примем постоянной в этой области. В этих условиях функция распределения также будет иметь степенную зависимость от энергии [33]. Зависимость от углового момента может быть различной, и в связи с этим мы рассмотрим две модели:

$$f(I, L) = f_0 I^\mu \delta(L^2 - l_0^2 I^2) \quad (\text{модель А}), \quad (2.7a)$$

$$f(I, L) = f_0 (I + \varkappa L)^\mu L^{-2\beta} \quad (\text{модель Б}). \quad (2.7b)$$

В обоих случаях пространственная плотность тёмной материи является степенной функцией от радиуса (1.1), $1 \leq \gamma_d < 2$. Величина $I + \varkappa L$ зависит только от энергии частицы (2.4). Таким образом, вторая модель, часто используемая в аналитических расчётах [17, 82], представляет собой простейшее обобщение изотропной степенной функции распределения на случай произвольной радиальной анизотропии. В первой же модели $L = l_0 I$, то есть функция распределения также имеет степенную зависимость от энергии, а угловой момент частицы однозначно связан с I и, следовательно, с E . Эта модель была предложена в [4]. Таким образом, две модели отличаются распределением по угловому моменту: в первом случае оно “узкое”, а во втором – “широкое”.

Связь плотности с функцией распределения даётся выражением

$$\rho(r) = \int_0^\infty v^2 dv 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(I(E, L), L), \quad E = \frac{v^2}{2} + \Phi(r), \quad L = v r \sin \theta \quad (2.8)$$

(θ – угол между радиус-вектором и направлением скорости).

В расчётах удобно перейти к безразмерной переменной $\omega = v/v_c(r)$, где $v_c = \sqrt{GM(r)/r}$ – скорость на круговой орбите данного радиуса. Тогда

$$I = \varkappa v_c r p(\omega) \left(1 - \frac{\omega}{p(\omega)} \sin \theta \right), \quad (2.9)$$

$$p(\omega) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2-\gamma/2} \left(1 + (2-\gamma) \frac{\omega^2}{2} \right) \right]^{\frac{2-\gamma/2}{2-\gamma}}, & \gamma < 2 \\ \exp\left(\frac{\omega^2-1}{2}\right) & \gamma = 2 \\ (2-\omega^2)^{-1/2} & \gamma = 3 \end{cases} \quad (2.10)$$

Усреднение любой величины X по скоростям в данной точке r запишется как

$$\langle X \rangle = \frac{2\pi v_c(r)^3}{\rho(r)} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^\pi \sin \theta d\theta f(I(E, L), L) X$$

(в частности, выражение для плотности получается при $X \equiv 1$).

В модели А

$$\langle X \rangle \rho = 2\pi f_0 v_c(r)^{\mu+1} r^{\mu-2} l_0^{-\mu} \int_{\omega_-}^{\omega_+} d\omega \frac{(\omega \sin \theta_0)^\mu}{\cos \theta_0} X(\omega, \theta_0), \quad (2.11a)$$

$$\sin \theta_0(\omega) = \frac{\varkappa l_0}{1 + \varkappa l_0} \frac{p(\omega)}{\omega}, \quad \sin \theta_0(\omega_\pm) = 1.$$

В модели Б

$$\begin{aligned} \langle X \rangle \rho &= 2\pi f_0 v_c(r)^{3-2\beta+\mu} r^{\mu-2\beta} \varkappa^\mu \int_0^\infty d\omega \omega^{2-2\beta} p(\omega)^\mu \times \\ &\times \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{1-2\beta} \left[1 - \left(1 - \frac{\varkappa(\gamma_d)}{\varkappa(\gamma)} \right) \frac{\omega}{p(\omega)} \sin \theta \right]^\mu X(\omega, \theta). \end{aligned} \quad (2.11b)$$

До образования галактики $\gamma = \gamma_d$. Подставляя $X \equiv 1$ и приравнявая степени при r в левой и правой части, находим

$$\mu = \frac{2 - \gamma_d}{4 - \gamma_d} \quad \text{в модели А,} \quad (2.12a)$$

$$\mu = \frac{2 - \gamma_d}{4 - \gamma_d} - 2(1 - \beta) \quad \text{в модели Б.} \quad (2.12b)$$

Оттуда же получаем связь нормировок функции распределения f_0 и плотности \mathcal{K} . Отметим, что при $\beta \rightarrow \gamma - 1$ в модели А и $\beta \rightarrow \gamma_d/2$ в модели Б нормировка формально расходится, что на практике означает невозможность пренебрежения ограниченностью степенного профиля гало. В этом случае в плотность во внутренней части основной вклад вносят частицы с неограниченно удалённых расстояний.

2.1.2 Анизотропия скоростей частиц тёмной материи

В модели А мы можем посчитать показатель анизотропии Бинни [33], определяемый как $\beta = 1 - \frac{\sigma_t^2}{2\sigma_r^2}$, где $\sigma_{r,t}^2$ – дисперсии скоростей в радиальном и тангенциальном направлении. Подставив $v_r^2 = (v \cos \theta_0)^2$ и $v_t^2 = (v \sin \theta_0)^2$ вместо X в (2.11а), получим зависимость $\beta(\gamma_d, l_0)$ (рис. 2.1). Её можно аппроксимировать выражением

$$\beta = \gamma_d - 1 - 0.27 l_0 \gamma_d . \quad (2.13)$$

Таким образом, при заданном l_0 связь между β и γ_d носит линейный характер (1.4), хотя коэффициенты в соотношении другие, чем в работе [34].

В модели Б функция распределения имеет вид $f(E, L) = f_0(E) L^{-2\beta}$, и следовательно, параметр анизотропии скоростей в точности равен β [33].

Отметим, что в модели Б при $\gamma_d - 1 < \beta < \gamma_d/2$ величина дисперсии скоростей начинает определяться радиусом обрезания степенного профиля гало (т.е. интегрирование в (2.11b) с $X = v_{r,t}^2$ надо осуществлять в интервале $[0.. \omega_{max}]$, где $\omega_{max} = \sqrt{(E_{max} - \Phi(r))/v_c^2(r)}$). В этом случае $\sigma_{r,t}^2 \propto r^{\gamma-2\beta}$, а не $r^{2-\gamma}$, как в полностью безмасштабном случае. Такая ситуация рассматривалась в [82], где было доказано общее утверждение о верхнем пределе $\beta \leq \gamma/2$ для наклона профиля плотности и показателя анизотропии в центре гало. Причём в случае $\beta > \gamma - 1$ он определяется ограниченностью в пространстве области постоянного γ , что и видно в нашей модели Б.

В модели А такая ситуация невозможна, т.к. в дисперсию скоростей в

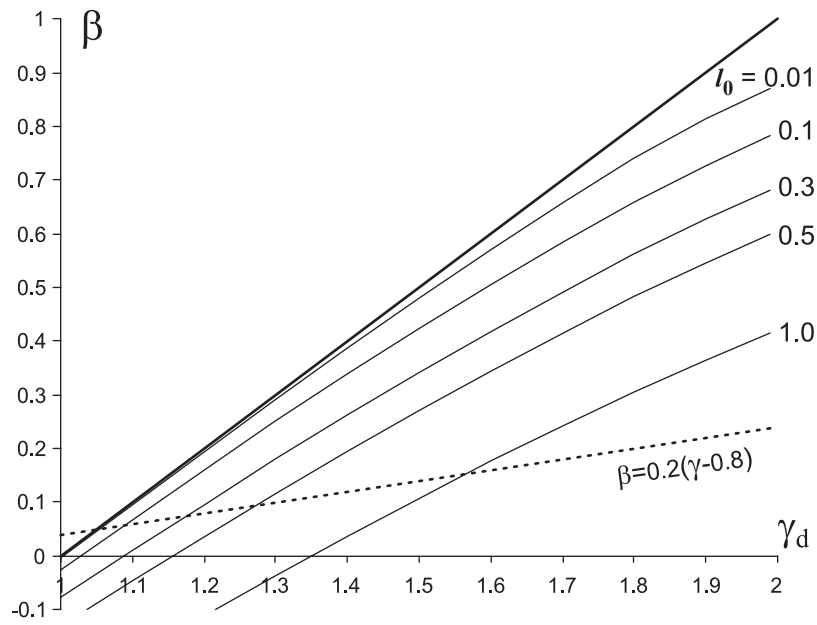


Рис. 2.1: Связь показателя анизотропии β с наклоном профиля плотности γ_d в модели А:

тонкие линии – начальная анизотропия для различных значений параметра l_0 ;

толстая линия – верхний предел $\beta = \gamma_d - 1$;

точечная линия – эмпирическое соотношение из работы Hansen & Moore [34].

данной точке вносят вклад частицы в ограниченном диапазоне энергий (т.к. верхний предел интегрирования в (2.11а) не ∞ , а ω_+), и следовательно, для достаточно малых радиусов ограниченность гало не может влиять на дисперсию скоростей. Т.е. мы попадаем в область применимости рассуждений работы [31], которые приводят к ограничению $\beta < \gamma - 1$.

Отметим ещё, что фазовая плотность имеет степенной вид (1.2) с показателем $\alpha = 3 - \gamma_d/2$ в модели А и в модели Б при $\beta < \gamma_d - 1$, и $\alpha = \frac{5}{2}\gamma_d - 3\beta$ в модели Б при $\gamma_d - 1 < \beta < \gamma_d/2$. В первом случае α слегка превышает 2, как и в ESIM модели (Extended secondary infall model), рассмотренной в [17]; во втором случае соотношение между β и γ_d в центре такое же, как в работе [32].

2.1.3 Функция распределения звёзд

Перейдём теперь к описанию распределения звёзд в балдже и вблизи чёрной дыры. Как было сказано в разделе 1.3, мы будем считать профиль плотности звёзд в балдже степенным (2.2) с показателем степени $\gamma_b \leq 2$.

Зададим, в соответствии с этим, гравитационный потенциал звёзд в виде

$$\Phi_\star(r) = \begin{cases} 2\sigma^2 \ln \frac{r}{r_1} & \text{для } \gamma_b = 2, \\ 2\sigma_1^2 \frac{\gamma_b - 1}{2 - \gamma_b} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{2 - \gamma_b} - \sigma_1^2 \frac{6 - \gamma_b}{4 - 2\gamma_b} & \text{для } \gamma_b < 2, \end{cases} \quad (2.14)$$

где r_1 – некоторый произвольно выбранный нормировочный радиус. Полный потенциал (звёзд и чёрной дыры) даётся выражением

$$\Phi(r) = \Phi_\star(r) - \sigma_h^2 \frac{r_h}{r}. \quad (2.15)$$

Мы примем r_1 равным r_h в настоящий момент времени (2 пс). В расчётах с меняющейся во времени массой чёрной дыры r_h также меняется, а r_1 – заданная раз и навсегда константа.

Введём ещё величину $\Phi_h = \Phi_\star(r_h)$. Функция распределения звёзд в балдже ($E_\star > \Phi_h$) для изотермического случая ($\gamma_b = 2$) имеет вид

$$f_\star(E_\star) = F_b \exp\left(-\frac{E_\star}{\sigma^2}\right), \quad F_b = \left[(2\pi)^{5/2} \sigma G r_1^2\right]^{-1}, \quad (2.16)$$

а для случая произвольного степенного профиля $1 < \gamma_b < 2$

$$\begin{aligned} f_\star(E_\star) &= F_b \left(1 + \frac{4 - 2\gamma_b}{6 - \gamma_b} \frac{E_\star}{\sigma_1^2}\right)^{-\frac{6 - \gamma_b}{4 - 2\gamma_b}}, \quad F_b = \left[(2\pi)^{5/2} \sigma_1 G r_1^2\right]^{-1} \times \\ &\times (\gamma_b - 1)(3 - \gamma_b) \left(\frac{4 - 2\gamma_b}{6 - \gamma_b}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{6 - \gamma_b}{4 - 2\gamma_b}\right) / \Gamma\left(\frac{\gamma_b}{2 - \gamma_b}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Функция распределения звёзд в области влияния чёрной дыры (для полной энергии звёзд $E_\star < \Phi_h$) имеет вид

$$f_\star(E_\star) = F_c \left(\frac{\Phi_h - E_\star}{\sigma_h^2}\right)^{\gamma_c - \frac{3}{2}}, \quad (2.18)$$

$$F_c = \frac{\rho_{\star,h}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_h^3} \frac{\Gamma(\gamma_c + 1)}{\Gamma(\gamma_c - \frac{1}{2})} = \left[(2\pi)^{5/2} \sigma_h G r_h^2\right]^{-1} \times (3 - \gamma_b) \frac{\Gamma(\gamma_c + 1)}{\Gamma(\gamma_c - \frac{1}{2})}.$$

В главах 3 и 4 мы будем использовать $\gamma_b = 2$, $\gamma_c = 3/2$.

2.1.4 Параметры движения

Вычислим теперь орбитальные параметры, используемые в дальнейших расчётах.

Угловой момент L_c частицы на круговой орбите с энергией E равен

$$\text{в кулоновском потенциале } L_c^2 = \frac{(GM_{bh})^2}{-2(E - \Phi_h)}, \quad (2.19a)$$

$$\text{в изотермическом потенциале } L_c^2 = 2\sigma^2 r_1^2 \exp\left(\frac{E}{\sigma^2} - 1\right), \quad (2.19b)$$

$$\text{в степенном } L_c^2 = \left(\frac{2-\gamma_b}{2-\gamma_b/2}\right)^{\frac{4-\gamma_b}{2-\gamma_b}} (2\gamma_b - 2)^{-\frac{2}{2-\gamma_b}} r_1^2 E \left(\frac{E}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{2}{2-\gamma_b}}. \quad (2.19c)$$

Удобно ввести переменную $x = r/r_{max}(E)$, где $r_{max}(E)$ – апоцентр радиальной орбиты с энергией E :

$$\text{в кулоновском потенциале } r_{max} = -\frac{GM_{bh}}{E - \Phi_h} = -\frac{r_h \sigma_h^2}{E - \Phi_h}, \quad (2.20a)$$

$$\text{в изотермическом потенциале } r_{max} = r_1 \exp\left(\frac{E}{2\sigma^2}\right), \quad (2.20b)$$

$$\text{в степенном } r_{max} = r_1 \left(\frac{E}{2\sigma_1^2} \frac{2 - \gamma_b}{\gamma_b - 1}\right)^{\frac{1}{2-\gamma_b}}. \quad (2.20c)$$

Если вместо L ввести переменную $R = L^2/L_c^2(E)$, то пери- и апоцентр орбиты с энергией E будут задаваться следующими выражениями: $r_{\pm} \equiv x_{\pm} r_{max}(E)$, где x_{\pm} равны

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - R}\right), \quad (2.21a)$$

$$x_+ = \exp\left[\frac{1}{2}W_0\left(-\frac{R}{e}\right)\right], \quad x_- = \exp\left[\frac{1}{2}W_{-1}\left(-\frac{R}{e}\right)\right], \quad (2.21b)$$

$$1 = x_{\pm}^{2-\gamma_b} + \frac{R}{x_{\pm}^2} \left(1 - \frac{\gamma_b}{2}\right) \left(2 - \frac{\gamma_b}{2}\right)^{-\frac{4-\gamma_b}{2-\gamma_b}}, \quad (2.21c)$$

в кулоновском, изотермическом и степенном потенциале соответственно. Здесь $W_i(x)$ – i -я ветвь функции Ламберта, определённой соотношением $x = W \exp(W)$.

Как было отмечено выше, радиальное действие с хорошей точностью представляется в виде

$$I(E, L) = J(E) \cdot [1 - L/L_c(E)] = J(E) \cdot (1 - \sqrt{R}) , \text{ где}$$

в кулоновском потенциале

$$J(E) = \frac{G M_{bh}}{\sqrt{-2(E - \Phi_h)}} , \quad (2.22a)$$

в изотермическом потенциале

$$J(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma r_{max}(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma r_1 \exp\left(\frac{E}{2\sigma^2}\right) , \quad (2.22b)$$

в степенном потенциале

$$J(E) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_1 r_1 \left(1 + \frac{E}{\sigma_1^2} \frac{4 - 2\gamma_b}{6 - \gamma_b}\right)^{\frac{4-\gamma_b}{4-2\gamma_b}} \times \quad (2.22c)$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2-\gamma_b}\right) \sqrt{6 - \gamma_b}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2-\gamma_b}\right) 2(2 - \gamma_b)^{3/2}} .$$

2.2 Барийонное сжатие

2.2.1 Степень сжатия

Перейдём к рассмотрению барийонного сжатия для выбранных двух моделей начального распределения тёмной материи. Как было сказано выше, плотность барийонов возьмём в виде степенного профиля

$$\rho_*(r) = \mathcal{K}_* r^{-\gamma_b} . \quad (2.23)$$

При этом будем считать, что бóльшая часть массы после сжатия сосредоточена в барийонной составляющей. Тогда, согласно (1.5), при расчёте по методу Блюменталья радиус орбиты частицы r' после сжатия связан с её начальным радиусом r соотношением

$$r' = r^{\frac{4-\gamma_d}{4-\gamma_b}} \left(\frac{3 - \gamma_b}{3 - \gamma_d} \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}_*}\right)^{\frac{1}{4-\gamma_b}} , \quad (2.24)$$

Профиль плотности после сжатия будет также степенным с показателем степени

$$\gamma'_d = \frac{3\gamma_b + \gamma_d - \gamma_b\gamma_d}{4 - \gamma_d}. \quad (2.25)$$

Метод Блюменталья даёт следующее изменение массы внутри данного радиуса:

$$\eta_{Blum} = \frac{M'_{dm}(R)}{M_{dm}(R)} = \left(\frac{M_*(R)}{M_{dm}(R)} \right)^{\frac{3-\gamma_d}{4-\gamma_d}}. \quad (2.26)$$

Для наших моделей, введённых в разделе 2.1.1, мы имеем возможность непосредственно проверить различие профиля плотности после сжатия с предсказываемым по методу Блюменталья. Поскольку функция распределения записана в переменных, являющихся инвариантами при адиабатическом сжатии, то она остаётся неизменной. Для получения профиля плотности после сжатия надо всего лишь подставить новый потенциал в формулу (2.8).

Плотность после сжатия в наших моделях будет иметь степенной вид с тем же показателем степени, как и в методе Блюменталья (2.25), а вот нормировка плотности будет иной. Введём величину η – изменение массы внутри заданного радиуса. Обозначив значение интеграла в (2.11) до сжатия как Z_1 , а после как Z_2 , получим

$$\eta = \frac{M'_{dm}(R)}{M_{dm}(R)} = \frac{4 - \gamma_b}{4 - \gamma_d} \left(\frac{\varkappa(\gamma_b)}{\varkappa(\gamma_d)} \right)^\mu \frac{Z_2}{Z_1} \left(\frac{M_*(R)}{M_{dm}(R)} \right)^{\frac{3-\gamma_d}{4-\gamma_d}}. \quad (2.27)$$

Оказывается, что $\eta < \eta_{Blum}$, причём разница тем больше, чем меньше γ_b и чем больше β (рис. 2.2), в полном соответствии с результатами работ [37, 38, 39].

(Отметим, что при приближении β к $\gamma_d - 1$ в модели А и $\gamma_d/2$ в модели Б на нормировку плотности всё больше влияет радиус обрезания степенного профиля, так что значения η оказываются заниженными).

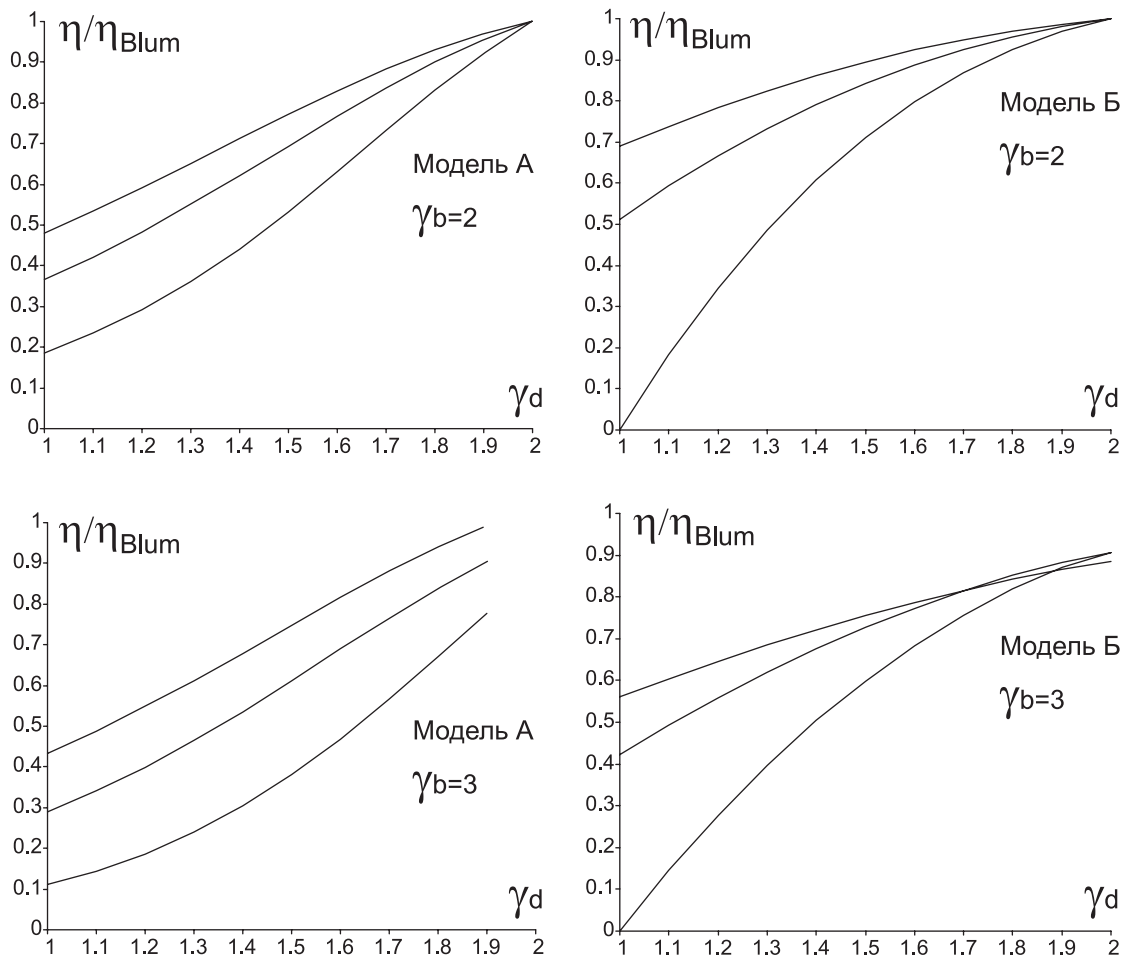


Рис. 2.2: Величина η/η_{Blum} – отношение нормировки плотности в нашей модели к нормировке в стандартной модели Блюменталю адиабатического сжатия, в зависимости от показателя степени γ_d исходного профиля плотности.

Левая колонка – модель А, $l_0 = 0.1, 0.3$ и 0.5 (снизу вверх);

Правая колонка – модель Б, $\beta = 0.5, 0.25$ и 0 (снизу вверх).

Верхний ряд – для изотермического потенциала балджа ($\gamma_b = 2$), нижний – для кулоновского потенциала чёрной дыры ($\gamma_b = 3$).

2.2.2 Тёмная материя в ядре нашей Галактики

Проведём количественный расчёт массы тёмной материи в балдже, а точнее, в пределах радиуса 1 кпс, до и после адиабатического сжатия. Поскольку тёмная материя сосредоточена в основном на периферии галактики, то для получения оценки её плотности в пределах балджа надо экстраполировать профиль плотности к малым радиусам. Плотность тёмной материи на радиусе $R_\odot = 8$ кпс, соответствующем расстоянию от Солнца до центра

Галактики, оценивается по её вкладу в кривую вращения и считается равной $\rho_{\odot} \approx 0.3 \text{ ГэВ/см}^3 \approx 8 \cdot 10^{-3} M_{\odot}/\text{пс}^3$ [49], с фактором неопределённости порядка двух. Чтобы получить начальную массу тёмной материи в пределах 1 кпс M_{dm} , мы экстраполируем профиль плотности (1.1) внутрь R_{\odot} . В зависимости от показателя степени γ_d , масса тёмной материи в пределах 1 кпс будет составлять от $4 \cdot 10^8 M_{\odot}$ для $\gamma_d = 1$ до $3 \cdot 10^9 M_{\odot}$ для $\gamma_d = 1.8$. Показатель степени барионов γ_b , как указывалось выше, примем равным 1.8, а масса барионов в пределах 1 кпс составляет $6 \cdot 10^9 M_{\odot}$.

Вычислим M'_{dm} и $\eta = M'_{dm}/M_{dm}$ согласно (2.27) (рис. 2.3). Как уже говорилось, $\eta < \eta_{Blum}$ – коэффициента, вычисленного по методу Блюменталля, причём отличие тем более заметно, чем меньше показатель степени γ_d начального профиля плотности тёмной материи, и чем более радиально анизотропны скорости частиц. В зависимости от параметров, масса тёмной материи в балдже увеличивается в $1.5 \div 4$ раза (верхний ряд рис. 2.3), и составляет $1/6 \div 1/2$ от массы барионов в балдже (нижний ряд). Таким образом, вкладом тёмной материи в потенциал можно пренебречь в центральной части балджа (напомним, что плотность тёмной материи растёт к центру медленнее, чем плотность барионов). Плотность тёмной материи на радиусе $r_h \sim 2$ пс составляет порядка $10^3 \div 10^4 M_{\odot}/\text{пс}^3$, что на $1 - 2$ порядка меньше плотности звёзд на этом радиусе и согласуется с оценками, полученными другими авторами [49, 51].

2.2.3 Изменение показателя анизотропии скоростей

Рассчитаем также и показатель анизотропии скоростей β' после барионного сжатия для наших моделей.

В модели А показатель анизотропии скоростей после сжатия β' оказывается больше, чем до сжатия (рис. 2.4). В то же время, соотношение между β' и γ'_d становится более пологим, приближаясь по наклону к соотношению Hansen & Moogge [34]. Аналогичный эффект можно заметить в этой же ра-

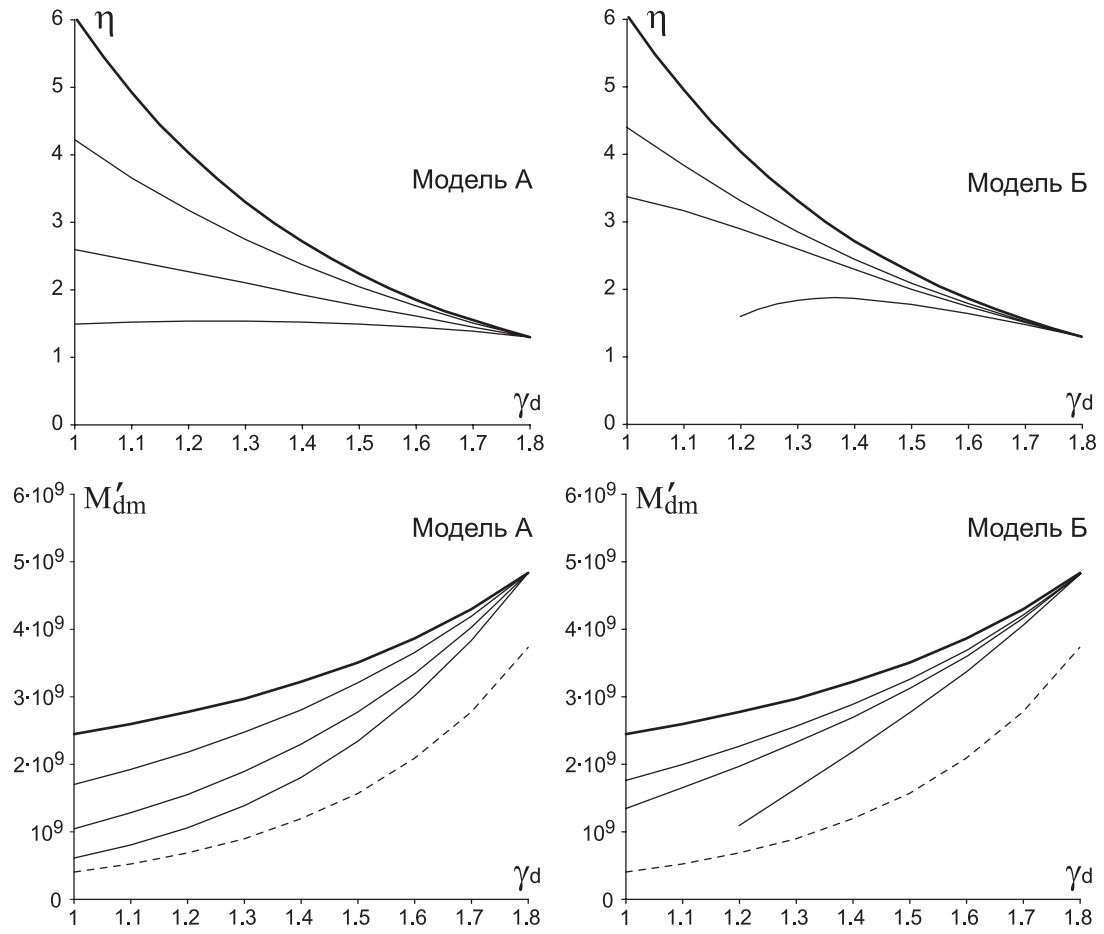


Рис. 2.3: Увеличение массы тёмной материи в пределах балджа (1 кпс).

Верхний ряд – коэффициент увеличения массы $\eta = \frac{M'_{dm}(R)}{M_{dm}(R)}$: жирная линия – по методу Блюменталя, сплошные линии – слева: по модели А с $l_0 = 0.1, 0.3$ и 0.5 (снизу вверх), справа: по модели Б с $\beta = 0.5, 0.25$ и 0 (снизу вверх).

Нижний ряд – масса тёмной материи в пределах балджа: пунктирная линия – начальная масса M_{dm} (до сжатия), жирная линия – рассчитанная по методу Блюменталя, сплошные линии – масса после сжатия M'_{dm} , слева: по модели А с $l_0 = 0.1, 0.3$ и 0.5 (снизу вверх), справа: по модели Б с $\beta = 0.5, 0.25$ и 0 (снизу вверх). Масса барионов в пределах 1 кпс составляет $6 \cdot 10^9 M_\odot$.

боте на рис. 2, если сравнить результаты космологического моделирования (только тёмной материи) с результатами совместного моделирования тёмной материи и охлаждающихся барионов.

Учитывая, что при $\gamma_b = \gamma_d = \gamma'_d$ профиль не меняется, можно аппроксимировать показатель анизотропии следующей формулой:

$$\beta' \approx \beta(\gamma_b) + 0.4(\gamma'_d - \gamma_b). \quad (2.28)$$

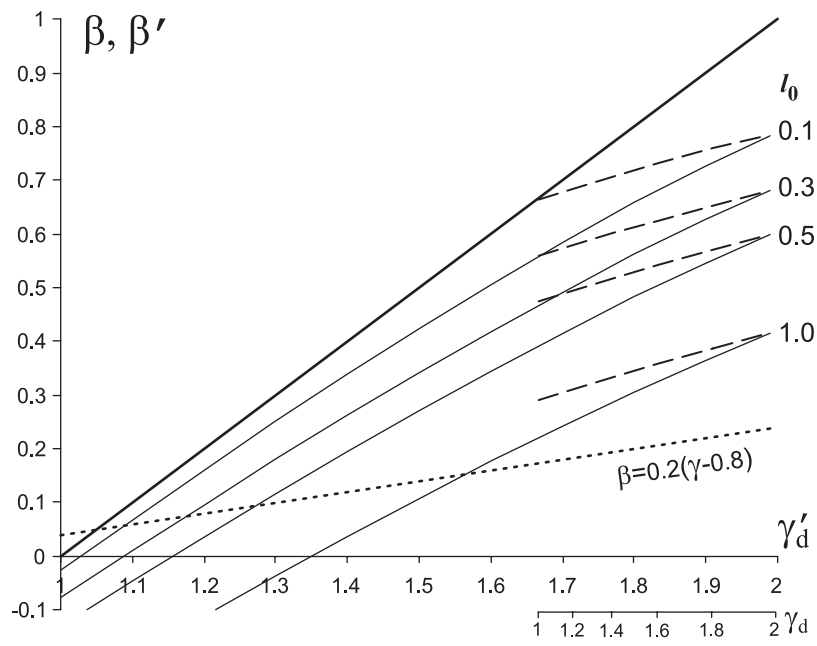


Рис. 2.4: Изменение показателя анизотропии в модели А после адиабатического сжатия. Сплошные линии – начальная анизотропия β для различных значений параметра l_0 в зависимости от начального наклона профиля плотности γ_d ;

Толстая линия – верхний предел $\beta = \gamma_d - 1$ для несжатого гало;

Пунктирные линии – анизотропия β' после адиабатического сжатия (для степенного показателя профиля плотности барионов $\gamma_b = 2$. Линии для соответствующих l_0 до и после сжатия пересекаются при $\gamma_b = \gamma_d$. По горизонтали отложен показатель степени γ_d' профиля плотности тёмной материи после сжатия (γ_d' меняется в диапазоне от $5/3$ для $\gamma_d = 1$ до 2 для $\gamma_d = 2$ согласно формуле (2.25). Соответствующие γ_d отложены внизу на дополнительной оси).

Точечная линия – эмпирическое соотношение из работы Hansen & Moore [34].

В модели Б показатель анизотропии незначительно меняется в сторону уменьшения (максимальная разница $\beta - \beta' \approx 0.04$ при $\gamma_d = 1$, $\beta = 0$). Таким образом, анизотропия скоростей может и уменьшаться, и увеличиваться, в зависимости от детального вида функции распределения по угловому моменту.

Глава 3

Взаимодействие тёмной материи со звёздами ядра галактики и чёрной дырой

3.1 Уравнение диффузии

3.1.1 Орбитально-усреднённое уравнение

Динамика тёмной материи описывается кинетическим уравнением со столкновительным членом Γ :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \Gamma[f]. \quad (3.1)$$

В случае, если характерная частота столкновений много меньше орбитальных частот, можно перейти к усреднённому по орбите уравнению, записав функцию распределения в переменных действие-угол $\{I_i, \phi_i\}$ (в сферически-симметричном случае это I , L , L_z и соответствующие им углы). При этом, поскольку действия являются интегралами движения в отсутствие столкновений, а от углов ϕ_i функция распределения не зависит, то уравнение упрощается до вида

$$\frac{\partial f(I_i, t)}{\partial t} = \Gamma[f]. \quad (3.2a)$$

Обычно дальнейшие упрощения связаны с тем, что мы не учитываем близкие столкновения, которые меняют траекторию частиц на большие углы,

что соответствует пренебрежению членами порядка $1/\ln \Lambda$, где $\ln \Lambda$ – кулоновский логарифм. При этом можно столкновительный член разложить в ряд до второго порядка и получить уравнение Фоккера-Планка [33]:

$$\Gamma[f] = \frac{\partial}{\partial I_i} \left(\mathcal{R}_{ij} \frac{\partial f}{\partial I_j} - \mathcal{R}_i f \right). \quad (3.2b)$$

Величины \mathcal{R}_i и \mathcal{R}_{ij} называются коэффициентами сноса и диффузии соответственно.

При переходе к другим переменным ξ_α уравнение записывается как

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{G}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\mathcal{G} \left[\mathcal{R}'_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} - \mathcal{R}'_\alpha f \right] \right), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{R}'_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial I_i} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial I_j} \mathcal{R}_{ij}, \quad \mathcal{R}'_\alpha = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial I_i} \mathcal{R}_i. \quad (3.4)$$

Здесь якобиан $\mathcal{G} = \det \|\partial I_i / \partial \xi_\alpha\|$ – детерминант матрицы перехода.

3.1.2 Выбор переменных

Обычно от переменных действия $\{I, L, L_z\}$ переходят к переменным $\{E, R\}$, где E – энергия частицы, $R = L^2/L_c^2$ – нормированный квадрат момента (L_c – угловой момент круговой орбиты с данной энергией E (2.19)). Удобно ввести вместо E некоторую безразмерную переменную $Q(E)$ таким образом, чтобы якобиан в уравнении (3.3) был равен константе (в нашем случае, размерности L^3). Легко показать, что величина

$$Q = \frac{L_c^2(E) J(E)}{3(\sigma r_1)^3} \quad (3.5)$$

удовлетворяет заданному условию (здесь $J(E) = I/(1-\sqrt{R})$ (2.22), размерные коэффициенты σ – дисперсия скоростей звёзд и r_1 – нормировочный радиус, описанный в разделе 2.1.3). Действительно, $J(E) = L_c(E) \varkappa(E)$, где величина \varkappa зависит от формы потенциала (2.5): в кулоновском потенциале $\varkappa = 1$, в изотермическом потенциале балджа – $\sqrt{e/2\pi}$, и непрерывно переходит от одного предельного значения к другому в промежуточной

области ($E \sim \Phi_h$). Поскольку задача имеет цилиндрическую симметрию и L_z не входит в уравнения и выражения для коэффициентов диффузии, то уравнение 3.2, исходно записанное в переменных $\{I, L, L_z\}$, можно переписать в цилиндрических координатах. Таким образом, исходный якобиан $\mathcal{G} = 2L$. Якобиан в переменных $\xi_{\mu\nu} = \{Q, R\}$ равен

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}' &= \mathcal{G} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial Q} \frac{\partial I}{\partial R} - \frac{\partial I}{\partial Q} \frac{\partial L}{\partial R} \right) = \\
&= 2L_c \sqrt{R} \left(\frac{\sqrt{R} dL_c/dE - J}{dQ/dE} - \frac{(1 - \sqrt{R}) dJ/dE}{dQ/dE} \frac{L_c}{2\sqrt{E}} \right) = \\
&= (\sigma r_1)^3 \frac{\frac{1}{L_c} \frac{dL_c}{dE} + (1 - \sqrt{R}) \frac{1}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{dE}}{\frac{1}{L_c} \frac{dL_c}{dE} + \frac{1}{3} \frac{1}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{dE}}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

При этом оказывается, что $\frac{1}{L_c} \frac{dL_c}{dE} \gg \frac{1}{\varkappa} \frac{d\varkappa}{dE}$ (для случая изотермического балджа – примерно на порядок), и следовательно, дробь в якобиане близка к единице (максимальное отличие от единицы в переходной зоне между балджем и областью влияния чёрной дыры не превышает нескольких процентов).

Введём ещё безразмерную переменную для энергии: $\epsilon = E/2\sigma^2$. В кулоновской области будет удобно иметь дело со сдвинутой энергией ($E' = E - \Phi_h$ и $\epsilon' = \epsilon - \Phi_h/2\sigma^2$), где Φ_h – значение потенциала, разделяющее область влияния чёрной дыры и остальную часть балджа.

Выпишем асимптотические выражения для $Q(E)$ для изотермического балджа и потенциала чёрной дыры, и точное выражение для переходной области:

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{r_h}{r_1} \right)^3 \frac{1}{24} (-\epsilon')^{-3/2} && \text{в кулоновском потенциале;} \\
Q &= \left(\frac{r_h}{r_1} \right)^3 \frac{2}{3e\sqrt{\pi}} \exp(3\epsilon') && \text{в изотермическом потенциале;} \\
Q &= \left(\frac{r_h}{r_1} \right)^3 (2x^2 + x)^{3/2} \varkappa(\epsilon')/3 && \text{в промежуточной области,} \\
x &= \exp \left(W \left[\frac{1}{4} \exp \left(\frac{1}{2} - \epsilon' \right) \right] - \frac{1}{2} + \epsilon' \right), && W - \text{функция Ламберта,}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\epsilon' = (E - \Phi_h)/2\sigma^2, \quad \varkappa \approx 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\right) (1 + \tanh(\epsilon'/3)).$$

Таким образом, $0 < Q \lesssim 1$ в кулоновской области, и $Q \gtrsim 1$ в балдже, причём очень быстро увеличивается с энергией. (К примеру, условная граница балджа порядка 1 Кпс соответствует $Q \sim 10^7$).

Связь коэффициентов диффузии $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ с $\mathcal{R}'_{\alpha\beta}$ даётся формулами (3.4):

$$D_{QQ} = \mathcal{R}'_{EE} \left(\frac{\partial Q}{\partial E} \right)^2, \quad (3.8)$$

$$D_{QR} = \mathcal{R}'_{EE} \frac{\partial Q}{\partial E} \frac{\partial R}{\partial E} + \mathcal{R}'_{EL} \frac{\partial Q}{\partial E} \frac{\partial R}{\partial L},$$

$$D_{RR} = \mathcal{R}'_{EE} \left(\frac{\partial R}{\partial E} \right)^2 + 2\mathcal{R}'_{EL} \frac{\partial R}{\partial E} \frac{\partial R}{\partial L} + \mathcal{R}'_{LL} \left(\frac{\partial R}{\partial L} \right)^2.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial E} = 3kQ, \quad \frac{\partial R}{\partial E} = -2kR, \quad \frac{\partial R}{\partial L} = 2R/L, \quad (3.9)$$

$$k = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dE} = \frac{1}{L_c} \frac{dL_c}{dE} :$$

в кулоновском потенциале $k = -1/2E'$,

в изотермическом потенциале $k = 1/2\sigma^2$.

Выпишем ещё выражения для периода частицы:

$$T(Q) = 2\pi \frac{r_h}{\sigma} (r_1/r_h)^3 3Q \quad \text{в кулоновском случае,}$$

$$T(Q) = 2\pi \frac{r_h}{\sigma} [(r_1/r_h)^3 3Q]^{1/3} (e/16\pi)^{1/3} \quad \text{в изотермическом случае.} \quad (3.10)$$

3.2 Коэффициенты диффузии

Локальные коэффициенты диффузии $\tilde{\mathcal{R}}'_{\alpha\beta}$ в пространстве $\xi_\alpha = \{E, L\}$ вычислены в [58]:

$$\tilde{\mathcal{R}}'_{EE} = H v^2 (G_0 + G_{3/2}), \quad (3.11a)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}'_{EL} = H L (G_0 + G_{3/2}), \quad (3.11b)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}'_{LL} = H \left[r^2 (G_0 + \frac{3}{2}G_{1/2} - \frac{1}{2}G_{3/2}) - L^2/v^2 \frac{3}{2}(G_{1/2} - G_{3/2}) \right]. \quad (3.11c)$$

Здесь

$$G_0(E, r) = \int_E^{E_\infty} f_\star(E_\star) dE_\star, \quad E_\infty = \begin{cases} \infty & \text{для балджа,} \\ \Phi_h & \text{для центр. области.} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$G_{n/2}(E, r) = \int_{\Phi(r)}^E f_\star(E_\star) dE_\star \left(\frac{v_\star}{v}\right)^n = \int_{\Phi(r)}^E f_\star(E_\star) dE_\star \left(\frac{E_\star - \Phi(r)}{E - \Phi(r)}\right)^{n/2}.$$

$$H = \frac{16}{3}\pi^2 G^2 m_\star \ln \Lambda. \quad (3.13)$$

Коэффициенты сноса $\tilde{\mathcal{R}}'_i$ для тёмной материи содержат множитель m_p/m_\star , где m_p – масса частицы тёмной материи, а m_\star – масса звезды, и поэтому ими можно пренебречь. Это отвечает тому обстоятельству, что частицы тёмной материи в отличие от звёзд не испытывают динамического трения благодаря своей ничтожной массе.

Чтобы получить коэффициенты в уравнении (3.3), нужно локальные коэффициенты диффузии усреднить по орбите частицы:

$$\mathcal{R}'_{\alpha\beta} = \frac{1}{T} \oint \tilde{\mathcal{R}}'_{\alpha\beta} \frac{dr}{v_r}. \quad (3.14)$$

Радиальную координату при усреднении по орбите удобно представить как $r = x r_{max}$, где r_{max} – радиус апоцентра орбиты с данной энергией и нулевым моментом: $\Phi(r_{max}) = E$ (2.20).

3.2.1 Коэффициенты диффузии для балджа

Ограничимся случаем изотермического балджа ($\gamma_b = 2$).

Согласно (2.20), $r_{max} = r_1 \exp(E/2\sigma^2)$, тогда $v_r = 2\sigma \sqrt{-\ln x - R/(2e x^2)}$. Орбитальный период равен $r_{max}/\sigma \cdot \tilde{T}(R)$, где $\tilde{T}(R)$ – слабо меняющаяся величина (от $\sqrt{\pi} \approx 1.77$ для $R = 0$ до 1.91 при $R = 1$). Для упрощения примем $\tilde{T}(R) \approx 1.8$.

Напомним, что изотермическая функция распределения звёзд записывается как $f_\star(E_\star) = F_b \exp(-\frac{E_\star}{\sigma^2})$. Удобно сделать замену $E_\star = 2\sigma^2 s$, $E = 2\sigma^2 \epsilon$.

$$\tilde{G}_0 = \frac{G_0}{2\sigma^2 F_b} = \int_\epsilon^\infty ds \exp(-2s) = \frac{1}{2} \exp(-2\epsilon),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{n/2} &= \int_{\epsilon - \ln x}^{\epsilon} ds \exp(-2s) \left(1 - \frac{\epsilon - s}{\ln x}\right)^{n/2}, \\
\tilde{G}_{1/2} &= \tilde{G}_0 \left(-1 + \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-2 \ln x})}{2 x^2 \sqrt{-2 \ln x}}\right), \\
\tilde{G}_{3/2} &= \tilde{G}_0 \left(-1 + \frac{3\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{-2 \ln x})}{4 x^2 (-2 \ln x)^{3/2}} - \frac{3}{-4 \ln x}\right), \\
\operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.
\end{aligned}$$

Вычисления коэффициентов $\mathcal{R}'_{\alpha\beta}$ дают:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_{EE} &= H F_b/\tilde{T}(R) 4\sigma^4 \exp\left(-\frac{E}{\sigma^2}\right) \mathcal{I}_{EE}(R), \\
\mathcal{R}'_{EL} &= H F_b/\tilde{T}(R) \sqrt{2/e} \sigma^3 r_1 \sqrt{R} \exp\left(-\frac{E}{2\sigma^2}\right) \mathcal{I}_{EL}(R), \\
\mathcal{R}'_{LL} &= H F_b/\tilde{T}(R) \sigma^2 r_1^2 \mathcal{I}_{LL}(R).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{EE} &= \tilde{G}_0^{-1} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{v_r} (-\ln x) \left(\tilde{G}_0 + \tilde{G}_{3/2}\right), \\
\mathcal{I}_{EL} &= \tilde{G}_0^{-1} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{v_r} \left(\tilde{G}_0 + \tilde{G}_{3/2}\right), \\
\mathcal{I}_{LL} &= \tilde{G}_0^{-1} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{v_r} \left(x^2 \left[\tilde{G}_0 + \frac{3}{2}\tilde{G}_{1/2} - \frac{1}{2}\tilde{G}_{3/2}\right] + \frac{3R}{4e \ln x} [G_{1/2} - G_{3/2}]\right).
\end{aligned}$$

Графики функций $\mathcal{I}_{EE}(R)$ и $\mathcal{I}_{EL}(R)$ представлены на рис. 3.1а. Для функций $\mathcal{I}_{\alpha\beta}$ справедливы оценки $\mathcal{I}_{EE} \approx 1.5 R^{-0.43}$, $\mathcal{I}_{EL} \approx 2.5 R^{-0.23}$, $\mathcal{I}_{LL} \approx 1.4$. Таким образом, коэффициент \mathcal{R}'_{EE} сильно зависит от R и имеет расходимость при малых R , связанную с тем, что частица проходит очень близко к центру, где плотность звёзд велика. На самом деле в этом случае нужно учитывать, что функция распределения звёзд при очень малых энергиях отличается от экспоненциальной. Если принять, что $F_{\star}(E_{\star}) = 0$ при $E_{\star} < 0$ (т.е. рассмотреть несингулярное изотермическое распределение), то функция \mathcal{I}_{EE} начинает также зависеть от ϵ , т.е. от энергии частицы, и при R меньше некоторого $R_{min}(\epsilon)$ выходит на плато (см. рис. 3.1б). Максимальное значение \mathcal{I}_{EE} порядка $1.2 \exp(0.8\epsilon)$. Впрочем, при малых энергиях становится существенным вклад от звёзд с отрицательной энергией, нахо-

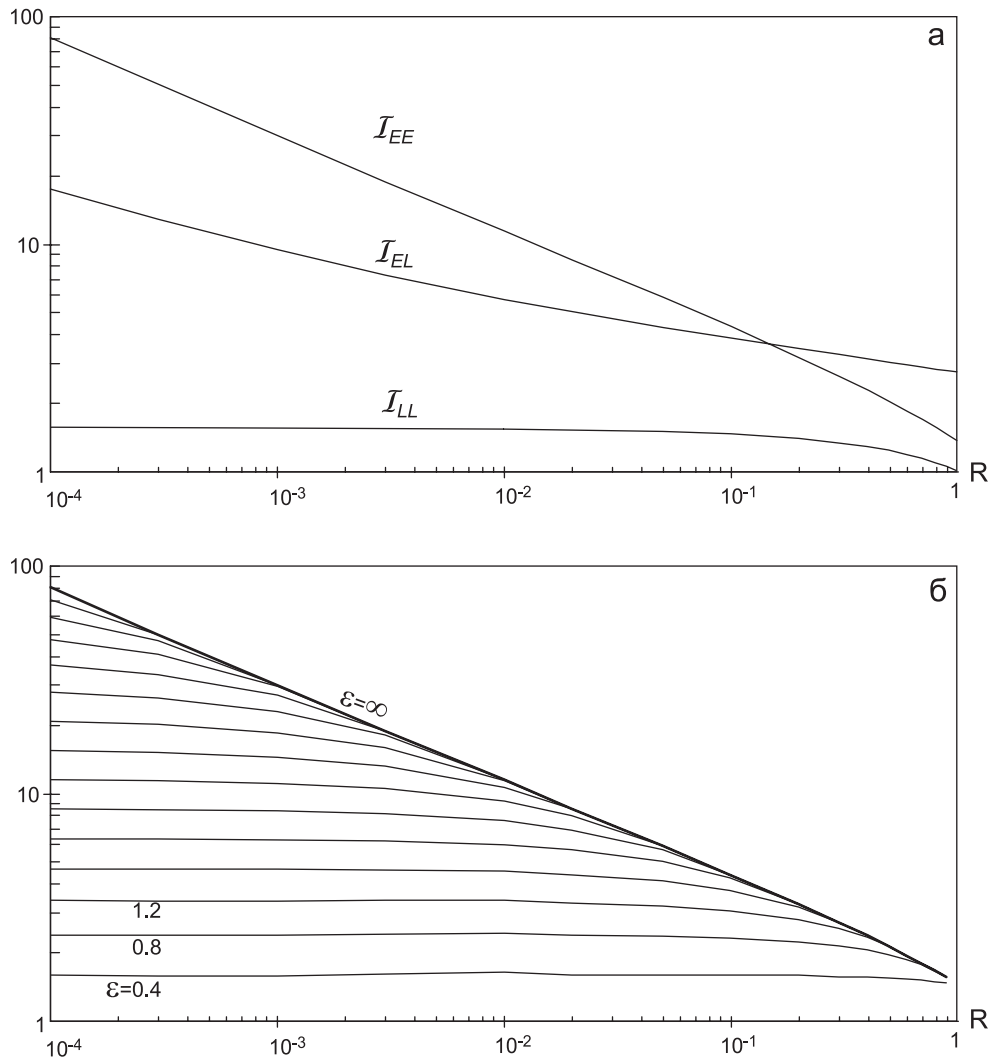


Рис. 3.1: а) Функции $\mathcal{I}_{\alpha\beta}(R)$, входящие в выражение для коэффициентов диффузии в случае изотермического балджа.

б) Функция $\mathcal{I}_{EE}(R, \epsilon)$ для различных значений энергии ϵ (снизу вверх: 0.4, 0.8, 1.2 и т.д.). Видно, что для каждого ϵ при R меньше некоторой величины R_{min} функция выходит на константу.

дющихся в сфере влияния чёрной дыры, который мы оценим в следующем разделе.

Отметим, что обычно в литературе принято использовать усреднённый по моментам (т.е. по R) коэффициент диффузии по энергиям, что, как видно из изложенного, не вполне корректно по причине достаточно сильной его зависимости от R . Что же касается коэффициента \mathcal{R}'_{EL} , то, как легко видеть, при малых R он стремится к нулю.

Также отметим, что выражения для $\mathcal{R}'_{\alpha\beta}$ согласуются с полученными в [58]. В частности, \mathcal{R}'_{LL} оказывается практически независимым от энергии и момента частицы и равен $0.46GM_\star\sigma \ln \Lambda$.

Коэффициенты диффузии $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ в координатах $\{Q, R\}$ выглядят следующим образом:

$$\mathcal{D}_{QQ,b} = H F_b/\tilde{T}(R) \left(\frac{18}{e\sqrt{\pi}}\right)^{2/3} Q^{4/3} \mathcal{I}_{EE}(R), \quad (3.16a)$$

$$\mathcal{D}_{QR,b} = H F_b/\tilde{T}(R) \left(\frac{2\sqrt{3}}{e\sqrt{\pi}}\right)^{2/3} Q^{1/3} R [\mathcal{I}_{EL}(R) - 2\mathcal{I}_{EE}(R)], \quad (3.16b)$$

$$\mathcal{D}_{RR,b} = H F_b/\tilde{T}(R) \left(\frac{4\sqrt{2}}{3e\sqrt{\pi}}\right)^{2/3} Q^{-2/3} R [2R(\mathcal{I}_{EE}(R) - \mathcal{I}_{EL}(R)) + e\mathcal{I}_{LL}(R)].$$

3.2.2 Коэффициенты диффузии для области влияния чёрной дыры

Определим теперь коэффициенты для области кулоновского потенциала, ограничившись практически важным случаем $\gamma_c = 3/2$. В этом случае, согласно (2.18), функция распределения звёзд не зависит от энергии и равна F_c (для $E_\star < \Phi_h$).

$$\begin{aligned} G_0(E') &= -E' F_c, \\ G_{n/2}(E', x) &= G_0 \frac{2}{n+2} \left(\frac{1}{x} - 1\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Усреднение по орбите представляется как

$$\mathcal{R}'_{\alpha\beta} = \frac{2}{\pi} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx x}{\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}} \tilde{\mathcal{R}}'_{\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

Здесь $x_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - R})$ – корни уравнения $v_r(x) = 0$ (2.21a).

Вычисление коэффициентов $\mathcal{R}'_{\alpha\beta}$ даёт

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_{EE} &= H F_c (-E')^2 \left(\frac{16}{5\sqrt{R}} - \frac{2}{5}\right), \\ \mathcal{R}'_{EL} &= H F_c (-E') \sqrt{R} \frac{GM_{bh}}{\sqrt{-2E'}} \frac{7}{5}, \\ \mathcal{R}'_{LL} &= H F_c \frac{(GM_{bh})^2}{-2E'} \frac{29 - 15R}{20}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Коэффициент $\mathcal{R}'_{EE,c}$ расходится при $R \rightarrow 0$, что является следствием допущения наличия звёзд со сколь угодно низкими энергиями. Если принять, что $f_*(E_*) = 0$ при $-E_* > -E_{*,min}$, и обозначить $\epsilon = |E_{*,min}/E|$, то при $\epsilon > 1$ и $R \lesssim 1/\epsilon$ коэффициент $\mathcal{R}'_{EE,c}$ ограничен сверху величиной $H F_c E^2 \frac{3}{2} \sqrt{\epsilon}$, а при $\epsilon < 1$ и любых R – величиной $H F_c E^2 \epsilon$.

Окончательно,

$$\mathcal{D}_{QQ,c} = H F_c \frac{36}{5} Q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{1}{8} \right), \quad (3.20a)$$

$$\mathcal{D}_{QR,c} = H F_c \frac{24}{5} Q R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R}} \right), \quad (3.20b)$$

$$\mathcal{D}_{RR,c} = H F_c R \frac{29 + 16\sqrt{R} - 45R}{5}. \quad (3.20c)$$

Отметим, что эти величины согласуются с вычисленными в [67] для $\gamma_c = 3/2$.

Сравнивая выражения для коэффициентов диффузии в балдже и в центральной области, можно видеть следующее. Коэффициенты $\mathcal{D}_{RR,c}$ и $\mathcal{D}_{RR,b}$ сравниваются при $Q \cdot (r_1/r_h)^3 = Q_h \approx 0.06$, что соответствует $\epsilon' \approx -2$. Эту величину можно принять за границу, разделяющую кулоновскую и изотермическую области. Коэффициент \mathcal{R}'_{EE} в балдже, как было сказано выше, при малых энергиях практически не зависит от R , но при этом не учитывается вклад от звёзд центральной области. Его можно оценить как $H F_c 3\sigma^4 / \sqrt{R}$ (со сделанными выше оговорками относительно малых значений R). Соответственно можно принять, что \mathcal{R}'_{EE} в балдже равен большему из двух значений (вычисленному для балджа и для центральной области). Выражения для \mathcal{R}'_{EL} также согласуются друг с другом.

3.3 Граничные условия для уравнения диффузии

Для решения уравнения диффузии необходимо задать граничные условия. В пространстве $\{Q, R\}$ область определения переменных имеет вид прямоугольной полосы: $0 \leq R \leq 1$, $Q(E_{min}) \leq Q < Q(E_{max})$. $E_{min} = (\sqrt{8/9} - 1) c^2$

– энергия последней устойчивой орбиты в поле чёрной дыры. Со стороны больших энергий область интегрирования ограничена некоторой величиной E_{max} , примерно соответствующей границе балджа. Будем считать, что при $E \gtrsim E_{max}$ коэффициенты диффузии обращаются в ноль.

Граничное условие при $R = 1$ определяется из соображений отсутствия потока через эту поверхности, т.е.

$$\left(\mathcal{D}_{QR} \frac{\partial f}{\partial I} + \mathcal{D}_{RR} \frac{\partial f}{\partial R} \right) \Big|_{R=1} = 0. \quad (3.21)$$

Поскольку коэффициенты диффузии \mathcal{D}_{RR} и \mathcal{D}_{QR} обращаются в ноль на границе $R = 1$, то никаких дополнительных ограничений на функцию f , кроме её регулярности, не требуется.

Отдельного рассмотрения требует граничное условие при малых моментах, обусловленное наличием чёрной дыры. Как известно, чёрная дыра поглощает частицы с угловым моментом, меньшим критического: $L < L_g = 2cr_g = 4GM_{bh}/c$. Традиционно эта область называется конусом потерь. В переменных $\{Q, R\}$ это условие имеет вид $R < R_g(Q)$,

$$R_g(Q) = 16 \frac{\sigma^2 r_h^2}{c^2 r_1^2} \frac{\varkappa^{2/3}}{(3Q)^{2/3}}, \quad \varkappa = \begin{cases} 1 & \text{в кулоновском потенциале,} \\ \sqrt{e/2\pi} & \text{в изотермическом потенциале.} \end{cases} \quad (3.22)$$

На первый взгляд, это соответствует условию поглощающей границы $f(Q, R)|_{R=R_g} = 0$, но на самом деле ситуация оказывается сложнее.

Введём величину $\Delta R = \sqrt{2T(Q, R) \mathcal{D}_{RR}}$ – среднеквадратичное изменение R за один орбитальный период. Если $\Delta R \ll R_g$, т.е. характерное изменение величины R за период мало по сравнению с граничным значением, то конечная длительность периода не играет роли, и процесс диффузии можно рассматривать как непрерывный. Об этом случае говорят как о диффузионном режиме, или режиме «случайного блуждания» (random-walk). В таком режиме граничное условие действительно будет соответствовать поглощающей границе: функция распределения обращается в ноль на гра-

нице $R = R_g$, а её производная определяет темп поглощения.

Однако в противоположном случае $\Delta R \gg R_g$ ситуация меняется: в течение одного периода частица может много раз входить и выходить из области $R < R_g$, а поглощение чёрной дырой происходит только в момент прохождения перицентра. То есть только небольшая часть частиц в области $R < \Delta R$ в течение одного периода попадёт в чёрную дыру, а остальные будут безнаказанно гулять по этой области. О такой ситуации говорят как о режиме «точечного стока» (pinhole), или полного конуса потерь. (Названия взяты из работы Lightman & Shapiro [66], где впервые рассматривался подобный вопрос о граничном условии). Очевидно, что во втором случае $f(R)$ вовсе не обращается в ноль на границе поглощения, а стремится к некоторому конечному пределу f_g . Темп поглощения определяется из следующего соображения: с одной стороны, он равен сумме вероятностей для всех частиц оказаться в области $R < R_g$ за один орбитальный период, т.е. пропорционален $f_g R_g/T$, а с другой – равен диффузионному потоку из области больших R , где диффузионное приближение справедливо. Вопрос о модификации граничного условия для этого случая и рассматривается ниже.

Как видно из (3.16, 3.20), коэффициент диффузии \mathcal{D}_{RR} при малых R имеет вид $\mathcal{D}_{RR} \approx \mathcal{D} R$. Если пренебречь остальными коэффициентами и рассмотреть квазистационарную ситуацию, когда поглощение частиц с $R < R_g$ компенсируется притоком их с больших R , то стационарное решение уравнения $0 = \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right)$ будет иметь вид $f(R) = A \ln R + B$. Оно соответствует постоянному потоку, направленному от больших R к малым и равному $\mathcal{D} A$. Граничное условие определяет связь между величинами A и B , или, что то же самое, между значениями функции и её производной в точке $R = R_g$. А именно:

$$\left(f - \alpha R_g \frac{\partial f}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_g} = 0 . \quad (3.23)$$

Легко видеть, что задав значение функции на границе $f(R_g) = f_g$, мы получим следующий её вид вблизи границы:

$$f(R) = f_g \left(1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{R}{R_g} \right) . \quad (3.24)$$

Поток через границу равен $\mathcal{D}f_g/\alpha$.

Остаётся связать параметр α с величинами R_g и ΔR . Введём безразмерную величину $q = \mathcal{D}T/R_g$, тогда $\Delta R^2 = 2R R_g q$. Предположим, что распределение вероятности p для частицы получить заданное приращение δR за один период имеет гауссов вид с дисперсией $\overline{\delta R^2} = \Delta R^2$ и средним значением $\overline{\delta R} \ll \Delta R$:

$$p(R, \delta R) = \frac{\exp\left(-\frac{\delta R^2}{2\Delta R^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \Delta R \left(\frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{2}\Delta R}\right) + \frac{1}{2}\right)} . \quad (3.25)$$

Нормировка выбрана таким образом, что $\int_{-R}^{\infty} p(R, \delta R) d\delta R = 1$. Полное число частиц, попавших за один период в область $R < R_g$, определяется соотношением:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{R_g}^{\infty} f(R) dR \int_{-R}^{-(R-R_g)} p(R, \delta R) d\delta R = \\ &= f_g R_g \int_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \ln y\right) dy \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{q}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-1}{2\sqrt{qy}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{q}}\right) + 1} , \quad y = R/R_g . \end{aligned} \quad (3.26)$$

С другой стороны, оно же равно потоку с больших R за один период:

$$Q = T \mathcal{D}_{RR} \frac{\partial f}{\partial R} = \mathcal{D}T f_g/\alpha = f_g R_g q/\alpha . \quad (3.27)$$

Приравнявая (3.26) и (3.27) и выражая α через q , получим следующие асимптотические выражения:

$$\alpha = \begin{cases} 0.8\sqrt{q} & \text{при } q \ll 1 \\ 0.75q , & \text{при } q \gg 1 . \end{cases} \quad (3.28)$$

Более точные вычисления, проведённые в [67] на основании рассмотрения

уравнения диффузии в неусреднённом по орбите виде, дают

$$\alpha = \begin{cases} 0.824\sqrt{q} + 0.186q & \text{при } q < 1, \\ q & \text{при } q > 1. \end{cases} \quad (3.29)$$

Мы будем пользоваться в расчётах выражениями 3.29.

Вычислим величину q для кулоновского и изотермического случая. Используя (3.10, 3.22, 3.16с, 3.20с, 3.13, 2.16, 2.18), имеем

$$q \equiv \frac{DT}{R_g} = \frac{c^2}{\sigma^2} \frac{M_\star}{M_{bh}} \ln \Lambda \cdot \begin{cases} 1.6 \left[3Q \left(\frac{r_1}{r_h} \right)^3 \right]^{5/3} & \text{в “кулоне”}, \\ 0.27 \left[3Q \left(\frac{r_1}{r_h} \right)^3 \right]^{1/3} & \text{в “изотерме”}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Оказывается, что граница Q_{cr} , разделяющая области диффузионного приближения и точечного стока ($q = 1$), как правило, лежит в кулоновской области ($Q_{cr}(r_1/r_h)^3 \lesssim Q_h = 0.06$), по крайней мере для не слишком больших масс чёрных дыр и дисперсий скоростей в балдже. К примеру, если взять за основу текущие значения $M_{bh} = 3 \cdot 10^6 M_\odot$ и $\sigma = 80$ км/с для нашей Галактики, то $Q_{cr} = 0.02$.

3.4 Начальные условия

Наконец, запишем наши модельные начальные функции распределения в переменных $\{Q, R\}$:

$$f(Q, R) = (\sigma r_1)^3 f(I(Q, R), L(Q, R)) :$$

$$\text{в модели А} \quad (3.31a)$$

$$f(Q, R) = \mathcal{M} (3Q)^{(\mu-2)/3} \delta(R - R_0),$$

$$\mathcal{M} = f_0 (\sigma r_1)^{\mu+1} \frac{\varkappa^{2(\mu+1)/3}}{(1 + l_0 \varkappa)^{\mu+1}}, \quad R_0 = \left(1 + \frac{1}{\varkappa l_0} \right)^{-2};$$

$$\text{в модели Б} \quad (3.31b)$$

$$f(Q, R) = \mathcal{M} (3Q)^{(\mu-2\beta)/3} (1 - \beta) R^{-\beta} \left[1 - \sqrt{R} \left(1 - \frac{\varkappa_0}{\varkappa} \right) \right]^\mu,$$

$$\mathcal{M} = f_0 (\sigma r_1)^{\mu+3-2\beta} \varkappa^{2(\mu+\beta)/3} / (1 - \beta).$$

Здесь $\varkappa = 1$ в кулоновской области и $\varkappa \approx 0.66$ в изотермической; \varkappa_0 в модели Б зависит от исходного показателя степени профиля плотности тёмной материи согласно (2.5). Впрочем, для простоты мы будем пренебрегать членом в квадратных скобках, что допустимо при малых R , которые нас в основном и интересуют.

Нормировочный коэффициент \mathcal{M} , имеющий размерность массы, будем определять так же, как в разделе 2.2.2, а именно, из условия, что плотность тёмной материи до барионного сжатия на расстоянии 8 кпс от центра Галактики составляет $0.3 \text{ ГэВ}/\text{см}^3$ [49]. Примем нормировочные значения $\sigma = 80 \text{ км}/\text{с}$, $r_1 = r_h$ в настоящее время (2 пс). Вычисленные значения \mathcal{M} (в единицах массы Солнца) для различных параметров приведены в таблице 3.1.

№	γ_d	l_0	β, β'	μ	\mathcal{M}/M_\odot
A1	12/7	0.1	0.59, 0.74	1/8	$1.1 \cdot 10^6$
B1	1.5	—	0, -0.02	-9/5	$8 \cdot 10^5$
B2	1.5	—	0.5, 0.49	-4/5	$3.8 \cdot 10^5$
B3	1.0	—	0, -0.05	-5/3	$1.8 \cdot 10^5$

Таблица 3.1: Параметры используемых моделей

Сделаем некоторые пояснения по поводу выбора моделей: модели B1 и B2 отвечают профилю плотности Moore [21], причём в первом случае принято изотропное распределение, а во втором введена умеренная радиальная анизотропия скоростей. Модель B3 соответствует профилю NFW [19] с изотропным распределением по скоростям. Модель A1 изучалась в работах [63, 10], но для пустого конуса потерь и в пренебрежении диффузией по энергии.

Примем, что в момент времени $t = 0$ мы имеем уже сформированный балдж с функцией распределения звёзд (2.16) и затравочную чёрную дыру.

Вооружившись всеми необходимыми данными, в следующей главе мы приступим к решению уравнения Фоккера-Планка.

Глава 4

Эволюция распределения тёмной материи

Эволюцию распределения тёмной материи определяют три основных фактора: диффузия в фазовом пространстве $\{Q, R\}$, обусловленная рассеянием на звёздах; поглощение чёрной дырой частиц с малыми Q и R ; уменьшение плотности частиц из-за самоаннигиляции. Уравнение, описывающее эти процессы, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial f(Q, R, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\mathcal{D}_{QQ} \frac{\partial f}{\partial Q} + \mathcal{D}_{QR} \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\mathcal{D}_{QR} \frac{\partial f}{\partial Q} + \mathcal{D}_{RR} \frac{\partial f}{\partial R} \right) - S_{ann}[f]. \quad (4.1)$$

Будем рассматривать эти процессы по очереди, в порядке усложнения. Вначале изучим одномерное приближение для диффузии по каждой из координат, пренебрегая коэффициентом диффузии по второй переменной и смешанным коэффициентом. Это поможет понять качественные особенности диффузии и определить её временные масштабы, а также оценить потоки частиц на чёрную дыру и за пределы области интегрирования. Затем рассмотрим полное двумерное уравнение диффузии при постоянной величине массы чёрной дыры и выясним отличия его решения от одномерных приближений. Потом расширим рассмотрение на случай меняющейся во времени массы чёрной дыры и соответственно границы области её влияния, и наконец, учтём потери из-за аннигиляции.

4.1 Одномерное приближение – диффузия по моменту

Для начала рассмотрим одномерное уравнение диффузии по R при фиксированном Q :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\mathcal{D}_{RR} \frac{\partial f}{\partial R} \right), \quad (4.2)$$

с граничным условием (3.23) при $R = R_g(Q)$ и коэффициентом диффузии \mathcal{D}_{RR} (3.16с, 3.20с). Как было сказано выше (раздел 3.3), $\mathcal{D}_{RR} \approx \mathcal{D}R$ при малых R .

Начальное условие и соответственно способ решения задачи будет различным для моделей А и Б. Будем нормировать $f(R, t = 0)$ таким образом, чтобы $\int_0^1 f(R) dR = 1$.

Поскольку коэффициент диффузии зависит от R , а граничное условие ставится в точке, отличной от нуля, то получить аналитическое решение через функцию Грина оказывается затруднительно. Вместо этого мы воспользуемся приближённым методом, аппроксимируя $f(R, t)$ простыми выражениями, а потом сравним с численным решением. Сначала рассмотрим модель Б, как более простую для расчёта.

4.1.1 Диффузия в модели Б

Начальным условием в модели Б, согласно (3.31b), будет $f(R, t = 0) = (1 - \beta)R^{-\beta}$ (если пренебречь величиной в квадратных скобках, которая близка к 1).

Будем искать приближение для $f(R, t)$ в таком виде: при малых R , согласно (3.24), $f \propto \ln(R/R_g)$, а при больших – равна начальному значению $f(R, t = 0)$ (рис. 4.1):

$$f(R, t) = \begin{cases} f_g(t) \left(1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{R}{R_g} \right) & \text{при } R < R_1(t), \\ (1 - \beta)R^{-\beta} & \text{при } R > R_1(t). \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{Условие сшивки: } f_g(t) \left(1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{R_1(t)}{R_g} \right) = (1 - \beta)R_1^{-\beta}. \quad (4.4)$$

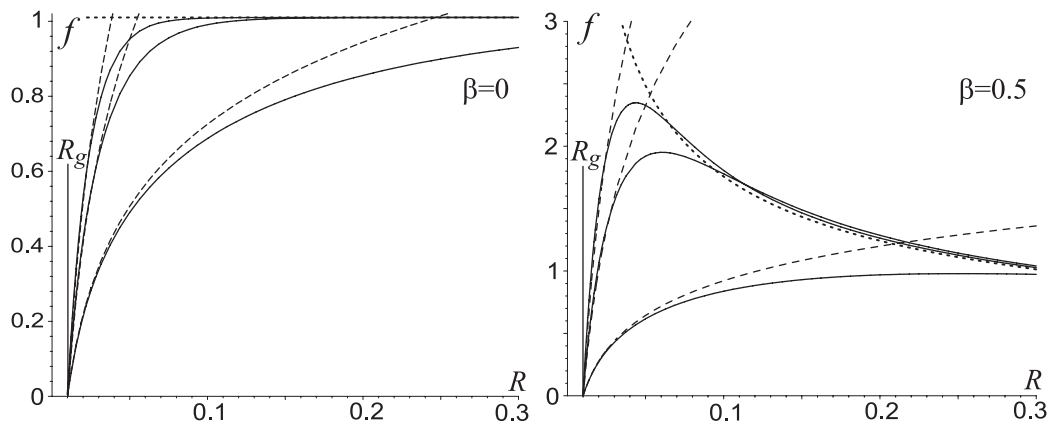


Рис. 4.1: Эволюция $f(R, t)$ в одномерной задаче диффузии в модели Б (слева – для $\beta = 0$, справа – для $\beta = 0.5$; $R_g = 0.01$, $\alpha = 0$):

точечная линия – начальное значение $f(R) = (1 - \beta)R^{-\beta}$; сплошные линии – расчёт с помощью численного интегрирования для моментов безразмерного времени $\mathcal{D}t = 0.01, 0.02, 0.20$ (сверху вниз); пунктирные линии – соответствующие этим моментам приближенные решения в форме $f = f_g(t) \left(1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{R}{R_g}\right)$.

Число частиц

$$N(t) = \int_{R_g}^1 f(R, t) dR = \frac{f_g(t)}{\alpha} \left(R_1(t) \ln \frac{R_1}{R_g} - R_1 + R_g \right) + f_g \cdot (R_1 - R_g) + 1 - R_1^{1-\beta} \quad (4.5)$$

С другой стороны, изменение числа частиц равно потоку через границу: $dN/dt = -\mathcal{D}f_g(t)/\alpha$. Комбинируя эти соотношения и введя нормированные время $\tau = \mathcal{D}t/R_g$ и координату $x = R_1/R_g$, получаем дифференциальное уравнение на $x(\tau)$:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x \cdot (\alpha + \ln x)}{[1 + (\alpha + \ln x)\beta][(\alpha + \ln x)x - x + 1 - \alpha]} \quad (4.6)$$

с начальным условием $x(\tau = 0) = 1$.

Решение уравнения (4.6) хорошо аппроксимируется выражением $x(\tau) = 1 + \chi_1 \tau^{n_1} + \chi_2 \tau^{n_2}$, где коэффициенты χ_1, χ_2, n_1, n_2 зависят от α и β ; $n_1 \approx 0.5, n_2 \approx 1$. Из соотношения (4.4) находим $f_g(t)$ и поток $S = \mathcal{D}f_g/\alpha$. Эта оценка справедлива до момента t_1 , при котором $R_1(t_1) = 1$, т.е. $x = 1/R_g$ (величина $t_1 \sim 1/\mathcal{D}$). Поток при этом достаточно слабо (логарифмически) убывает со временем.

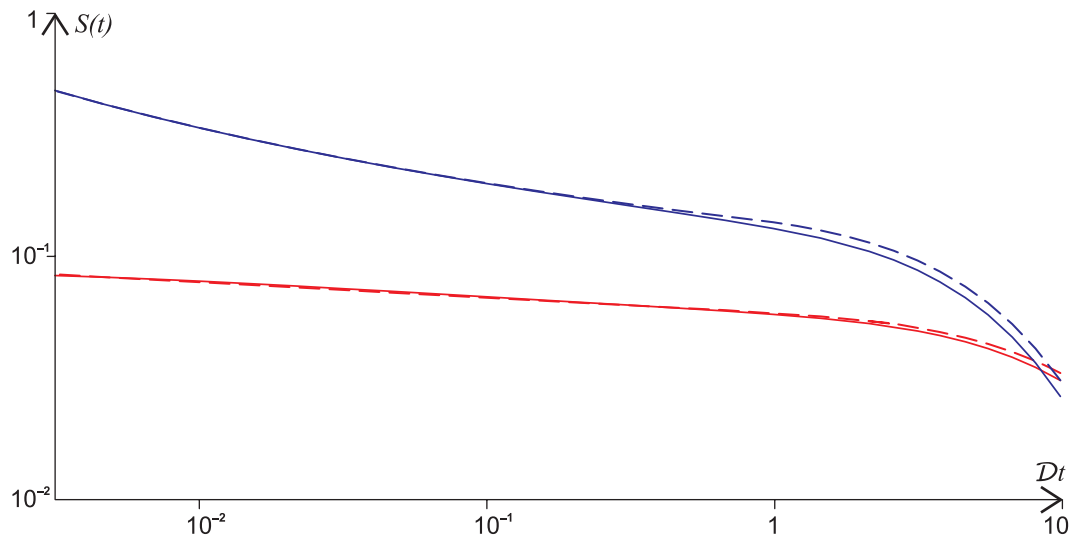


Рис. 4.2: Поток частиц на чёрную дыру $S(Q, t)$ в одномерной задаче диффузии по R в модели Б.

Сплошные линии – численное решение, пунктир – аппроксимация, описанная в тексте ($S = \mathcal{D}/(\alpha + \ln x)$ при $t < t_1$; $S = \mathcal{D}/(\alpha + \ln 1/R_g) \times \exp\left(-\frac{\mathcal{D}(t-t_1)}{\ln(1/R_g)-1+\alpha}\right)$ при $t > t_1$; $t_1 \sim 1$). Верхние (синие) линии – для $\alpha = 0.1$, нижние (красные) – для $\alpha = 10$; $R_g = 10^{-3}$. При $t < t_1$ поток слабо зависит от времени, в обратном случае – экспоненциально уменьшается со временем, причём временной масштаб убывания тем больше, чем больше α и чем меньше R_g .

При $t > t_1$ функция распределения имеет установившуюся логарифмическую зависимость от R , а её амплитуда, и, соответственно, поток S экспоненциально убывают со временем: $S(t) = S(t_1) \exp\left(-\frac{\mathcal{D}(t-t_1)}{\ln(1/R_g)-1+\alpha}\right)$. Важно отметить, что временная шкала экспоненциального убывания равна не $1/\mathcal{D}$, а $(\ln(1/R_g) + \alpha)/\mathcal{D}$, т.е. существенно больше, особенно для режима точечного стока ($\alpha \gg 1$).

Этот приближённый метод позволяет довольно точно оценить зависимость потока от времени (рис. 4.2).

Пользуясь этим методом, сделаем оценку потока частиц тёмной материи на чёрную дыру в зависимости от времени и массы чёрной дыры. Как было сказано выше, скорость поглощения различна в случае $\alpha < 1$ (диффузионный режим) и $\alpha > 1$ (режим точечного стока). Для большинства

значений параметров величина Q_{cr} , разделяющая эти две области, меньше Q_h , отделяющей кулоновскую область от балджа. Поэтому мы разобьём полный поток частиц на чёрную дыру на три слагаемых:

$$\begin{aligned} S_{tot}(t) &= S_1 + S_2 + S_3, & S_1 &= \int_0^{Q_{cr}} \tilde{f}(Q) S(Q, t) dQ, \\ S_2 &= \int_{Q_{cr}}^{Q_h} \tilde{f}(Q) S(Q, t) dQ, & S_3 &= \int_{Q_h}^{\infty} \tilde{f}(Q) S(Q, t) dQ. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь $\tilde{f}(Q)$ – усреднённое по R значение начальной функции распределения.

Удобно ввести две шкалы времени: динамическую $T_{dyn} = r_h/\sigma$ и диффузионную $T_D = 1/\mathcal{D}(Q)$. Как было объяснено выше, поток частиц с данным значением Q слабо зависит от времени при $t \lesssim T_D(Q)$ и экспоненциально убывает с характерным временем $T_D \cdot (\alpha + \ln[1/R_g] - 1)$ при $t \gtrsim T_D(Q)$.

Обозначим $Q' = Q \cdot (r_1/r_h)^3$. Граничные значения, разделяющие три области, таковы:

$$\begin{aligned} Q'_{cr} &= \frac{1}{3} \left(1.6 \ln \Lambda \frac{c^2}{\sigma^2} \frac{M_\star}{M_{bh}} \right)^{-3/5}, \\ Q'_h &= 0.06. \end{aligned}$$

В кулоновской области T_D не зависит от Q : $T_{D,c} = T_{dyn} M_{bh}/(4M_\star \ln \Lambda)$. Возможны два варианта: при $t \lesssim T_D$ во всей этой области $R_1(t) < 1$, и поток $S_Q \propto t^{-\beta}/[\alpha(Q) + \ln(t/T_D R_g(Q))]$. В этом случае

$$S_1 \sim f_0 (\sigma r_h)^{(\mu-2\beta+3)} \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{1}{T_{dyn}} \frac{8}{\mu - 2\beta + 3} \frac{(3Q'_{cr})^{(\mu-2\beta-4)/3}}{\ln(t/[10T_{dyn} 3Q'_{cr}])}, \quad (4.8a)$$

$$S_2 \sim f_0 (\sigma r_h)^{(\mu-2\beta+3)} \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{1}{T_{dyn}} \frac{8}{2 - \mu + 2\beta} (3Q'_{cr})^{(\mu-2\beta-2)/3}. \quad (4.8b)$$

В противоположном случае, когда $t \gtrsim T_D$, эти величины умножаются на убывающий множитель вида $\exp\left(-\frac{t/T_D-1}{\ln[T_D/(10T_{dyn} 3Q'_{cr})]}\right)$.

В балдже вне кулоновской области $T_D = T_{D,c} \cdot (Q'/Q'_h)^{2/3}$. В случае, если $t < T_{D,c}$, во всей этой области $R_1(t) < 1$, а в обратном случае – только

при $Q' > Q'_h \cdot (t/T_{D,c})^{3/2}$, а при меньших значениях Q' поток экспоненциально падает. Соответственно, за нижнюю границу интегрирования в (4.7) примем $Q'_b = Q'_h \cdot \max[1, (t/T_{D,c})^{3/2}]$. Поток из этой области составляет

$$S_3 \sim f_0 (\sigma r_h)^{\mu-2\beta+3} \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{1}{T_{dyn}} \frac{15 Q'_b{}^{\mu/3}}{-\mu} \left[0.8 \frac{\sigma^2}{c^2} \frac{t}{T_{dyn}} (3Q'_{cr})^{-5/3} \right]^{-\beta}. \quad (4.8c)$$

Суммируя всё вышесказанное, можно сделать следующие оценки на величину потока тёмной материи в модели Б:

1) в случае $t < T_{D,c}$ поток не очень сильно (логарифмически) зависит от t в области влияния чёрной дыры и пропорционален $\sigma^2 M_{bh}^{-1}$; поток из балджа пропорционален $\sigma^4 (t\sigma^3 M_{bh}^{-2})^{-\beta}$.

2) в обратном случае поток из центральной области экспоненциально убывает на временном масштабе $T_{D,c} \cdot \left(\frac{2}{5} \ln \frac{M_{bh}}{M_*} + \frac{6}{5} \ln \frac{c}{\sigma} \right)$, а поток из балджа умножается на множитель $(t/T_{D,c})^{\mu/2}$.

Для нашей Галактики в настоящий момент $T_{dyn} \approx 3 \cdot 10^4$ лет, $T_{D,c} \approx 2 \cdot 10^9$ лет, $t = 10^{10}$ лет $> T_{D,c}$. Временной масштаб экспоненциального убывания потока составляет $\sim 15 T_{D,c}$.

4.1.2 Диффузия в модели А

В модели А начальным условием является, согласно (3.31b), дельта-функция $f(R, t = 0) = \delta(R - R_0)$, причём R_0 практически не зависит от Q , и $R_g \ll R_0 \ll 1$.

Ясно, что при малых t функция распределения будет локализована около $R = R_0$, имея вид гауссовой кривой

$$f(R, t) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi \mathcal{D} R_0 t}} \exp \left(-\frac{(R - R_0)^2}{4\mathcal{D} R_0 t} \right). \quad (4.9)$$

Поток на чёрную дыру при этом будет очень мал. Постепенно $f(R, t)$ расплывается и в момент $t = t_{max}$ поток достигнет максимума, а затем будет уменьшаться. Когда $t \gtrsim T_D$, функция распределения принимает такую же логарифмическую форму, как и в модели Б, и экспоненциально уменьшается с тем же характерным временем, что и в предыдущем случае.

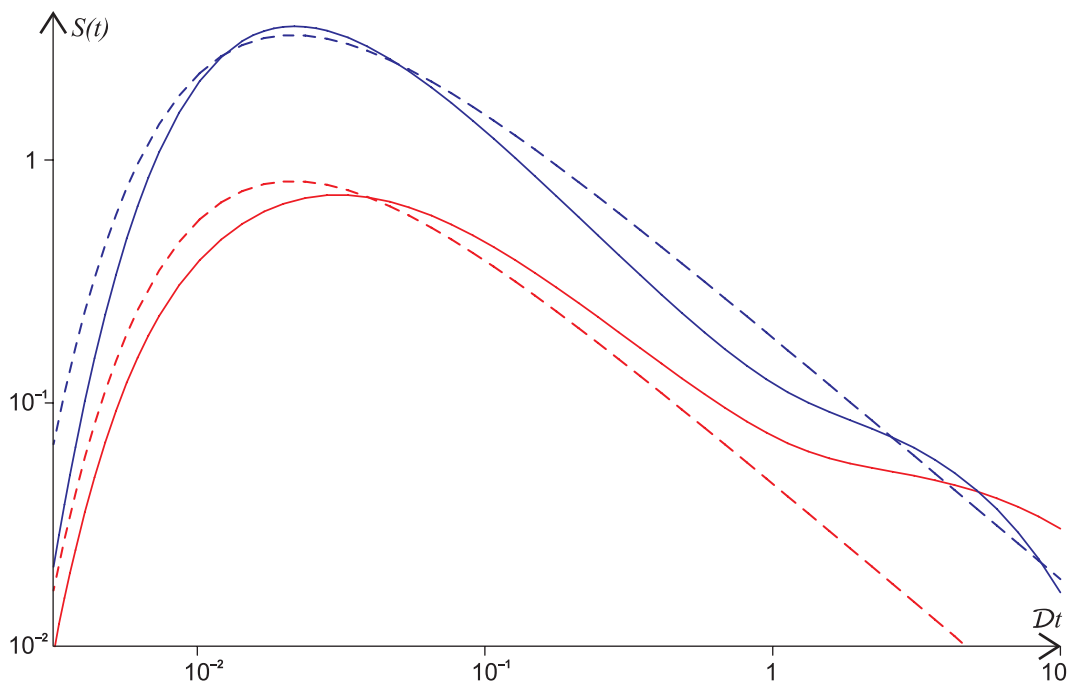


Рис. 4.3: Поток частиц на чёрную дыру в одномерной диффузии по R в модели А. Сплошные линии – численное решение, пунктирные – аппроксимация (4.10а), справедливая при малых t . Верхние линии (синие) – для $\alpha = 0.1$, нижние (красные) – для $\alpha = 10$; при этом $R_g = 10^{-3}$, $R_0 = 0.05$. После начального всплеска идёт степенной спад ($S \propto t^{-1}$), затем эволюция аналогична модели Б (рис. 4.2).

Можно показать [10, 63], что выражение для потока $S(t)$ имеет вид

$$S(t) \simeq \frac{A}{t} \exp\left(-\frac{R_0}{\lambda \mathcal{D} t}\right), \quad \lambda \approx \frac{7.5}{\ln R_0/R_g}. \quad (4.10a)$$

При этом $t_{max} = R_0/\lambda \mathcal{D}$. Чтобы получить нормировку A , воспользуемся следующим рассуждением: в момент t_{max} функция распределения при $R \lesssim R_0$ уже приобрела характерный логарифмический вид (3.24); $f(R_0, t_{max}) = \frac{S(t_{max})}{\mathcal{D}} \left(\alpha + \ln \frac{R_0}{R_g}\right)$. С другой стороны, подставив $t = t_{max}$ в формулу (4.9), получим $f(R_0, t_{max}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{R_0 2\sqrt{\pi}}$. Отсюда

$$A = 0.35 \frac{\sqrt{\ln(R_0/R_g)}}{\alpha + \ln(R_0/R_g)}. \quad (4.10b)$$

Справедливость такой оценки подтверждается сравнением с результатами численного интегрирования (рис. 4.3). При $t \gg t_{max}$ вид функции

распределения и величина потока аналогичны модели Б, но при малых временах поток заметно больше.

4.2 Одномерная диффузия по энергии

4.2.1 Диффузия в области балджа

Как следует из формул (3.16а, 3.20а), коэффициент диффузии \mathcal{D}_{QQ} является растущей функцией Q : $\mathcal{D}_{QQ} \propto Q^2$ в кулоновской области, $\mathcal{D}_{QQ} \propto Q^{4/3}$ в изотермическом балдже. Кроме того, он растёт с уменьшением R . Отсюда ясно, что преобладающим эффектом в диффузии по энергии является нагрев частиц тёмной материи звёздами (что с физической точки зрения объясняется стремлением системы к термодинамическому равновесию, в котором кинетическая энергия каждой частицы и каждой звезды одинакова. Очевидно, что это ведёт к практически неограниченному набору частицами тёмной материи удельной энергии на единицу массы). Также ясно, что основной интерес представляет диффузия в балдже, т.к. из центральной области частицы “выметаются” за ограниченное время, благодаря совместному влиянию нагрева звёздами и поглощения чёрной дырой.

В связи с этим рассмотрим упрощённую одномерную задачу диффузии по Q для изотермического балджа:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\mathcal{D}_Q Q^{4/3} \frac{\partial f}{\partial Q} \right), \quad (4.11)$$

где \mathcal{D}_Q – константа (зависящая от R). Начальным условием, согласно (3.31b), является $f(Q, t = 0) = \tilde{f} Q^{-2/3}$. Граничные условия обеспечат отсутствие потока через границы: $\mathcal{D}_Q Q^{4/3} \frac{\partial f}{\partial Q} = 0$ при $Q = 0$ и $Q = \infty$. Это означает, разумеется, сохранение числа частиц в области интегрирования, но поскольку оно изначально было бесконечным, то интерес представляет изменение числа частиц в любом ограниченном интервале $[0, Q_{max}]$.

Функция Грина уравнения (4.11), удовлетворяющая заданным гранич-

ным условиям, выглядит следующим образом:

$$G(Q, Q', t) = \frac{\exp\left(-\frac{(3Q^{1/3} - 3Q'^{1/3})^2}{4\mathcal{D}_Q t}\right) - \exp\left(-\frac{(3Q^{1/3} + 3Q'^{1/3})^2}{4\mathcal{D}_Q t}\right)}{2\sqrt{\pi\mathcal{D}_Q t} Q^{1/3} Q'^{1/3}}. \quad (4.12)$$

Она обладает следующими характерными чертами: среднее значение $\bar{Q} = \int_0^\infty Q G(Q, Q', t) dQ' \propto t^{3/2}$, дисперсия $\overline{\delta Q^2} = \int_0^\infty Q^2 G(Q, Q', t) dQ' - \bar{Q}^2 \propto t^3$. То есть, действительно, имеется явно выраженная тенденция к набору энергии частицами.

Получить решение $f(Q, t) = \int_0^\infty \tilde{f} Q'^{-2/3} G(Q, Q', t) dQ'$ в явном виде не удаётся, но можно описать его приближённой формулой

$$f(Q, t) \approx \tilde{f} \cdot \begin{cases} 4.5(\mathcal{D}_Q t)^{-1} & , \quad Q < Q_D(t) = 0.11 (\mathcal{D}_Q t)^{3/2} , \\ Q^{-2/3} & , \quad Q > Q_D . \end{cases} \quad (4.13)$$

То есть в области $Q < Q_D$ функция распределения уже “размазалась”, а при бóльших Q диффузия ещё не почувствовалась (рис. 4.4а). Соответственно, число частиц в интервале $[0, Q_{max}]$ меняется как

$$\int_0^{Q_{max}} f(Q, t) dQ \approx \tilde{f} \cdot \begin{cases} 4.5 Q_{max} (\mathcal{D}_Q t)^{-1} & , \quad Q_{max} < Q_D(t) , \\ 3Q^{1/3} - (6^{1/3} - 1)\mathcal{D}_Q t & , \quad Q_{max} > Q_D(t) . \end{cases} \quad (\text{рис. 4.4б}) \quad (4.14)$$

Более точная формула для $f(Q, t)$ такова:

$$f(Q, t) \approx \tilde{f} \cdot \frac{Q^{-2/3}}{0.68 + \sqrt{0.05 \left(\frac{\mathcal{D}_Q t}{Q^{2/3}} - 1.36\right)^2 + 0.01}}. \quad (4.15)$$

Таким образом, рассмотрение упрощённой задачи позволяет сделать следующие качественные выводы:

1. временная шкала для диффузии по энергии в балдже $T_Q(Q, R) = 4.5Q^{2/3}/\mathcal{D}_Q$;
2. при $t < T_Q$ функция распределения при данном Q примерно равна начальному значению;

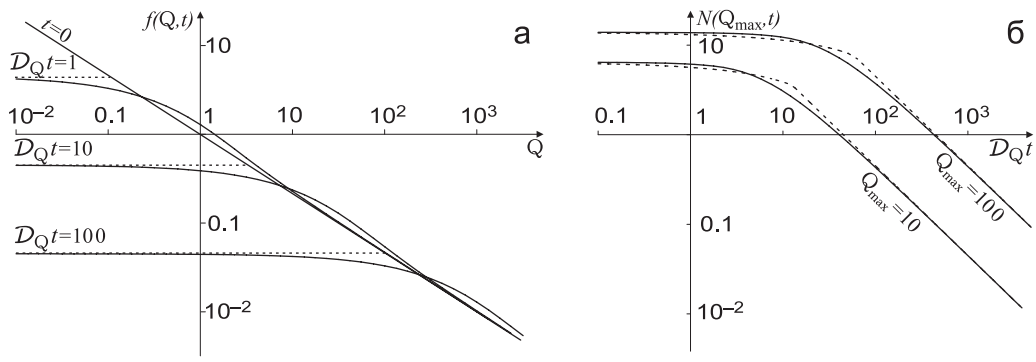


Рис. 4.4: а) Эволюция $f(Q, t)$ в одномерной задаче диффузии по Q в уравнении (4.11): значения для моментов $\mathcal{D}_Q t = 0, 1, 10, 100$ (сверху вниз): сплошными линиями – точное решение, пунктир – приближённое.

б) Изменение количества частиц $N = \int_0^{Q_{max}} f(Q, t) dQ$ в интервале $[0, Q_{max}]$: сплошные и пунктирные линии – точное и приближённое значение для $Q_{max} = 10, 100$ (снизу вверх).

3. при $t > T_Q$ величина функции распределения при всех $Q_1 < Q$ примерно одинакова и уменьшается пропорционально $(\mathcal{D}_Q t)^{-1}$.

Отметим следующее важное отличие между эволюцией тёмной материи и звёзд балджа: поскольку частицы тёмной материи не испытывают динамического трения, и могут неограниченно набирать энергию, то стационарное их распределение по энергии невозможно при наличии релаксации. Для звёзд же существует член с производной первого порядка в уравнении (4.11), который компенсирует “расплывание” функции распределения – как известно, изотермическое распределение является стационарным решением уравнения Фоккера-Планка для звёзд [33].

4.2.2 Влияние кулоновской области

В упрощённой задаче мы пренебрегли тем, что при $Q < Q_h$ (в зоне влияния чёрной дыры) зависимость коэффициента диффузии \mathcal{D}_{QQ} от Q иная, нежели в балдже (он пропорционален Q^2 , а не $Q^{4/3}$, т.е. быстрее уменьшается к малым Q).

Решение одномерного диффузионного уравнения с коэффициентом диф-

фузии $\mathcal{D}_Q Q^2 Q_h^{-2/3}$ и начальным условием $f(Q) = \tilde{f} Q^{-2/3}$ имеет вид $f(Q, t) = \tilde{f} Q^{-2/3} \exp\left(-\frac{2}{9}\mathcal{D}_Q Q_h^{-2/3} t\right)$. Следовательно, временной масштаб для диффузии в области центра $T_{Q,c} = 4.5Q_h^{2/3}/\mathcal{D}_Q$, то есть совпадает с временным масштабом для балджа, вычисленном на границе зоны влияния чёрной дыры.

Что же касается граничного условия на чёрной дыре (т.е. при $Q = Q_{min}$, т.ч. $R_g(Q_{min}) = R$), то оно, строго говоря, должно быть условием поглощающей границы. Если считать, что при временах $t \gtrsim T_{Q,c}$ решение аппроксимируется формулой (4.13), т.е. $f(Q) \approx f_\infty = 4.5(\mathcal{D}_Q t)^{-1}$ при $Q_{min} \ll Q < Q_D$, то вблизи границы Q_{min} $f(Q) \approx f_\infty \cdot (1 - Q_{min}/Q)$, а поток на чёрную дыру равен $f_\infty \mathcal{D}_Q Q_h^{-2/3} Q_{min}$. В то же время поток в направлении больших Q равен $f_\infty \mathcal{D}_Q Q_D^{1/3}$, т.е. во много раз больше потока на чёрную дыру (т.к. $Q_D > Q_h \gg Q_{min}$).

Следовательно, из-за того, что коэффициент диффузии очень мал при малых Q , чёрная дыра слабо влияет на распределение вдали от границы, по крайней мере на временах, больших характерного времени диффузии в кулоновской области.

4.3 Решение полного двумерного уравнения

4.3.1 Особенности двумерной диффузии

Выше были рассмотрены одномерные пределы уравнения диффузии (4.1), выяснены характерные временные масштабы и поведение функции распределения в различных режимах. Ещё раз перечислим основные результаты.

- Область определения переменных $0 < R < 1$, $0 < Q$ разбивается на две зоны: $0 < Q < Q_h$ – область влияния чёрной дыры и $Q > Q_h$ – балдж ($Q_h \simeq 0.06(r_h/r_1)^3$). Примем за единицу измерения временного масштаба $T_D = (\mathcal{D}_{RR}/R)^{-1}|_{Q=1,R=0} = 0.8(HF_b)^{-1}$. Для нашей Галактики $T_D = 9 \cdot 10^9$ лет (при выборе нормировки $r_1 = r_{h(\text{наст. момент})} = 2$ пс).

- Диффузия по координате R , то есть, фактически, по угловому моменту, имеет две основные стадии:
 - а) «размывание» функции распределения на интервале $R_g < R < 1$ происходит за время $T_{D,R} \sim (\mathcal{D}_{RR}/R)^{-1}$. В кулоновской области $T_{D,R} = T_D Q_h^{2/3}$, в балдже $T_{D,R} = T_D Q^{2/3}$.
 - б) При $t > T_{D,R}$ функция распределения имеет вид $f(R, t) \propto [\alpha + \ln(R/R_g)] \exp(-t/T_{loss})$, с характерным временем убывания $T_{loss} = T_{D,R} \cdot (\ln(1/R_g) - 1 + \alpha)$. При этом $\alpha > 1$ в режиме «точечного стока», который имеет место при $Q > Q_{cr}$. Напомним, что, как правило, $Q_h > Q_{cr}$, т.е. в области балджа $\alpha \propto Q^{1/3} > 1$. Характерная величина $\ln(1/R_g) \sim 10$. То есть $T_{loss} \gg T_{D,R}$.
- Диффузия по координате Q , т.е. по энергии, происходит сходным образом при разных значениях R , но поскольку коэффициент диффузии растёт при уменьшении R ($\mathcal{D}_{QQ} \propto R^{-1/2}$ в кулоновской области и $\propto R^{-0.43}$ в балдже), то соответствующим образом уменьшается и временной масштаб. Начальная функция распределения имеет вид $f \propto Q^{-2/3}$; её «размывание» на участке $[0, Q]$ (т.е. примерное выравнивание значений при разных Q) происходит за характерное время $T_{D,Q} = T_D 2.7 R^{0.43} Q^{2/3}$ в балдже и за время $T_D 3.6 R^{1/2} Q_h^{2/3}$ в кулоновской области. При больших временах величина $f(Q, t)$ убывает как $Q^{-2/3} T_{D,Q}/t$.

Из сказанного видно, что картина происходящего довольно запутана. Время выравнивания функции распределения примерно одного порядка для диффузии по R и по Q и одинаковым образом зависит от Q , но для последней оно уменьшается с уменьшением R . Тем самым при $t \gtrsim T_{D,R}$ более быстрая диффузия по Q при малых R приводит к тому, что функция распределения «проседает» при малых R , повторяя профиль $T_{D,Q} \propto R^{1/2}$. Возникающие градиенты $\partial f/\partial R$ гораздо больше тех, которые получаются

в одномерной диффузии по R в те же моменты времени. Таким образом, диффузия по Q существенно влияет на ход диффузии по R , создавая дополнительный поток в направлении малых R . В то же время добавление члена, связанного с дивергенцией этого дополнительного потока, в уравнение для диффузии по Q также сильно меняет картину, т.к. этот член существенно больше дивергенции потока по Q .

Таким образом, для более полного исследования двумерной диффузии необходимо интегрирование исходного уравнения (4.1).

4.3.2 Интегрирование двумерного уравнения диффузии

Для решения поставленной задачи была построена численная схема на основе метода независимых потоков [83]. Схема является дивергентной и позволяет проследить, каковы потоки частиц через каждую границу. Интегрирование уравнения производилось в области $0 < R < 1$, $0 < Q < Q_{max}$, на сетке размером 150×400 ячеек с переменным шагом, сгущающимся к малым Q и R , и с адаптивным шагом по времени.

Поскольку минимальный элемент сетки всё же превышает граничное значение R_g для достаточно больших Q , то для корректного задания граничных условий применялась процедура, аналогичная описанной в [67], а именно: поток на чёрную дыру формально относится к грани ячейки $R = 0$ и считается по формуле (3.24), где R – половина ширины крайней ячейки, а f – значение функции в этой ячейке. По этой формуле находим f_g и поток $S = \mathcal{D}f_g/\alpha$.

4.3.3 Варианты расчёта

Для выяснения относительного вклада различных факторов в эволюцию тёмной материи было проведено несколько расчётов для одной и той же модели начального распределения тёмной материи (модель Б1 – изотропное распределение с $\gamma_d = 1.5$):

1. Постоянная масса чёрной дыры ($M_{bh} = 3 \cdot 10^6 M_{\odot}$) – основной (референсный) вариант.
2. То же, плюс отсутствие диффузии по энергии (рассматривался в [63, 10]).
3. То же, но коэффициент диффузии по энергии взят не зависящим от момента (усреднённый по R).
4. Масса чёрной дыры растёт от $3 \cdot 10^4 M_{\odot}$ до $3 \cdot 10^6 M_{\odot}$ пропорционально \sqrt{t} . Этот вариант мотивируется рассмотрением роста чёрной дыры за счёт поглощения звезд, рассмотренным в [75]. Поглощение только тёмной материи не даёт необходимого роста массы чёрной дыры, поэтому он задаётся внешним образом.

Для остальных моделей расчёт проводился при постоянной массе чёрной дыры (как в варианте 1). Хотя очевидно, что масса чёрной дыры должна со временем увеличиваться, всё же к настоящему времени нет единой точки зрения на вопрос о том, в какое время и за счёт чего чёрная дыра набирает основную массу. Наличие квазаров на красных смещениях $z \approx 6$ [84] говорит о том, что сверхмассивные чёрные дыры существовали уже на ранних стадиях эволюции галактик. Поэтому мы будем проводить расчёты для $M_{bh} = \text{const}$, в том числе и из соображений сравнения с другими авторами.

Кроме того, для моделей Б1 и Б3 проводился расчёт вариантов с учётом самоаннигиляции тёмной материи (см. раздел 4.3.7).

Все варианты расчёта, их исходные параметры и основные результаты перечислены в таблице 4.1. Ниже мы прокомментируем отличия вариантов, обусловленные учётом тех или иных факторов.

4.3.4 Поглощение тёмной материи чёрной дырой

Как было отмечено выше, поглощение только тёмной материи не даёт необходимого роста массы чёрной дыры: поглощённая чёрной дырой масса тём-

№	модель, особенности		M_{init}	$M_{capt} (M_{capt}^h)$	M_{evap}	M_{ann}
1	Б1	$M_{bh} = \text{const}$	$1.2 \cdot 10^6$	$1.3 \cdot 10^5 (7 \cdot 10^4)$	$4.7 \cdot 10^5$	—
2	Б1	—, $\mathcal{D}_{QQ} = 0$	$1.2 \cdot 10^6$	$2.8 \cdot 10^5 (2 \cdot 10^5)$	—	—
3	Б1	—, \mathcal{D}_{QQ} не зависит от R	$1.2 \cdot 10^6$	$1.4 \cdot 10^5 (7.3 \cdot 10^4)$	$4.8 \cdot 10^5$	—
4	Б1	$M_{bh} \propto \sqrt{t}$	$1.2 \cdot 10^6$	$5.3 \cdot 10^4 (2 \cdot 10^4)$	$5.4 \cdot 10^5$	—
5	Б2	$M_{bh} = \text{const}$, рад.анизотропия	$6.1 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^5 (4.4 \cdot 10^4)$	$1.9 \cdot 10^5$	—
6	Б3	—	$2.6 \cdot 10^5$	$2.7 \cdot 10^4 (1.3 \cdot 10^4)$	$9.6 \cdot 10^4$	—
7	А1	—	$2.1 \cdot 10^6$	$5.6 \cdot 10^5 (2.3 \cdot 10^5)$	$4.1 \cdot 10^5$	—
8	Б1	—, аннигиляция	$1.2 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^5 (5.6 \cdot 10^4)$	$4.5 \cdot 10^5$	$3.7 \cdot 10^4$
9	Б3	—, аннигиляция	$2.6 \cdot 10^5$	$2.5 \cdot 10^4 (1.2 \cdot 10^4)$	$9.5 \cdot 10^4$	$2.6 \cdot 10^3$

Таблица 4.1: Варианты расчёта и основные результаты (на момент времени $t = 10^{10}$ лет).

M_{init} – начальная масса тёмной материи в пределах $r \leq r_h = 2$ пс (в M_\odot);

M_{capt} – масса тёмной материи, поглощённой чёрной дырой (в скобках – из области $r < r_h$);

M_{evap} – масса частиц, покинувших область $r < r_h$ за счёт испарения (диффузии по энергии);

M_{ann} – масса аннигилировавших частиц.

Все варианты, кроме 4, предполагают постоянную массу чёрной дыры ($M_{bh} = 3 \cdot 10^6 M_\odot$),

вариант 4 – растущую пропорционально \sqrt{t} от затравочной массы $3 \cdot 10^4 M_\odot$ до $3 \cdot 10^6 M_\odot$.

Последние два варианта учитывают аннигиляцию частиц (см. раздел 4.3.7).

ной материи не превышает 10% M_{bh} к настоящему моменту. Отметим, что противоположный вывод, сделанный в работах [63, 10] для модели А1 был сделан в пренебрежении диффузии по энергии и с использованием граничного условия поглощающей границы. Как видно из сравнения вариантов 1 и 2, “отключение” диффузии по энергии приводит к тому, что поток на чёрную дыру частиц с малыми Q убывает гораздо медленнее, т.к. они не “выметаются” в сторону больших Q , где диффузия идёт медленнее, а граничное условие обеспечивает меньший поток. Переоценка поглощённой массы только за счёт этого достигает примерно двух раз. Если же поставить граничное условие поглощающей границы для всех энергий, то мы получили бы поглощённую массу порядка $3 \cdot 10^6 M_\odot$, причём $M_{capt} \propto t^{9/16}$, в согласии

с результатами работы [10]. Впрочем, уже в следующей работе [12] было показано, что правильно поставленное граничное условие уменьшает оценку поглощённой массы примерно на порядок, а полноценное рассмотрение двумерной диффузии – ещё вдвое.

В целом, сравнивая графики 4.5б зависимости потока на чёрную дыру от времени для вариантов 1–5, можно сказать следующее: эволюция делится на два периода – $t \lesssim T_{D,c}$ (времени релаксации в кулоновской области, порядка $2 \cdot 10^9$ лет), и $t > T_{D,c}$. На первом этапе характер изменения потока зависит от учитываемых факторов и начальных условий; по прошествии $T_{D,c}$ в кулоновской области устанавливается более-менее универсальное распределение, а основной поток идёт уже из области балджа и примерно одинаков для всех вариантов. Его можно оценить из рассмотрения одномерной диффузии по R (раздел 4.1) для области балджа ($Q \gtrsim Q_h$), поскольку, как следует из рис. 4.5а, при $t > T_{D,c}$ доминирует поток из области балджа. Это же видно и на рис. 4.7 – зависимость потока от Q примерно одинакова у всех вариантов при $Q > Q_h$. Различия в поглощённой массе определяются, в основном, первым этапом эволюции.

Отметим ещё, что если масса чёрной дыры в начальный момент была невелика и постепенно увеличивалась до текущего значения (вариант 4), то количество поглощённой тёмной материи будет меньше, чем в случае постоянной массы чёрной дыры. Это объясняется тем, что размер кулоновской области пропорционален M_{bh} , а время релаксации в ней – M_{bh}^2 , так что при малой начальной массе чёрной дыры первый этап релаксации проходит быстрее, а на втором поток из области балджа просто сам по себе меньше (рис. 4.7).

4.3.5 Нагрев тёмной материи звёздами

Основную роль в уменьшении массы тёмной материи в области влияния чёрной дыры играет нагрев её звёздами: к настоящему времени масса тём-

ной материи в пределах центральных 2 пс уменьшилась приблизительно вдвое, причём основная потеря происходит именно за счёт нагрева.

Подчеркнём, однако, что рассмотрение только этого эффекта, как это сделано в работе [80], представляется слишком упрощённым. Хотя профиль плотности в центральной области имеет достаточно большой участок примерно постоянного показателя степени $1.5 \div 2$ (рис. 4.8), но вблизи чёрной дыры выходит на плато, что определяет меньшую интенсивность аннигиляционного излучения. Кроме того, используемое в этой работе предположение о квазиравновесном виде функции распределения, при котором $df(E)/dE = 0$ (отсутствует поток по энергии), не вполне удовлетворяется, как видно из рис. 4.11. Во-первых, это обусловлено тем, что время релаксации в кулоновской области всего в несколько раз меньше хаббловского, а как мы выяснили в разделе 4.2, функция распределения в этой области не выполаживается, как в балдже, а сохраняет степенную форму, уменьшаясь по амплитуде. Кроме того, что наиболее существенно, коэффициент диффузии по Q зависит от R , что наряду с диффузией по R обеспечивает существенную анизотропность функции распределения. Тем самым предположение о постоянной величине $f(Q, R)$ в квазиравновесном процессе диффузии не выполняется, а профиль плотности в кулоновской области отличается от степенного с показателем степени $-3/2$, который имел бы место в этом случае.

Сравнивая варианты 1 и 2, видим, что при пренебрежении диффузии по энергии (как было сделано в работах [63, 10]) картина эволюции существенно меняется: количество поглощённой чёрной дырой тёмной материи возрастает вдвое, но за счёт того, что отсутствует нагрев, масса тёмной материи в центральной области уменьшается гораздо медленнее (рис. 4.8). В целом, можно сказать, что такое пренебрежение представляется неоправданным.

При сравнении же вариантов 1 и 3 видно, что использование усреднён-

ного по моментам коэффициента диффузии по энергии не слишком существенно влияет на эволюцию тёмной материи.

4.3.6 Эволюция пространственной плотности тёмной материи

Пространственная плотность тёмной материи выражается через функцию распределения следующим соотношением:

$$\begin{aligned}
\rho(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int_0^{\infty} 2dv_r \int_0^{\infty} 2\pi v_t dv_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = & (4.16) \\
&= \frac{4\pi}{(\sigma r_1)^3} \int_{Q_{min}}^{\infty} dQ \int_0^{R_{max}(Q)} dR f(Q, R) \det \left| \frac{\partial\{v_r, v_t\}}{\partial\{Q, R\}} \right| v_t = \\
&= \frac{4\pi}{r^2 \sigma r_1} \int_{Q_{min}}^{\infty} dQ \int_0^{R_{max}} dR \frac{f(Q, R) \frac{dE}{dQ} \left(\frac{3Q}{\varkappa}\right)^{2/3}}{\sqrt{2[E(Q) - \Phi(r)] - \frac{R}{r^2} \left(\frac{3Q}{\varkappa}\right)^{2/3} (\sigma r_1)^2}}. \\
E(Q) &= \sigma^2 \left(1 + 2 \ln x - \frac{1}{2x}\right) + \Phi_h, \quad x = \frac{1}{4} \left(\sqrt{8 \left[\frac{3Q}{\varkappa} \left(\frac{r_1}{r_h}\right)^3 \right]^{2/3} + 1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Здесь $R_{max}(Q)$ – величина, при которой подкоренное выражение обращается в нуль; Q_{min} – величина, для которой $R_{max} = 0$.

Пользуясь этим выражением, мы можем рассчитать эволюцию пространственной плотности тёмной материи для наших модельных задач. Изменение профилей плотности со временем показано на рис. 4.9, 4.10. Видно, что характер эволюции следующий: в начальный момент $\rho(r) \propto r^{-(6-\gamma_a)/(4-\gamma_a)}$ в балдже (ф-ла 2.25 с $\gamma_b = 2$), $\rho \propto r^{-(9-2\gamma_a)/(4-\gamma_a)}$ в области влияния чёрной дыры (та же ф-ла с $\gamma_b = 3$). В процессе эволюции плотность при совсем малых радиусах резко уменьшается из-за совместного влияния поглощения чёрной дырой и нагрева, а при наличии аннигиляции (см. следующий раздел) – и из-за неё. В целом при $t \lesssim T_{D,c}$ в зоне влияния чёрной дыры плотность уменьшается для разных радиусов примерно в одно и то же количество раз, что отвечает постоянству времени диффузии $T_{D,c}$ внутри этой зоны. При бóльших временах падение плотности обеспечивается

в основном нагревом частиц (диффузией по Q): к примеру, для варианта 1 масса поглощённой материи из области $r < r_h$ при $t = 2 \cdot 10^9$ лет составляет $4 \cdot 10^4 M_\odot$, а испарившейся – $17 \cdot 10^4 M_\odot$. При $t = 10^{10}$ лет эти величины равны соответственно $7 \cdot 10^4 M_\odot$ и $52 \cdot 10^4 M_\odot$.

4.3.7 Аннигиляция тёмной материи

Во многих моделях тёмная материя состоит из частиц, которые способны к самоаннигиляции [3]. Интенсивность аннигиляции в данной точке пространства \mathbf{x} пропорциональна частоте столкновений частиц ν :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial t} = -\nu f, \quad \nu = \int d^3v' f(\mathbf{x}, \mathbf{v}') \sigma_a v_\chi / m_\chi. \quad (4.17)$$

Здесь функция распределения записана в переменных координата–скорость; σ_a – сечение аннигиляции, $v_\chi = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|$ – относительная скорость частиц; m_χ – масса частицы. Произведение $\sigma_a v_\chi$ слабо зависит от v_χ , поэтому можно проинтегрировать по \mathbf{v}' : $\nu = \rho(\mathbf{x}) \langle \sigma_a v_\chi \rangle / m_\chi$, ρ – плотность частиц в данной точке.

В отсутствие других факторов уравнение (4.17) имеет тривиальное решение: проинтегрировав уравнение (4.17) по \mathbf{v} , получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho^2 \langle \sigma_a v_\chi \rangle / m_\chi, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{x}) \rho_a(t)}{\rho_0 + \rho_a}, \quad \rho_a = \frac{m_\chi}{\langle \sigma_a v_\chi \rangle t}, \quad (4.18)$$

где ρ_0 – начальная плотность, а ρ_a – так называемое “аннигиляционное плато” (максимальная величина плотности) [85, 53].

Для включения эффекта аннигиляции в наш расчёт нужно локальную частоту столкновений усреднить по орбите частицы согласно (3.14):

$$\frac{\partial f(Q, R)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{diff} - \tilde{\nu} f, \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{T} \oint \nu(r) \frac{dr}{v_r}. \quad (4.19)$$

Очевидно, что аннигиляция существенно не влияет на эволюцию распределения тёмной материи, если при пренебрежении ей $\rho(r, t) \ll \rho_a(t)$ для всех r . В противоположном случае при малых радиусах потери частиц

и изменение профиля плотности за счёт аннигиляции могут стать существенными.

Для оценки относительного вклада аннигиляции в общие потери частиц были проведены расчёты эволюции для значений параметров $m_\chi = 50$ ГэВ, $\langle\sigma_a v_\chi\rangle = 3 \cdot 10^{-26}$ см³/с (взяты из [81]), что даёт близкий к максимально допустимому по современным представлениям темп аннигиляции. Расчёты проводились для моделей Б1 и Б3, результаты приведены на рис. 4.8, 4.10а. Как и следовало ожидать, аннигиляция ограничивает плотность тёмной материи при совсем малых радиусах, но не очень влияет на количество поглощённой или тем более испарённой из центральной области тёмной материи, так как существенна только для очень малых Q .

4.3.8 Детектирование аннигиляционного излучения

Наблюдаемым проявлением аннигиляции тёмной материи может служить регистрация гамма-квантов в направлении на центр Галактики [3, 49]. Расчёт потока гамма-квантов производится по формуле [86]

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma &= \frac{\langle\sigma_a v_\chi\rangle}{4\pi m_\chi^2} \int_{l.o.s.} dl \rho^2(r) = & (4.20) \\ &= 1.87 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}\text{ср}^{-1} \times \left(\frac{\langle\sigma_a v_\chi\rangle}{10^{-29} \text{ см}^3\text{с}^{-1}} \right) \left(\frac{10 \text{ ГэВ}}{m_\chi} \right)^2 \times J(\phi), \\ J(\phi) &= \frac{1}{R_\odot \rho_\odot^2} \int_{l.o.s.} dl \rho^2(r(l, \phi)). \end{aligned}$$

Здесь $\int_{l.o.s.}$ обозначает интегрирование вдоль луча зрения, ϕ – угол между направлением на центр Галактики и лучом зрения; нормировочные коэффициенты $R_\odot = 8.5$ кпс и $\rho_\odot = 0.3$ ГэВ/см³ – соответственно, расстояние до центра Галактики и плотность тёмной материи в окрестностях Солнца. Как видно, поток определяется произведением двух сомножителей – первый отвечает за физику элементарных частиц (массу и сечение аннигиляции частиц), а второй (астрофизический) – за распределение плотности тёмной материи.

Поскольку детекторы имеют конечное угловое разрешение $\Delta\Omega$ (телесный угол в стерadiansах), то для получения регистрируемого потока надо величину J усреднить по телесному углу $\Delta\Omega$:

$$\bar{J} = \Delta\Omega^{-1} \int_0^{\sqrt{\Delta\Omega/\pi}} J(\phi) 2\pi\phi d\phi. \quad (4.21)$$

Пространственное разрешение, соответственно, равно $r_{av} = R_\odot \sqrt{\Delta\Omega/\pi}$. Переписывая это выражение в терминах пространственной плотности, получим

$$\bar{J} = \frac{4\pi}{\Delta\Omega \rho_\odot^2 R_\odot^3} \left[\int_0^{r_{av}} r^2 dr \rho^2(r) + \int_{r_{av}}^\infty r r_{av} dr \rho^2(r) \right]. \quad (4.22)$$

Современные детекторы (EGRET [87], HESS [88] и т.д.) имеют угловое разрешение порядка 10^{-3} ср; планируемый спутниковый телескоп GLAST будет иметь разрешение 10^{-5} ср. Это соответствует усреднению в пространстве по области радиусом $r_{av} = 150$ пс и 15 пс соответственно, что гораздо больше области влияния чёрной дыры, в которой плотность существенно эволюционирует со временем. Вне этой области плотность пропорциональна $r^{-\gamma'_d}$, $\gamma'_d = (6 - \gamma_d)/(4 - \gamma_d) \approx 1.7$ (2.25). Поэтому вклад от аннигиляции за пределами r_{av} – второе слагаемое в (4.22) – мал по сравнению с первым.

Вычислим величины \bar{J}_3 и \bar{J}_5 для $\Delta\Omega = 10^{-3}$ и 10^{-5} соответственно (таблица 4.2).

Как видно, наличие диффузии и сопутствующее ей падение плотности колоссально уменьшает поток аннигиляционного излучения. Следует отметить, что поскольку все модели, кроме 8 и 9, рассчитывались без учёта аннигиляции, то их результаты справедливы при не очень большом сечении аннигиляции, таком что $\rho_a \gg \rho(r)$ для всех r . В противоположном случае (модели 8 и 9) падение плотности ещё более сильное (рис. 4.8, 4.10), а поток, соответственно, ещё меньше – но, как видно из таблицы, диффузия сама по себе обеспечивает достаточно сильное падение потока.

Величины для модели 9 совпадают с вычисленными в работе [81] на

№ варианта	в начальный момент		в настоящее время	
	\bar{J}_3	\bar{J}_5	\bar{J}_3	\bar{J}_5
1 (Moore)	$2 \cdot 10^{16}$	$2 \cdot 10^{18}$	$1.1 \cdot 10^7$	$1.1 \cdot 10^9$
4 (Moore, $M_{bh} \propto \sqrt{t}$)	—	—	$1.1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^8$
8 (Moore, аннигиляция)	—	—	$1.2 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^8$
6 (NFW)	$1.5 \cdot 10^{14}$	$1.5 \cdot 10^{16}$	$2.7 \cdot 10^5$	$2.5 \cdot 10^7$
9 (NFW, аннигиляция)	—	—	$9.2 \cdot 10^4$	$7.6 \cdot 10^6$

Таблица 4.2: Поток (обезразмеренный) аннигиляционного излучения для некоторых из расчётных моделей (начальный и к настоящему моменту).

основе рассмотрения одномерного уравнения диффузии по энергии и аннигиляции с теми же параметрами, что и в модели 9 (последняя строчка в их таблице 1). Что же касается расчёта при пренебрежимо малом сечении аннигиляции, то, как уже было отмечено, падение плотности достаточно сильное и в этом случае, чего не наблюдается в работе [81].

Современные наблюдения на телескопах H.E.S.S. [88], VERITAS [89], CANGAROO [90] и MAGIC [91] показывают наличие источника гамма-излучения в направлении на центр Галактики. Интерпретация его в свете аннигиляции тёмной материи возможна [51, 92], хотя и сталкивается с некоторыми трудностями [93]. Как было указано выше, существует вырождение между микрофизическими параметрами тёмной материи (масса, сечение аннигиляции) и астрофизическими (распределение плотности). В целом исследователи сходятся на том, что при имеющихся наблюдательных ограничениях параметр \bar{J} (4.22) может принимать значения в диапазоне $10^5 - 10^9$ при достаточно правдоподобных величинах массы и сечения частиц тёмной материи [49, 51, 94, 95]. Как видно из таблицы 4.2, именно такие величины \bar{J} к настоящему времени и получаются в наших расчётах.

Следует отметить, что рассмотренные процессы адиабатического сжатия, диффузии и аннигиляции приводят к тому, что современные значения \bar{J} лежат в существенно более узком диапазоне, чем в их отсутствие.

Таким образом, неопределённость в микрофизических параметрах тёмной материи уменьшается.

Кроме того, как видно из таблицы 4.1, тёмная материя к настоящему моменту может составлять до 10% массы вещества в пределах центральных 2 пс, что в принципе делает возможным её обнаружение и по динамике звёзд [13].

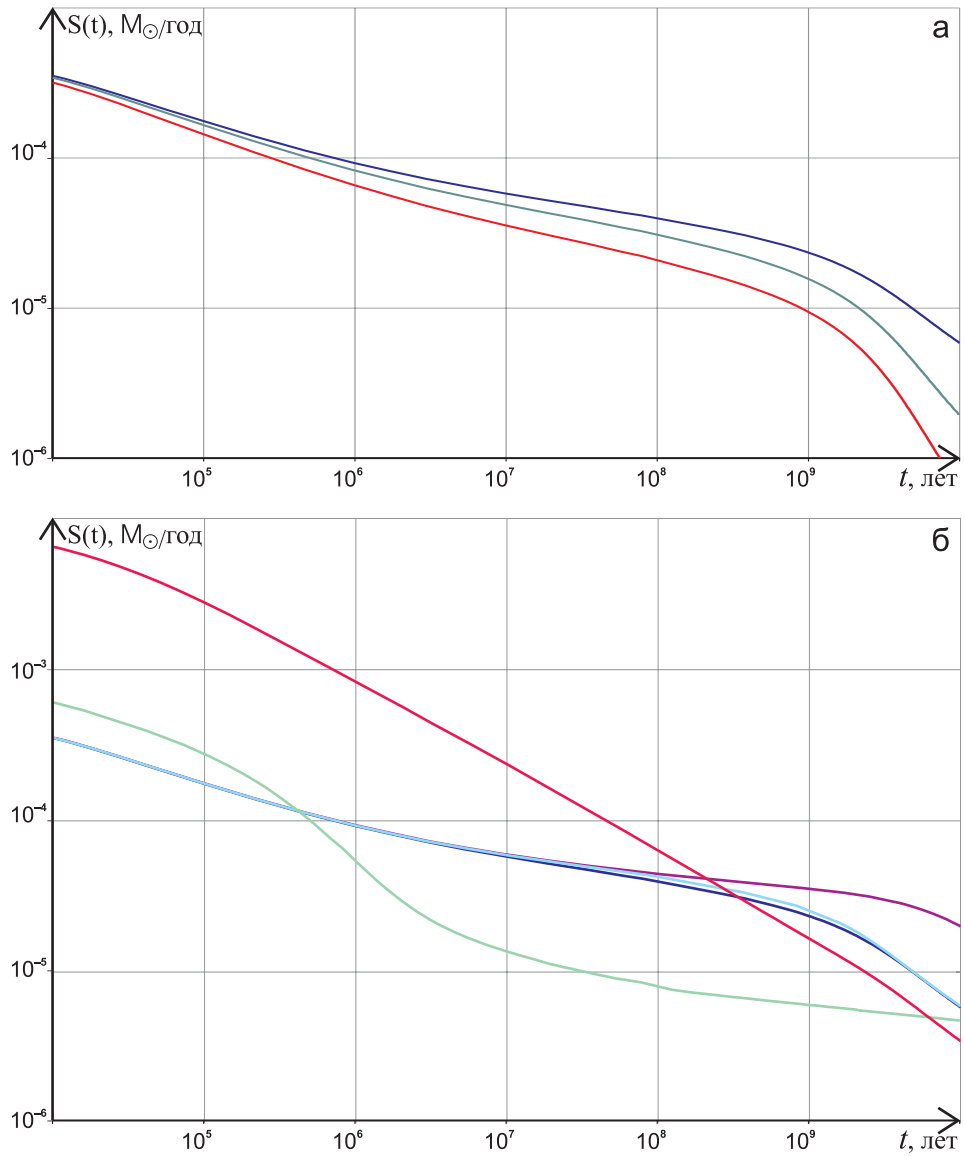


Рис. 4.5: Поток тёмной материи на чёрную дыру в зависимости от времени.

Верхняя панель: вариант 1, сверху вниз: синяя линия – полный поток, зелёная – поток из области влияния чёрной дыры ($Q < Q_h$), красная – поток из области пустого конуса потерь ($Q < Q_{cr}$).

Нижняя панель, сверху вниз: красная линия – вар.5, салатная – вар.4, фиолетовая – вар.2, голубая – вар.3, синяя – вар.1.

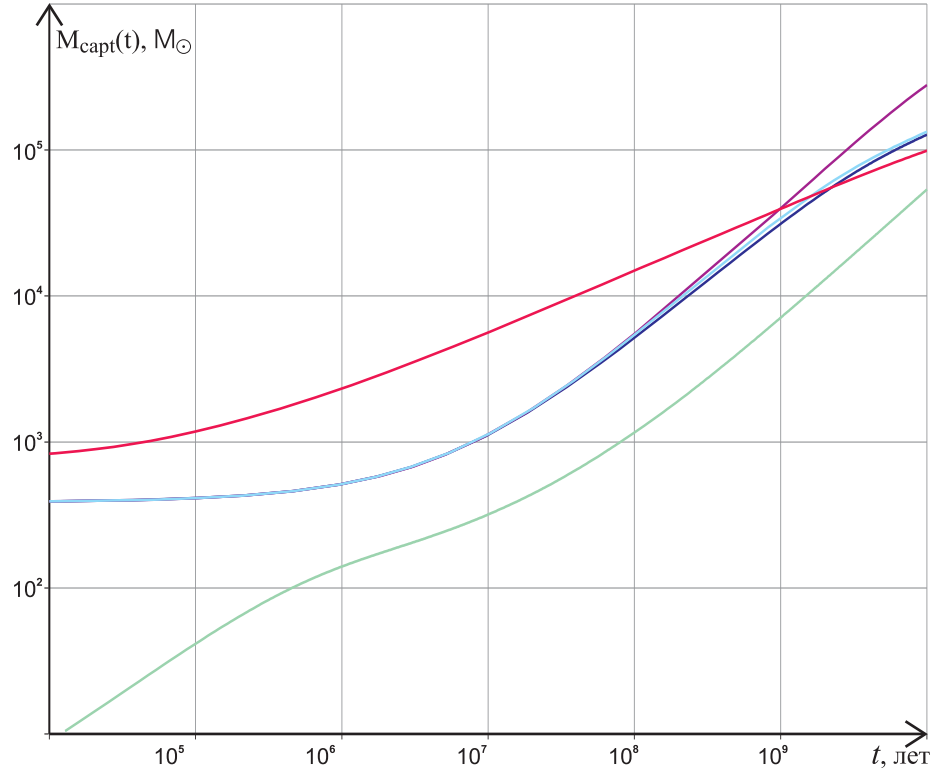


Рис. 4.6: Масса тёмной материи, поглощённой чёрной дырой, в зависимости от времени. Сверху вниз: красная линия – вар.5, фиолетовая – вар.2, голубая – вар.3, синяя – вар.1, салаточная – вар.4.

При $t = 0$ в вариантах 1-3, 5 поглощённая масса $M_{capt} = 400 M_{\odot}$ за счёт прямого поглощения частиц с $R < R_g$.

Комментарий к этому и предыдущему рисункам.

Видно, что в вариантах 1-3 кривая роста идёт примерно одинаковым образом при $T \lesssim T_{D,c} \sim 2 \cdot 10^9$ лет, затем в вариантах 1 и 3 рост замедляется и выходит на асимптоту $S \propto t^{-0.6}$, при пренебрежении диффузией по Q (вар.2) этого не происходит. В вар.5 (при умеренной радиальной анизотропии скоростей) на начальном этапе поток больше, но потом выходит на ту же асимптоту и примерно ту же величину поглощённой массы. Если же масса чёрной дыры вначале была мала и росла со временем (вар.4), то $T_{D,c}$ гораздо меньше и переход к стадии медленного роста происходит намного раньше. Однако из-за дальнейшего увеличения M_{bh} вновь наступает стадия почти постоянного потока, хотя конечная величина поглощённой массы оказывается существенно ниже, чем в вар.1.

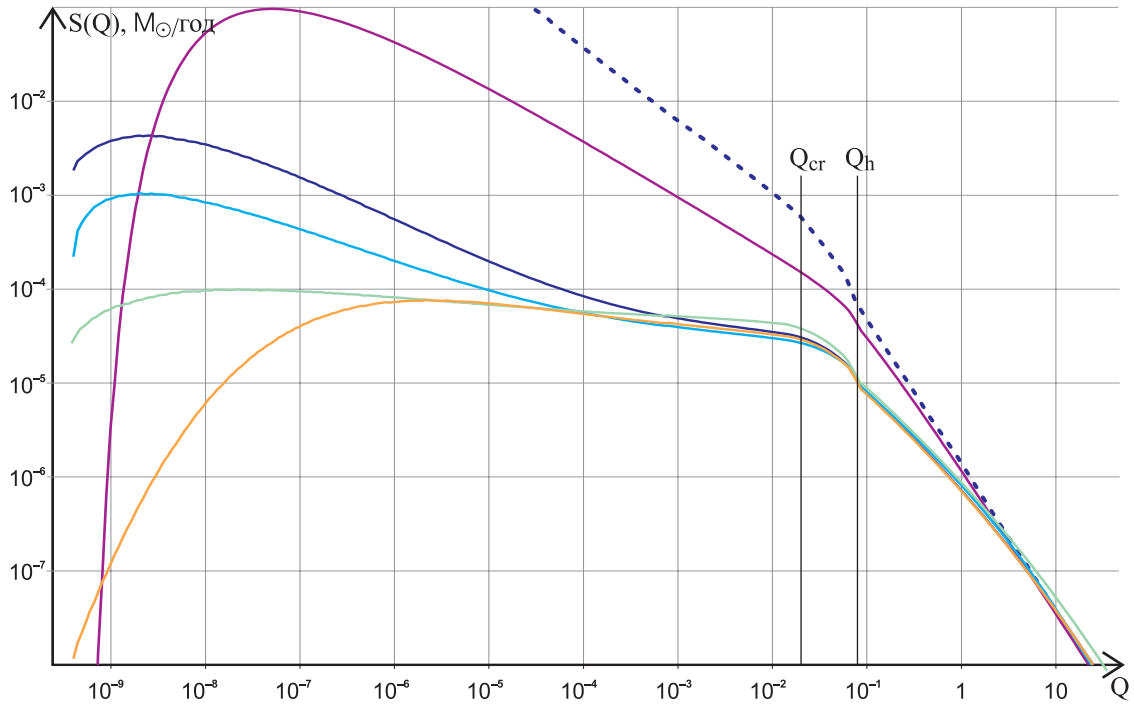


Рис. 4.7: Поток тёмной материи на чёрную дыру в настоящее время в зависимости от Q .

Сплошные линии, сверху вниз: фиолетовая – вар.2, синяя – вар.1, голубая – вар.3, салатная – вар.4, оранжевая – вар.8.

При $Q > Q_h$ поток убывает как $Q^{-1.6}$, согласно оценкам из раздела 4.1. При $Q < Q_{cr}$ поток примерно пропорционален величине $f(Q)$ (см. рис. 4.11). Для сравнения синими точками показан поток в вар.1 в момент времени $t = 10^{-4}T_h$, когда квазистационарная логарифмическая зависимость $f(R)$ ещё не установилась и доминирует диффузия по R (см. раздел 4.1).

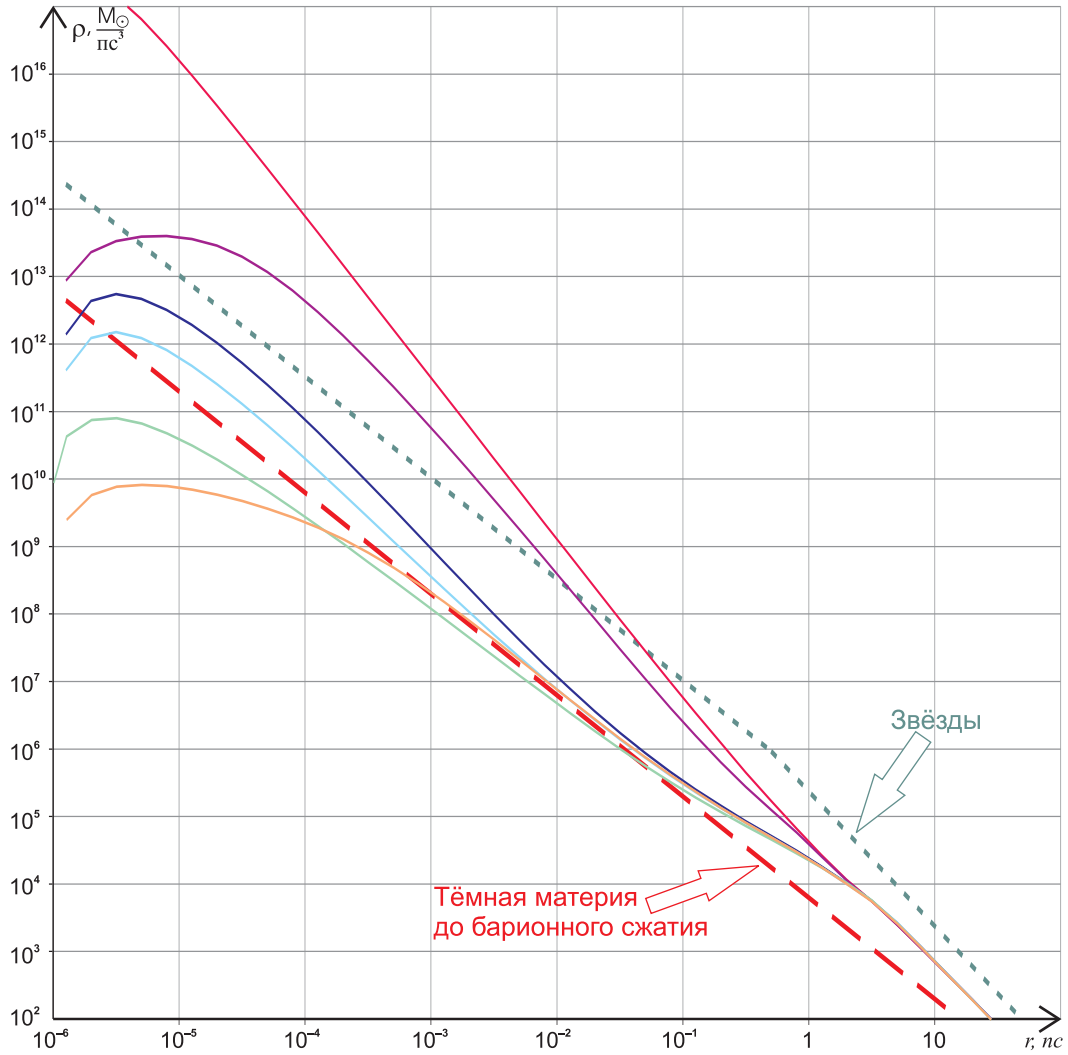


Рис. 4.8: Профили плотности тёмной материи для вариантов 1–4, 8 (сверху вниз): красная линия – в начальный момент ($t = 0$, $\rho \propto r^{-2.4}$ при $r < 0.2r_h$); остальные – к настоящему времени ($T_h = 10^{10}$ лет):

фиолетовая – вар.2; синяя – вар.1; голубая – вар.3; салатная – вар.4; оранжевая – вар.8. Для сравнения показаны профиль плотности звёзд (зелёный пунктир) и тёмной материи до барионного сжатия ($\rho \propto r^{-3/2}$, красный пунктир).

При малых радиусах имеется достаточно большой степенной участок $\rho \propto r^{1.5 \div 2}$, при совсем малых – плотность обрезается. В варианте 8 плотность ограничена сверху величиной аннигиляционного плато $\rho_a = 1.3 \cdot 10^8 M_\odot/\text{пс}^3$.

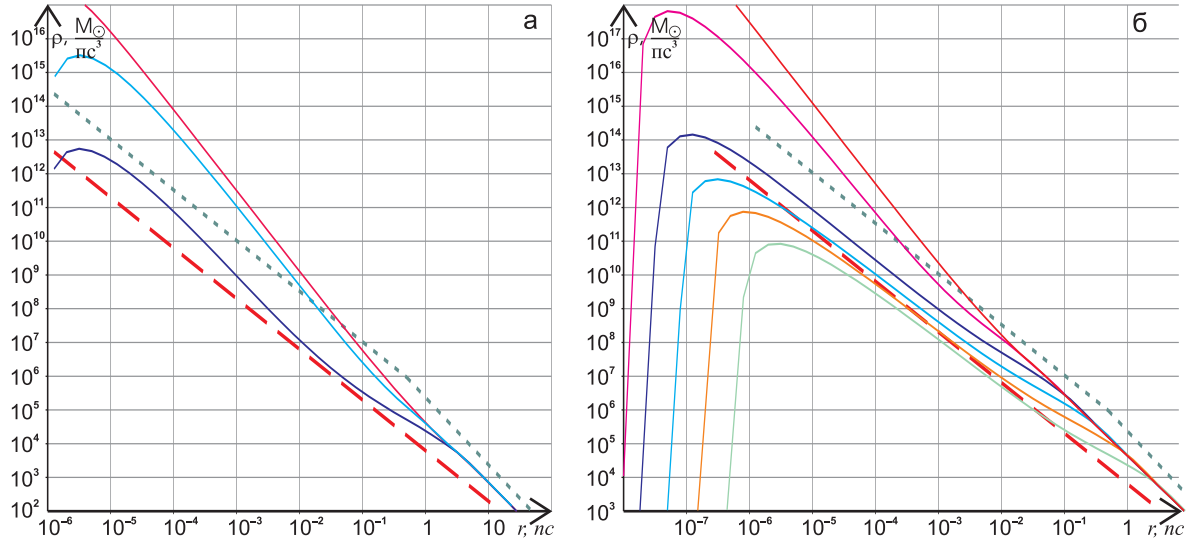


Рис. 4.9: Эволюция плотности тёмной материи для вариантов 1 и 4:

Левая панель: вариант 1, сверху вниз: красная линия – $t = 0$ (начальное после образования чёрной дыры), голубая – $t = 2 \cdot 10^9$ лет ($\approx T_{D,c}$ – время релаксации в области влияния чёрной дыры), синяя – к настоящему моменту. Видно, что релаксация в центральной области приводит к более-менее равномерному уменьшению плотности при всех $r < r_h$, что отвечает постоянству $T_{D,c}$ для всей кулоновской области. Дальнейшая эволюция и нагрев приводят к более существенному уменьшению плотности.

Правая панель: вариант 4 (растущая масса чёрной дыры от $3 \cdot 10^4 M_\odot$ до $3 \cdot 10^6 M_\odot$), сверху вниз: красная линия – $t = 0$, фиолетовая – $t = 10^6$ лет, синяя – $t = 10^7$ лет, голубая – $t = 10^8$ лет, оранжевая – $t = 10^9$ лет, салатная – к настоящему моменту ($t = 10^{10}$ лет). Здесь релаксация в центральной области происходит уже к моменту $t \sim 10^6$ лет, при этом $r_h \approx 0.04$ пс. Дальше видно резкое падение плотности из-за нагрева (как в варианте 1, но гораздо раньше), а затем – самоподобная эволюция, отвечающая участку слабо меняющегося потока на рис. 4.5б.

Зелёным пунктиром показана плотность звёзд, красным – профиль плотности тёмной материи до барионного сжатия.

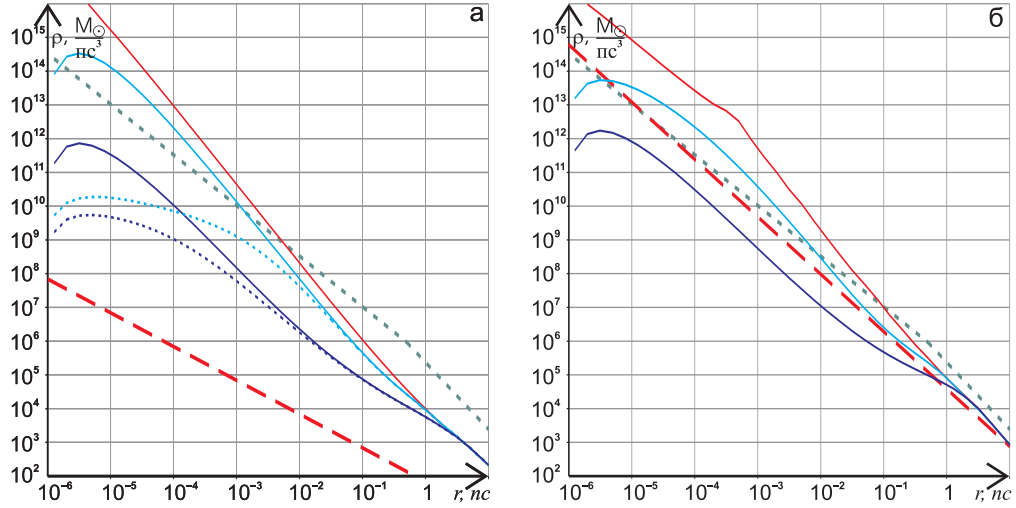


Рис. 4.10: Эволюция плотности тёмной материи для вариантов 6, 7 и 9:

Левая панель: варианты 6 и 9 (начальное распределение типа NFW, с $\gamma_d = 1$), сверху вниз: красная линия – $t = 0$ (начальное после образования чёрной дыры), голубая – $t = 2 \cdot 10^9$ лет, синяя – к настоящему моменту. Сплошные линии – вариант 6, точечные – вариант 9 (с аннигиляцией). Видно, что аннигиляция существенно влияет на плотность при совсем малых радиусах, ограничивая её величиной $\rho_a(t)$ (4.18).

Правая панель: вариант 7 (начальное распределение типа Гуревича-Зыбина, с $\gamma_d = 1.7$), сверху вниз: красная линия – $t = 0$, голубая – $t = 2 \cdot 10^9$ лет, синяя – к настоящему моменту. Излом на начальном профиле объясняется тем, что из-за сильно вытянутых орбит отсутствуют частицы с низкими энергиями, перигент орбит которых оказывается меньше, чем $4r_g$.

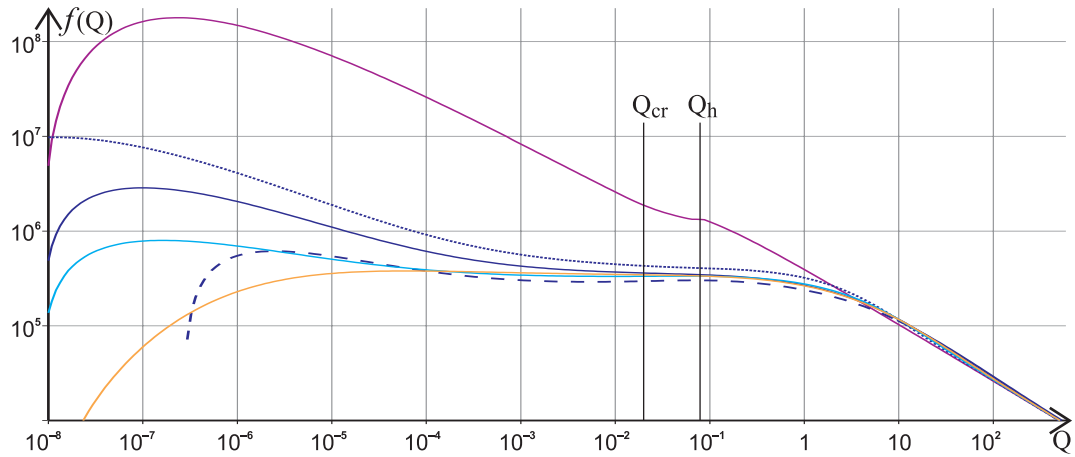


Рис. 4.11: Вид функции распределения в зависимости от Q при фиксированном R в настоящий момент времени. Сплошные линии (сверху вниз) – для $R = 0.1$: фиолетовая – вар.2, синяя – вар.1, голубая – вар.3, оранжевая – вар.8. Синие точки – вар.1, $R = 0.01$, синий пунктир – вар.1, $R = 1$.

При учёте только диффузии по Q функция распределения была бы постоянной на участке $Q < Q_h$. Ближе всего к этой ситуации вариант 3 (усреднённый по R коэффициент диффузии \mathcal{D}_{QQ}), в остальных случаях функция не полностью выполаживается при малых Q . Кроме того, как видно из сравнения значений функции при разных R (для варианта 1, синие линии), вид и величина функции довольно существенно зависит и от R . Таким образом, предположение работы [80] о квазиравновесном виде функции, в котором $\partial f / \partial Q = 0$, не выполняется.

В варианте 8 с аннигиляцией функция распределения проседает при малых Q (зависимость $f(Q)$ близка к линейной, которая соответствовала бы плоскому профилю плотности $\rho(r) = \rho_a$, но из-за диффузии не полностью ей соответствует).

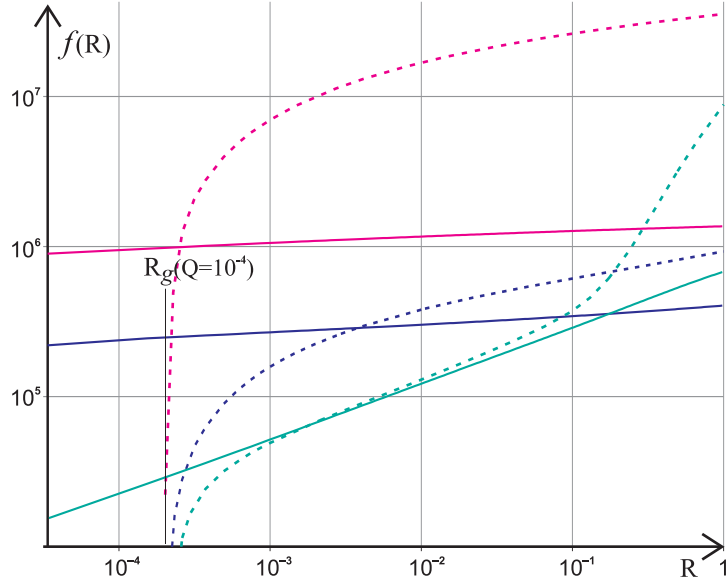


Рис. 4.12: Вид функции распределения в зависимости от R при фиксированном Q в настоящий момент времени.

Пунктирные линии – для $Q = 10^{-4}$, при этом $R_g = 2 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-2}$ (режим точечного стока). Сверху вниз: фиолетовая – вар.2 (отсутствие диффузии по Q), синяя – вар.1, салатовая – решение для одномерной диффузии по Q , при отсутствии диффузии по R . Сплошные линии – для $Q = 0.1$, при этом $R_g = 2 \cdot 10^{-6}$, $\alpha = 15$ (режим полного конуса потерь). Цвета те же.

Рисунок иллюстрирует отличие решения полного двумерного уравнения (вар.1) от соответствующих одномерных пределов. При учёте только диффузии по Q , как было показано в разделе 4.2, $f(Q) = (D_Q t)^{-1}$ (4.13), где $D_Q \propto R^{-0.4 \div 0.5}$, что и демонстрируют салатовые линии. (При $Q = 10^{-4}$ и $R > 0.2$ диффузия ещё не достигла стадии выхода на плато, поэтому кривая загибается вверх).

При рассмотрении только диффузии по R (фиолетовые линии) функция имеет вид логарифма от R при $\alpha \lesssim 1$ и практически константы при $\alpha \gtrsim 1$.

Решение же полного двумерного уравнения лежит где-то между этими предельными случаями, вообще говоря, сильно отличаясь от каждого из них.

Начальное значение функции (при $t = 0$) равно 10^8 для $Q = 10^{-4}$ и $1.6 \cdot 10^6$ для $Q = 0.1$.

Заключение

В данной работе изучен вопрос об эволюции тёмной материи в центральных областях галактик под влиянием гравитационного взаимодействия с обычным (барионным) веществом и чёрной дырой в центре галактики (на примере Млечного Пути).

Рассмотрение начинается с момента образования гравитационно связанного объекта – предшественника галактики. В расчётах используется два класса моделей начального строения гало тёмной материи. В обоих случаях профиль плотности имеет степенной вид ($\rho(r) \propto r^{-\gamma_d}$, $1 \leq \gamma_d < 2$), которому соответствует степенное распределение по энергии. Зависимость от углового момента имеет непрерывный вид в модели А и δ -образный в модели В.

Падение барионной материи в потенциальную яму, созданную тёмной материей, приводит к формированию галактики и преобладанию барионов в её центральной части – балдже. Изменение гравитационного потенциала в этом процессе меняет и распределение тёмной материи. Этот эффект называется барионным сжатием и рассмотрен в главе 2. Стандартный способ расчёта сжатия (метод Блюменталья) использует сохранение только углового момента, т.е. фактически пригоден только для круговых орбит. При наличии же некоторого распределения частиц по угловым моментам, как показано в разделе 2.2, степень сжатия оказывается меньше, чем рассчитанная по стандартному способу. Особенно это заметно для сильно радиально анизотропных моделей начального распределения тёмной материи, и при достаточно пологом начальном профиле плотности. Попутно рассчитано

изменение показателя анизотропии скоростей, которое может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от модели.

После образования галактики дальнейшая эволюция определяется гравитационным рассеянием частиц тёмной материи на звёздах балджа и поглощением их сверхмассивной чёрной дырой, расположенной в центре балджа. Чёрная дыра массы M_{bh} определяет гравитационный потенциал в зоне радиусом $r_h = 2GM_{bh}/\sigma^2$, где σ – дисперсия скоростей звёзд в балдже. Гравитационное рассеяние приводит к диффузии тёмной материи, которая описывается уравнением Фоккера-Планка (3.3). Процесс рассматривается в переменных $\{Q, R\}$, где $Q(E)$ – некоторая функция от энергии, $R = L^2/L_c^2$ – нормированный квадрат углового момента ($R = 1$ соответствует круговой орбите с заданной энергией, $R = 0$ – радиальной). Выбор переменных связан с удобством описания одновременно области влияния чёрной дыры и остальной части балджа.

В третьей главе вычислены коэффициенты диффузии для уравнения (3.3), отдельно для области влияния чёрной дыры и балджа. Существенным обстоятельством, ранее не учитывавшимся, оказывается зависимость коэффициента диффузии по энергии \mathcal{D}_{QQ} от величины R (он увеличивается при малых R). Рассмотрено граничное условие, обусловленное наличием чёрной дыры (раздел 3.3). Хотя она поглощает частицы с $R < R_g$ (угловым моментом меньше критического значения) при пролёте частицы через перицентр орбиты, но при этом функция распределения, усреднённая по орбите, не обязана обращаться в ноль при $R < R_g$. Напротив, при достаточно большом орбитальном периоде диффузия приводит к быстрому заполнению области $R < R_g$ в фазовом пространстве, при этом наличие чёрной дыры обеспечивает небольшой сток частиц. Эта ситуация называется полным конусом потерь, в противоположность случаю, когда за один период частицы не успевают существенно продиффундировать в область $R < R_g$ и функция распределения близка к нулю в этой области. Два режи-

ма поглощения разделяются критическим значением энергии Q_{cr} , которое для нашей Галактики оказывается меньше, чем величина Q_h , разделяющая область влияния чёрной дыры и балдж.

В четвёртой главе полученное уравнение решается сначала с помощью аналитического рассмотрения одномерных пределов. При учёте только диффузии по моменту (т.е. по R) мы изучаем поглощение частиц тёмной материи чёрной дырой. За время порядка $1/\mathcal{D}_{RR}$ (\mathcal{D}_{RR} – коэффициент диффузии) устанавливается квазистационарный вид функции распределения, имеющий логарифмическую зависимость от R . Далее поглощение частиц приводит к уменьшению нормировки функции распределения при неизменном её виде. Диффузия по энергии (т.е. по Q) описывает эффект нагрева частиц звёздами. При этом начальная функция распределения, имеющая вид $f \propto Q^{-\epsilon}$, вылаживается на участке $Q < Q_D(t)$. Временная шкала этого процесса оказывается того же порядка, что и для диффузии по моменту, и уменьшается с уменьшением момента, что не позволяет пренебречь никаким из этих двух явлений. Поэтому в любом случае оказывается необходимым решение полного двумерного уравнения, которое получено методом численного конечно-разностного интегрирования.

Проведён расчёт эволюции для нескольких вариантов начального распределения тёмной материи с учётом различных эффектов. Для начала при фиксированной начальной модели строения гало изучается влияние на эволюцию некоторых упрощающих предположений. Базовый вариант расчёта предполагает постоянную массу чёрной дыры, изотропию скоростей и отсутствие аннигиляции. Оказывается, что при пренебрежении диффузией по энергии картина эволюции существенно меняется: если в базовом варианте примерно половина массы из области $r < r_h$ испаряется за счёт диффузии по энергии и примерно 1/10 часть поглощается чёрной дырой, то в случае пренебрежения диффузией по энергии нагрев отсутствует, а поглощённая масса увеличивается вдвое. Таким образом, такое пренебре-

жение неоправдано. Если использовать усреднённый по угловому моменту коэффициент диффузии по энергии, как делается в большинстве остальных работ, то ситуация не очень сильно отличается от расчёта с зависящим от момента коэффициентом диффузии. В случае же малой начальной (и растущей со временем) массы чёрной дыры поглощённая чёрной дырой масса меньше, чем в базовом варианте, а испарённая – больше, поскольку релаксация в центральной области протекает быстрее при меньшей массе чёрной дыры.

Остальные варианты расчёта проведены при постоянной массе чёрной дыры и учёте всех коэффициентов диффузии. Конечным результатом является масса поглощённой тёмной материи и профиль плотности тёмной материи в центральной области. Он существен для возможного наблюдательного обнаружения тёмной материи по регистрации излучения от её аннигиляции, интенсивность которого пропорциональна квадрату плотности. Рассчитаны множители, отвечающие за распределение плотности, в формуле (4.20) интенсивности излучения, для каждого из вариантов. В достаточно широком диапазоне микрофизических параметров частиц тёмной материи имеется согласие этих множителей с наблюдательными данными. Кроме того, в двух вариантах расчёта учтены и потери на аннигиляцию в уравнении эволюции распределения тёмной материи. Эти варианты отличаются уменьшением «потолка» плотности тёмной материи при малых радиусах. Общая масса аннигилировавших частиц во всех случаях невелика.

Таким образом, проведено подробное исследование эволюции распределения тёмной материи в центрах галактик с учётом различных факторов. Результаты диссертации, выносимые на защиту, таковы:

1. Для ряда моделей начального строения гало аналитически рассчитан процесс барионного сжатия, происходящего при охлаждении и конденсации к центру барионного вещества в процессе образования га-

лактики (раздел 2.2). Показано, что традиционная простейшая модель расчёта переоценивает степень сжатия гало тёмной материи, особенно для сильной радиальной анизотропии скоростей частиц и для пологого начального профиля плотности.

2. Для уравнения Фоккера-Планка (диффузии), описывающего эволюцию тёмной материи под совместным воздействием гравитационного рассеяния на звёздах ядра галактики (балджа), поглощения чёрной дырой и аннигиляции, вычислены диффузионные коэффициенты для балджа и области влияния чёрной дыры (раздел 3.2) и определены граничные условия (раздел 3.3).
3. Исследованы одномерные приближения уравнения Фоккера-Планка, описывающие диффузию по угловому моменту и поглощение частиц чёрной дырой, и диффузию по энергии и нагрев частиц звёздами (разделы 4.1 и 4.2). Получены качественные характеристики этих процессов: характерные времена релаксации, вид функции распределения. Рассмотрено полное двумерное уравнение диффузии, построена численная схема для его решения (раздел 4.3). Исследованы принципиальные отличия решения от одномерных случаев, его зависимость от начальных данных и от учёта различных факторов эволюции. Показано, что динамика распределения тёмной материи в центральной части балджа при рассмотрении двумерной диффузии существенно отличается от одномерных приближений. Различия в эволюции для разных начальных моделей существенны в интервале времени, меньшем времени релаксации в центральной области (около 2 млрд. лет), дальнейшая эволюция происходит сходным образом. Для варианта, когда масса чёрной дыры в начале эволюции была гораздо меньше нынешней величины, влияние нагрева звёздами более существенно, и к настоящему моменту количество тёмной материи в центре оказывается

меньше, чем при постоянной массе чёрной дыры.

4. На основе построенной методики проведён расчёт эволюции распределения тёмной материи в центре нашей Галактики для ряда моделей начального строения гало. Рассчитано изменение пространственной плотности тёмной материи и возможность её исследования по наблюдению аннигиляционного излучения из центра Галактики. Показано, что около половины начальной массы тёмной материи в пределах области влияния чёрной дыры покидает эту область из-за нагрева, примерно 10% поглощается чёрной дырой. Интенсивность излучения от аннигиляции тёмной материи согласуется с наблюдаемыми величинами.

Я благодарю моего научного руководителя, М. И. Зельникова, за постоянное внимание к работе, ценные комментарии и идеи, А. С. Ильина, В. А. Сироту и К. П. Зыбина – за плодотворные обсуждения, В. Л. Гинзбурга, Ю. М. Брука и других сотрудников Отделения теоретической физики ФИАН и кафедры Теоретической физики и астрофизики МФТИ – за поддержку и созданные для работы условия.

Литература

- [1] J. Silk, “The dark side of the Universe”; *Int.J.Mod.Phys. A* **17** S1, 167 (2002).
- [2] J. Primack, “Precision cosmology”; *New Astron.Rev.* **49**, 25 (2005).
- [3] G. Bertone, D. Hooper, J. Silk, “Particle Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints”; *Phys.Rept.* **405**, 279 (2005).
- [4] А.В. Гуревич, К.П. Зыбин, “Крупномасштабная структура вселенной. Аналитическая теория”; *УФН* **165**, №7, 723 (1995).
- [5] V. Springel, S. White, A. Jenkins et al., “Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution”; *Nature* **435**, 629 (2005).
- [6] Е.А. Васильев, “Строение и адиабатическое сжатие гало тёмной материи: простая аналитическая модель”; *Письма в ЖЭТФ* **84**, №2 (2006).
- [7] А.М. Черепашук, “Поиски чёрных дыр”; *УФН* **173**, 4 (2003).
- [8] R. Genzel, R. Schödel, T. Ott et al., “The Stellar Cusp Around the Supermassive Black Hole in the Galactic Center”; *Astroph.J.* **594**, 812 (2003).
- [9] A. Ghez, S. Salim, D. Hornstein et al., “Stellar Orbits Around the Galactic Center Black Hole”; *Astrophys.J.* **620**, 744 (2005).
- [10] M. Zelnikov, E. Vasiliev, “The influence of dark matter halo onto the evolution of a supermassive black hole”; *Int.J.Mod.Phys. A* **20**, 4217 (2005).
- [11] М.И. Зельников, Е.А. Васильев, “Влияние гало тёмной материи на рост сверхмассивной чёрной дыры в центре Галактики”; *Кратк.сообщ.физ.* **9**, 9 (2003).
- [12] М.И. Зельников, Е.А. Васильев, “Поглощение темной материи сверхмассивной черной дырой в центре Галактики. Роль граничных условий”; *Письма в ЖЭТФ* **81**, №3, 115 (2005).

- [13] J. Hall, P. Gondolo, “Stellar Orbit Constraints on Neutralino Annihilation at the Galactic Center”; *Phys.Rev. D* **74**, 063511 (2006).
- [14] W. Dehnen, “Phase-space mixing and the merging of cusps”; *MNRAS* **360**, 869 (2005).
- [15] S. Kazantzidis, A. Zentner, A. Kravtsov, “The Robustness of Dark Matter Density Profiles in Dissipationless Mergers”; *Astroph.J.* **641**, 647 (2006).
- [16] L. Williams, A. Babul, J. Dalcanton, “Investigating the Origins of Dark Matter Halo Density Profiles”; *Astrophys.J* **604**, 18 (2004).
- [17] C. Austin, L. Williams, E. Barnes et al., “Semi-analytical dark matter halos and the Jeans equation”; *Astrophys.J.* **634**, 756 (2005).
- [18] A. Nusser, “Self-similar spherical collapse with non-radial motions”; *MNRAS* **325**, 1397 (2001).
- [19] J. Navarro, C. Frenk, S. White, “A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering”; *ApJ* **490**, 493 (1997).
- [20] B. Moore, F. Governato, T. Quinn et al., “Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos”; *Astrophys.J.* **499**, L5 (1998).
- [21] B. Moore, T. Quinn, F. Governato et al., “Cold collapse and the core catastrophe”; *MNRAS* **310**, 1147 (1999).
- [22] A. Klypin, A. Kravtsov, J. Bullock, J. Primack, “Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos II”; *Astrophys. J.* **554**, 903 (2001).
- [23] J. Navarro, E. Hayashi, C. Power et al., “The Inner Structure of Λ CDM Halos III: Universality and Asymptotic Slopes”; *MNRAS* **349**, 1039 (2004).
- [24] J. Diemand, B. Moore, J. Stadel, “Convergence and scatter of cluster density profiles”; *MNRAS* **353**, 624 (2004).
- [25] J. Diemand, M. Zemp, B. Moore et al., “Cusps in CDM halos”; *MNRAS* **364**, 665 (2005).
- [26] D. Reed, F. Governato, L. Verde et al., “Evolution of the Density Profiles of Dark Matter Haloes”; *MNRAS* **357**, 82 (2005).
- [27] G. Mamon, E. Lokas, “Dark matter in elliptical galaxies: II. Estimating the mass within the virial radius”; *MNRAS* **363**, 705 (2005).

- [28] R. Wojtak, E. Lokas, S. Gottlöber, G. Mamon, “Radial velocity moments of dark matter haloes”; MNRAS **361**, L1 (2005).
- [29] J. Diemand, B. Moore, J. Stadel, S. Kazantzidis, “Two body relaxation in CDM simulations”; MNRAS **348**, 277 (2004).
- [30] J. Taylor, J. Navarro, “The Phase-Space Density Profiles of Cold Dark Matter Halos”; Astrophys.J. **563**, 483 (2001).
- [31] S. Hansen, “Dark matter density profiles from the Jeans equation”; MNRAS **352**, L41 (2004).
- [32] W. Dehnen, D. McLaughlin, “Dynamical insight into dark-matter haloes”; MNRAS **363**, 1057 (2005).
- [33] J. Binney, S. Tremaine, “Galactic dynamics”; Princeton Univ. Press (1987).
- [34] S. Hansen, B. Moore, “A universal density slope - velocity anisotropy relation for relaxed structures”; New Astron. **11**, 333 (2006).
- [35] G. Blumenthal, S. Faber, R. Flores, J. Primack, “Contraction of dark matter galactic halos due to baryonic infall”; Astrophys.J. **301**, 27 (1986).
- [36] F. Prada, A. Klypin, J. Flix et al., “Astrophysical inputs on the SUSY dark matter annihilation detectability”; Phys.Rev.Lett. **93**, 241301 (2004).
- [37] O. Gnedin, A. Kravtsov, A.Klypin, D. Nagai, “Response of dark matter halos to condensation of baryons: cosmological simulations and improved adiabatic contraction model”; Astrophys.J. **616**, 16 (2004).
- [38] J. Sellwood, S. McGaugh, “The Compression of Dark Matter Halos by Baryonic Infall”; Astrophys.J. **634**, 70 (2005).
- [39] J. Choi, Y. Lu, H. Mo, M. Weinberg, “Dark matter halo response to the disk growth”; MNRAS **372**, 1869 (2006).
- [40] A. Klypin, H. Zhao, R. Somerville, “ Λ CDM-based models for the Milky Way and M31 I: Dynamical Models”; Astrophys.J. **573**, 597 (2002).
- [41] V. Cardone, M. Sereno, “Modelling the Milky Way through adiabatic compression of cold dark matter halo”; Astron.&Astrophys. **438**, 545 (2005).

- [42] L. Widrow, J. Dubinski, “Equilibrium Disk-Bulge-Halo Models for the Milky Way and Andromeda Galaxies”; *Astrophys.J.* **631**, 838 (2005).
- [43] J. Kormendy, “The Stellar-Dynamical Search for Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei”; in “Carnegie Observatories Astrophysics Series, Vol. 1: Coevolution of Black Holes and Galaxies”, ed. L.C.Ho (Cambridge Univ. Press, 2003); astro-ph/0306353.
- [44] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel et al., “Stellar dynamics in the central arcsecond of our galaxy”; *Astrophys.J.* **596**, 1015 (2003).
- [45] R. Schödel, R. Genzel, T. Ott, A. Eckart, “The Galactic Center stellar cluster: The central arcsecond”; *Astron.Nachr.*, **324**, S1, 535 (2003).
- [46] R. Genzel, “The Nuclear Star Cluster of the Milky Way: Star Formation, Dynamics and Central Black Hole”; Proceedings of the Star2000 Meeting (Heidelberg, March 2000), ed. R. Spurzem.
- [47] S. Tremaine, K. Gebhardt, R. Bender et al., “The slope of the black-hole mass versus velocity dispersion correlation”; *Astrophys.J.* **574**, 740 (2002).
- [48] S. Faber, S. Tremaine, E. Eijar et al., “The Centers of Early-Type Galaxies with HST. IV. Central Parameter Relations”; *Astron.J.* **114**, 1771 (1997).
- [49] G. Bertone, D. Merritt, “Dark Matter Dynamics and Indirect Detection”; *Mod.Phys.Lett. A***20**, 1021 (2005)
- [50] N. Fornego, L. Pieri, S. Scopel, “Neutralino annihilation into gamma-rays in the Milky Way and in external galaxies”; *Phys.Rev. D***70** 103529 (2004).
- [51] Y. Mambrini, C. Munos, E. Nezri et al., “Adiabatic compression and indirect detection of supersymmetric dark matter”; *JCAP* **0601**, 010 (2006).
- [52] G. Zaharijas, D. Hooper, “Challenges in Detecting Gamma-Rays From Dark Matter Annihilations in the Galactic Center”; *Phys.Rev. D***73** 103501 (2006).
- [53] P. Gondolo, J. Silk, “Dark matter annihilation at the galactic center”; *Phys.Rev.Lett.* **83**, 1719 (1999).
- [54] P. Ullio, H. Zhao, M. Kamionkowski, “A Dark-Matter Spike at the Galactic Center?”; *Phys.Rev. D***64**, 043504 (2001).
- [55] D. Merritt, M. Milosavljević, L. Verde, R. Jimenez, “Dark Matter Spikes and Annihilation Radiation from the Galactic Center”; *Phys.Rev.Lett.* **88**, 191301 (2002).

- [56] G. Bertone, G. Sigl, J. Silk, “Annihilation Radiation from a Dark Matter Spike at the Galactic Centre”; MNRAS **337**, 98 (2002).
- [57] D. Merritt, “Evolution of the Dark Matter Distribution at the Galactic Center”; Phys.Rev.Lett. **92**, 201304 (2004).
- [58] А.С. Ильин, “К вопросу о происхождении сверхмассивных чёрных дыр. Кинетическая теория”; кандидатская диссертация; ФИАН 2005.
- [59] J. D. MacMillan, R. N. Henriksen, “Black Hole Growth in Dark Matter and the $M_{bh} - \sigma$ Relation”; Astrophys.J. **569**, 83 (2002).
- [60] H. Zhao, M. Hæhnelt, M. Rees, “Feeding black holes at galactic centres by capture from isothermal cusps”; New Astron. **7**, 385 (2002).
- [61] D. Merritt, L. Ferrarese, “The $M_{BH} - \sigma$ Relation for Supermassive Black Holes”; Astrophys.J. **547**, 140 (2001).
- [62] A. Gurevich, K. Zybin, A. Ilyin; Proceedings of the 3rd Int. Sakharov Conference on Physics (Moscow 2002), p.520.
- [63] А.С. Ильин, К.П. Зыбин, А.В. Гуревич, “Тёмная материя в галактиках и рост гигантских чёрных дыр”; ЖЭТФ **98**, №1, 1 (2003).
- [64] J. Bahcall, R. Wolf, “Star distribution around a massive black hole in a globular cluster”; Astrophys.J. **209**, 214 (1976).
- [65] J. Frank, M. Rees “Effects of massive central black holes on dense stellar systems”; MNRAS **176**, 633 (1976).
- [66] A. Lightman, S. Shapiro, “The distribution and consumption rate of stars around a massive, collapsed object”; Astrophys.J. **211**, 244 (1977).
- [67] H. Cohn, R. Kulsrud, “The stellar distribution around a black hole: numerical integration of the Fokker-Planck equation”; Astrophys.J. **226**, 1087 (1978).
- [68] В.И. Докучаев, Л.М. Озерной, “Распределение звёзд вокруг массивного компактного объекта”; ЖЭТФ **73**, 1587 (1977).
- [69] G.S. Bisnovatyi-Kogan, R.S. Churaev, B.I. Kolosov, “The distribution of stars around a black hole – Numerical solution of the kinetic equation with collisions”; Astron.&Astrophys. **113**, No.2, 179 (1982).

- [70] J. Magorrian, S. Tremaine, “Rates of tidal disruption of stars by massive central black holes”; MNRAS **309**, 447 (1999).
- [71] J. Wang, D. Merritt, “Revised Rates of Stellar Disruption in Galactic Nuclei”; Astrophys.J. **600**, 149 (2004).
- [72] D. Merritt, “Interaction of Supermassive Black Holes with their Stellar and Dark Matter Environments”; Proc. Conf. “Growing Black Holes: Accretion in Cosmological Context”, Garching, 2004; astro-ph/0409290.
- [73] D. Merritt, “Dynamics of galaxy cores and supermassive black holes”; Rept.Progr.Phys. D **69**, 2513 (2006).
- [74] T. Alexander, “Stellar Processes Near the Massive Black Hole in the Galactic Center”; Phys.Rept. **419**, 65 (2005).
- [75] В.А. Сирота, А.С. Ильин, К.П. Зыбин, А.В. Гуревич, “Рост чёрных дыр в центрах галактик, поглощение звёзд и активность галактических ядер”; ЖЭТФ **127**, №2, 331 (2005).
- [76] D. Heggie, P. Hut, “The gravitational million-body problem: A multidisciplinary approach to star cluster dynamics”; Cambridge Univ. Press (2003).
- [77] H. Cohn, “Numerical integration of Fokker-Planck equation and evolution of star clusters”; Astrophys.J. **234**, 1036 (1979).
- [78] K. Takahashi, “Fokker-Planck models of star clusters with anisotropic velocity distributions”; Publ. Astron. Soc. Japan **47**, 561 (1995).
- [79] R. Woolley, D. Robertson, “Studies in the equilibrium of globular clusters”, MNRAS **116**, 288 (1956).
- [80] O. Gnedin, J. Primack, “Dark Matter Profile in the Galactic Center”; Phys.Rev.Lett. **93**, 061302 (2004).
- [81] G. Bertone, D. Merritt, “Time-Dependent Models for Dark Matter at the Galactic Center”; Phys.Rev.D **72**, 103502 (2005).
- [82] J. An, N. Evans, “A Cusp Slope – Central Anisotropy Theorem”; Astrophys.J. **642**, 752 (2006).

- [83] С.В. Гейн, Н.А. Зайцев, В.С. Посвянский, Ю.Б. Радвогин, “Метод независимых потоков для численного решения многомерного уравнения теплопроводности”; препринт ИПМ им. М.В. Келдыша (2003).
- [84] X. Fan, M. Strauss, G. Richards et al., “A Survey of $z > 5.7$ Quasars in the Sloan Digital Sky Survey”; *Astron.J.* **131**, 1203 (2006).
- [85] V. Berezhinsky, A. Gurevich, K. Zybin, “Distribution of dark matter in the galaxy and the lower limits for the masses of supersymmetric particles”; *Phys.Lett.B* **294**, 221 (1992).
- [86] L. Bergström, P. Ullio, J. Buckley, “Observability of Gamma Rays from Dark Matter Neutralino Annihilations in the Milky Way Halo”; *Astropart.Phys.* **9**, 137 (1998).
- [87] D. Hooper, B. Dignus “Limits on Supersymmetric Dark Matter From EGRET Observations of the Galactic Center Region”; *Phys.Rev.D* **70**, 113007 (2004).
- [88] F. Aharonian et al., “Very high energy gamma rays from the direction of Sagittarius A*”; *Astron.&Astrophys.* **425**, L13 (2004).
- [89] K. Kosack et al., “TeV Gamma-Ray Observations of the Galactic Center”; *Astrophys.J.* **608** L97 (2004).
- [90] K. Tsuchiya et al., “Detection of Sub-TeV Gamma-Rays from the Galactic Center Direction by CANGAROO-II”; *Astrophys.J.* **606**, L115 (2004).
- [91] J. Albert et al., “Observation of Gamma Rays from the Galactic Center with the MAGIC Telescope”; *Astrophys.J.* **638**, L101 (2006).
- [92] D. Horns, “TeV γ -radiation from Dark Matter annihilation in the Galactic center”; *Phys.Lett.B* **607**, 225 (2005).
- [93] F. Aharonian et al., “H.E.S.S. observations of the Galactic Center region and their possible dark matter interpretation”; *Phys.Rev.Lett.* **97**, 221102 (2006).
- [94] D. Hooper, I. Perez, J. Silk et al., “Have Atmospheric Cerenkov Telescopes Observed Dark Matter?”; *JCAP* **0409**, 2 (2004).
- [95] D. Merritt, S. Harfst, G. Bertone, “Collisionally regenerated dark matter structures in galactic nuclei”; *astro-ph/0610425*.