А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

1972 ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА Том 57

Е. С. ФРАДКИН, А. Е. ШАБАД

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена поиску решений, которые нарушали бы спонтанно трансляционную инвариантность. Обычная процедура квантовой теории поля приспособлена к тому, чтобы искать решения, обладающие той же симметрией, что и исходный лагранжиан. В то же время физически вполне могут реализовываться решения с нарушенной симметрией. Поэтому в последние годы появилось много работ (вслед за работой Намбу), посвященных спонтанному нарушению симметрии в квантовой теории поля. При этом обычно исходят из неперенормированной системы уравнений. Нам представляется более последовательным (и, во всяком случае, более удобным) использовать перенормированную систему уравнений, работая с которой можно избежать появления бесконечностей и нет надобности вводить обрезающие параметры и беспокоиться относительно всего того, что с этим связано.

Может быть сформулирована полностью перенормированная система уравнений, приспособленная ко всем возможным спонтанным нарушениям симметрий. В настоящей работе будем исходить из частной формы этой системы, которая особенно удобна для изучения спонтанного нарушения симметрии, связанного с появлением в теории отличного от нуля (и от константы) вакуумного среднего от оператора электромагнитного поля. Подробный обзор и обсуждение результатов данной работы содержатся в заключении. Некоторые дополнительные детали читатель может найти в [1, 2].

1. Формулировка задачи

Известно, что квантовая теория поля может быть сформулирована в терминах функций Грина, для которых имеется бесконечная система зацепляющихся уравнений. В 1954 г. Фрадкиным [3] (см. также [4]) была произведена перенормировка этой системы, в результате которой она приняла такой вид, что ее решение путем разложения в ряд по константе взаимодействия воспроизводит перенормированный ряд теории возмущений обычного лагранжева подхода, дополненного вычитательной процедурой. При этом никаких расходимостей (в том числе так называемых перекрывающихся) не возникает (перенормировка системы уравнений Швингера — Дайсона, приводящая к исключению всех расходимостей, за исключением перекрывающихся, была также произведена в работе [5]). Выпишем систему перенормированных уравнений для функций Грина в квантовой электродинамике в присутствии внешнего источника J_μ электромагнитного поля [4, 6] $A_\mu(x)$, который будет вскоре устремлен к нулю:

$$(i\hat{p} + m + \Sigma^R(p))\,G(p, p') - ie\int \Gamma_\mu(p, p-s, s)\langle A_\mu(s)\rangle G(p-s, p')\,ds + \\ + \int \Sigma^{(1)}(p, s)\,G(s, p')\,ds = \delta(p-p'), \qquad (1)$$

$$(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)(1-\pi(k^2))\langle A_\nu(k)\rangle = J_\mu(k) - \frac{k_\mu(kJ)}{k^2} - \\ - \frac{eZ_1}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int \gamma_\mu\left[G(q+k, q) - \int \frac{\delta G(q+k, q)}{\delta\langle A_\nu(s)\rangle}\bigg|_{\langle A\rangle=0}\langle A_\nu(s)\rangle\,ds\right]dq, \qquad (2)$$

$$(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)(1-\pi(k^2))\,D_{\nu\rho}(k, k') - \\ - \int \Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k, s)\,D_{\nu\rho}(s, k')\,ds = \delta(k-k')\left(\delta_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2}\right). \qquad (3)$$

Здесь $G(p, p')$, $D_{\nu\rho}(k, k')$, $\Gamma_\mu(k_1, k_2, s)$ — соответственно точные электронная, фотонная и вершинная функции Грина в присутствии классического источника $J_\mu(k)$:

$$D_{\nu\rho}(k, k') = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \{\langle T(A_\mu(x), A_\nu(x'))\rangle - \langle A_\mu(x)\rangle\langle A_\nu(x')\rangle\} \times \\ \times \exp(-ikx + ik'x')\,dx\,dx', \qquad (4)$$

$$G(p, p') = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \langle T(\Psi(x), \bar{\Psi}(x'))\rangle \exp(-ipx + ip'x')\,dx\,dx', \qquad (5)$$

$$\Gamma_\mu(k_1, k_2, s) = \frac{i}{e}\,\frac{\delta G^{-1}(k_1, k_2)}{\delta\langle A_\mu(s)\rangle}; \qquad (6)$$

$\langle A_\mu(k)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \langle A_\mu(x)\rangle e^{-ikx}\,dx$ — вакуумное среднее гейзенбергова оператора фотонного поля.

Если ввести массовый (Σ) и поляризационный ($\Pi_{\mu\nu}$), операторы в присутствии источника J_μ согласно равенствам:

$$\Sigma(p, s) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}Z_1\int \gamma_\mu G(p+q, k_1)\,\Gamma_\nu(k_1, s, k_2)\,D_{\mu\nu}(k_2, q)\,dq\,dk_1\,dk_2, \qquad (7)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k, s) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}Z_1\,\mathrm{Sp}\int \gamma_\mu G(k+q, k_1)\,\Gamma_\nu(k_1, k_2, s)\,G(k_2, q)\,dq\,dk_1\,dk_2 \qquad (8)$$

(причем в пределе $\langle A\rangle = 0$

$$\Sigma(p, s)|_{\langle A\rangle=0} = \Sigma(p)\,\delta(p-s), \qquad (9)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k, s)|_{\langle A\rangle=0} = \Pi_{\mu\nu}(k)\,\delta(k-s)), \qquad (10)$$

то входящие в уравнения (1) — (3) величины выразятся следующим образом:

$$\Sigma^{(1)}(p, s) = \Sigma(p, s) - \Sigma(p, s)|_{\langle A\rangle=0} - \int \frac{\delta\Sigma(p, s)}{\delta\langle A_\rho(q)\rangle}\bigg|_{\langle A\rangle=0}\langle A_\rho(q)\rangle\,dq, \qquad (11)$$

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k, s) = \Pi_{\mu\nu}(k, s) - \left[\Pi_{\mu\nu}(k, s)|_{\langle A\rangle=0} + \int \frac{\delta\Pi_{\mu\nu}(k, s)}{\delta\langle A_\rho(q)\rangle}\bigg|_{\langle A\rangle=0}\langle A_\rho(q)\rangle\,dq\right], \qquad (12)$$

$$\Sigma^R(p) = \Sigma(p) - \Sigma(p)|_{i\hat{p}=-m} - (i\hat{p}+m)\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial i\hat{p}}\bigg|_{i\hat{p}=-m}, \qquad (13)$$

$$(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\,\pi(k^2) = \Pi^R_{\mu\nu}(k) = \Pi_{\mu\nu}(k) - \Pi_{\mu\nu}(0) - \frac{\partial^2\Pi_{\mu\nu}}{\partial k_m\,\partial k_n}\bigg|_{k=0}k_m k_n. \qquad (14)$$

В соотношениях (1) — (14) масса m и заряд e равны своим экспериментальным значениям и использованы обозначения:

$$\hat{p} = \sum_{n=1}^{4} \gamma_i p_i, \qquad \hat{A} = \sum_{n=1}^{4} \gamma_i A_i, \qquad px = \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = \mathbf{px} - p_0 x_0.$$

Перенормировочный множитель Z_1 может быть исключен из системы (1) — (4) перегруппировкой фейнмановских диаграмм (об этом подробнее см. [3, 4]), и в данной работе мы будем обращаться с ним как с обычным числом. Члены с $(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\,\pi(k^2)$ и $\int \frac{\delta G(q+k,\, q)}{\delta \langle A_\nu(s)\rangle}\Big|_{\langle A\rangle=0} \langle A_\nu(s)\rangle\, ds$ в уравнении (2) отличаются друг от друга только перенормировочным полиномом второй степени по k, и при неучете перенормировки их можно было бы взаимно сократить. Тогда уравнение (2) превратилось бы в обычное уравнение Максвелла, в котором в качестве тока наряду с J_μ взята вакуумная электронная петля $Sp\gamma_\mu\, G(x,\, x)$. Уравнения (1) — (14) представляют собой фактически бесконечную систему уравнений, так как уравнение (6) выражает Γ_μ через высшие функции Грина, поскольку G^{-1} содержит Γ_μ согласно уравнению (1).

Положим в системе уравнений (1) — (14) внешний ток $J_\mu(k) = 0$. В этом пределе система уравнений всегда имеет обычные решения, при которых среднее электромагнитное поле $\langle A_\mu(k)\rangle$ равно нулю. Действительно, уравнение (2) имеет тривиальное решение $\langle A_\mu(k)\rangle = 0$, так как единственный член, который в нем мог бы быть отличным от нуля, в этом случае исчезает по соображениям релятивистской ковариантности

$$\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu \int G(q+k,\, q)\big|_{\langle A\rangle=0}\, dq = \delta(k)\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu \int G(q+k)\, dq \sim \delta(k)\, k_\mu = 0. \quad (15)$$

Решения с $\langle A_\mu\rangle = 0$ являются трансляционно-инвариантными в том отношении, что не существует никакого среднего поля, пространство является однородным и все величины, входящие в (1) — (14), содержат δ-функции разностей своих аргументов и это не противоречит системе уравнений (1) — (14).

Обычно в теории ставятся однородные граничные условия, исключающие возможность существования иных решений. Мы не будем ставить таких граничных условий. Нашей задачей является рассмотрение таких решений системы (1) — (14), в которых $\langle A_\mu(k)\rangle \neq 0$, хотя $J_\mu(k) = 0$. Об этих решениях мы будем говорить как о решениях, нарушающих спонтанно-трансляционную инвариантность (если только $\langle A_\mu(x)\rangle$ не равно постоянному вектору, когда нарушается [7] только лоренц-инвариантность, так как в теории имеется один выделенный 4-вектор).

Заметим, что уравнения (1) — (14) не являются самыми общими уравнениями для рассмотрения спонтанного нарушения симметрии. Более общие уравнения должны были бы включать наряду со средним $\langle A_\mu(x)\rangle$ также и вакуумные средние от оператора дираковской волновой функции $\langle\overline{\psi}(x)\rangle$, от произведений $\langle A(x)\,\Psi(y)\rangle$ и т. д. В данной работе такая модификация исходной системы не рассматривается.

Вернемся к обсуждению решений с $\langle A_\mu(x)\rangle \neq \mathrm{const}$. Существование таких решений указывает на возможность ситуации, когда в теории без внешнего источника ($J_\mu = 0$) существует отличное от нуля и от константы среднее (самосогласованное) электромагнитное поле $\langle A_\mu(x)\rangle$. При этом вакуум бесконечно вырожден по 4-импульсу и, вообще говоря, не является собственным вектором оператора пространственно-временного сдвига. В противном случае величина $\langle A_\mu(x)\rangle$ должна была бы быть по крайней мере равна постоянному вектору. Соответственно функции, входящие в систему (1) — (14), не содержат δ-функций от разностей своих аргументов. «Вакуумный электрический ток» $ie\,\langle \overline{\Psi}(x)\,\gamma_\mu \Psi(x) - \Psi(x)\,\gamma_\mu^T \overline{\Psi}(x)\rangle = -eSp\gamma_\mu G(x, x)$, построенный из функции Грина электрона в поле $\langle A_\mu(x)\rangle$, может как быть, так и не быть равным нулю. В последнем случае вакуум несет в себе квантовые числа электрического заряда, и легко убедиться в том, что заодно с трансляционной инвариантностью нарушается C-инвариантность. Вопрос о том, какое из решений — трансляционно-инвариантное или одно из трансляционно-неинвариантных — реализуется в физической системе, может быть выяснен только с помощью привлечения энергетических соображений или формулировки и решения секулярного уравнения, определяющего устойчивость вакуума по отношению к возмущениям.

После перехода к трансляционно-неинвариантному вакууму возникает задача о нахождении спектра фермионов и бозонов как полюсов G- и D-функций, найденных из решения системы (1) — (14). Вместо исследования бозонного пропагатора $D_{\mu\nu}$, подчиняющегося уравнению (3), будет более удобно (и эквивалентно) исследовать решения соответствующего линейного однородного интегрального уравнения

$$(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu - \Pi^R_{\mu\nu}(k))\,A_\nu(k) = \int \Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k, s)\,A_\nu(s)\,ds. \tag{16}$$

Решения уравнения (16) должны интерпретироваться как волновые функции возможных свободных частиц, присутствующих в теории (элементарные возбуждения трансляционно-неинвариантного вакуума, или голдстоуновские бозоны).

В данной работе получены два точных решения бесконечной системы (1) — (14) для среднего поля $\langle A_\mu(x)\rangle$ при $J_\mu = 0$. Оба эти решения фиксированы лишь с точностью до произвольного множителя, т. е. обладают вырождением по амплитуде, одно из них нарушает C-инвариантность. В разд. 2 доказано в общем случае, что если система (1) — (14) имеет решение для $\langle A_\mu(x)\rangle$ с неопределенной амплитудой, то уравнение (16) имеет решение $A_\mu(x) \sim \langle A_\mu(x)\rangle$ (т. е. D-функция имеет полюс), соответствующее наличию поля типа $\langle A_\mu(x)\rangle$ в виде свободных квантов в системе.

В разд. 3 приводится решение точной системы (1) — (14) при $J_\mu = 0$ в предположении, что трансляционно-инвариантный поляризационный оператор обычной теории $\Pi^R_{\mu\nu}(k) = (\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\pi(k^2)$ имеет следующее свойство (заведомо выполненное, если $\pi(k^2)$ вычислен [8] с точностью до e^2): существуют пространственноподобные векторы $k = \widetilde{k}$ с фиксированным квадратом $\widetilde{k}^2 = \text{const} = \widetilde{\mathbf{k}}^2 - \widetilde{k}_0^2 > 0$ такие, что

$$\pi(\widetilde{k}^2) = 1 \tag{17}$$

(как хорошо известно, во втором порядке теории возмущений $\widetilde{k^2} \sim m^2 \times \exp\{12\pi^2 e^{-2}\} \gg m^2$). В такой ситуации фотонный пропагатор $D_{\mu\nu} = \dfrac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2}{k^2(1-\pi(k^2))}$ имеет фиктивный полюс в пространственноподобной области, появление которого противоречит представлению Челлена — Лемана. Это — так называемая трудность «нуль-заряда» [9, 10]; она обсуждалась во многих работах (см., например, [11—16]). В рамках трансляционно-инвариантной теории свойство (17) приводит к появлению свободных «частиц», описываемых волновой функцией $A_\nu(k) = a_\nu\delta(k - \widetilde{k})$, которая является решением уравнения (16) (без правой части). Эти «частицы», однако, запрещены причинностью, так как перемещаются быстрее света.

Многие авторы считают, что фиктивного полюса в действительности не существует, а его возникновение обусловлено незаконным применением теории возмущений в высокоэнергетической области, где эффективный параметр разложения ($e^2 \ln k^2/m^2$) не мал. Тем не менее устранение фиктивного полюса в фотонном пропагаторе до сих пор не проведено. Известная процедура Редмонда [11] не может быть признана удовлетворительной ввиду ее существенной неоднозначности [12] и рецептурного по существу характера. В рамках нашего подхода мы принимаем фиктивный полюс всерьез. Даже в том случае, если его не существует, это имеет смысл делать при попытке сконструировать формализм, отличный от теории возмущений, который не содержал бы трудности фиктивного полюса уже в простых приближениях.

В разд. 3 показано, что фиктивный полюс ведет к возникновению поперечного (в четырехмерном смысле) среднего поля $\langle A_\mu(x)\rangle$ с постоянным вектором поляризации, лежащим на световом конусе, и пространственноподобным волновым вектором. Из полученного вакуумного поля может быть, в частности, сконструирована периодическая пространственная решетка.

В разд. 4 исследован спектр бозонных возбуждений в присутствии найденного самосогласованного поля. Для этой цели решено однородное уравнение (16). Его решения рассматриваются как «элементарные возбуждения», т. е. как свободные кванты, присутствующие в теории. Все найденные элементарные возбуждения, порождаемые фиктивным полюсом, обладают следующим замечательным свойством: любой волновой пакет, образованный из их волновых функций, распространяется в точности со скоростью света, несмотря на то, что они имеют пространственноподобный волновой вектор. Их присутствие не находится в противоречии с принципом макроскопической причинности. Некоторые из этих возбуждений имеют много общего с фотоном. В разд. 3 вводятся в рассмотрение понятия электродинамики сплошных сред и определяются электрическая и магнитная индукции наряду с напряженностями. Эти величины вычисляются для волны возбуждений, и через них выражается плотность макроскопической энергии — импульса. Последняя оказывается величиной, лежащей на световом конусе,— это значит, что элементарным возбуждениям может быть приписана исчезающая макроскопическая масса, а сами они представляют собой голдстоуновские безмассовые векторные бозоны, сопутствующие рассматриваемому спонтанному нарушению симметрии.

В разд. 5 получены функции Грина и волновая функция дираковского электрона в вакуумном поле. Спектр электрона исследован в диагональном представлении макроскопической энергии — импульса (представление квазиэнергии — квазиимпульса). При этом оказывается, что при достижимых значениях квазиэнергии — квазиимпульса спектр электрона не отличается от свободного, а при больших квазиимпульсах в спектре имеются щели.

В разд. 6 получено другое точное решение бесконечной системы (1)—(14) для $\langle A_\mu(x)\rangle$ при $J_\mu = 0$. Оно представляет собой свободную плоскую электромагнитную волну. Соответствующие голдстоуновские бозоны суть фотоны. Это решение обсуждается в связи с проблемой инфракрасной расходимости.

2. О некотором классе элементарных возбуждений

Можно показать [1, 2], что уравнение (2) при $J_\mu = 0$ сводится к виду

$$(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu - \Pi^R_{\mu\nu}(k))\langle A_\nu(k)\rangle = \int_0^1 d\lambda \int \Pi^{(1)\lambda}_{\mu\nu}(k, s)\langle A_\nu(s)\rangle\, ds, \qquad (18)$$

где $\Pi^{(1)\lambda}_{\mu\nu}(k, s)$ получается заменой всюду в $\Pi^{(1)}$ величины $\langle A\rangle$ величиной $\lambda\langle A\rangle$. Сравнивая (18) с (16), замечаем, что ядра этих двух уравнений отличаются только интегрированием по λ в правых частях. Это обстоятельство позволяет надеяться, что если уравнение (18) имеет решение, то уравнение (16) в общем случае не имеет решений, поскольку их детерминанты Фредгольма несколько различны и необходимо выполнить специальные условия для того, чтобы они обращались в нуль одновременно.

Можно попытаться использовать это обстоятельство для исключения фиктивного полюса (см. разд. 1) фотонного пропагатора. Свойство (17) поляризационного оператора может являться причиной возникновения некоторых решений нелинейного интегрального уравнения (18). При этом, согласно сказанному, имеется надежда, что уравнение (16) не имеет решений, т. е. появление фиктивного полюса является сигналом того, что физическая система в действительности имеет трансляционно-неинвариантное состояние, в котором фиктивного решения уже нет. Именно такая программа была с успехом проведена в теории многих частиц [17], где при малых температурах также возникает фиктивный полюс в трансляционно-инвариантном решении для температурных функций Грина.

Реализация описанной программы, однако, встречает серьезные трудности в квантовой теории поля. Дело в том, что надо найти такое решение для $\langle A_\mu(x)\rangle$, которое изменило бы асимптотическое поведение функции Грина электрона $G(p, p')$, так как именно последнее ответственно за появление фиктивного полюса. Ясно, однако, что какие бы то ни было простые приближенные методы решения системы (1) — (14) едва ли могут привести к существенным изменениям асимптотического поведения.

В настоящее время мы располагаем решением интегрального уравнения (18), порожденным фиктивным полюсом. Однако оно таково, что как раз выполнены те специальные условия, которые делают уравнение (16) разрешимым одновременно с (18), именно: это решение удовлетворяет условиям теоремы, которая будет сформулирована и доказана в этом разделе. Поэтому полюс в пространственноподобной области в D-функции (с учетом спонтанновозникшего среднего поля) остается на своем месте, но теперь структура D-функции такова, что (найденный нами) класс порождаемых им элементарных возбуждений существенно уже по сравнению с классом элементарных возбуждений, к которым он приводит в трансляционно-инвариантной теории. Более того, свойства найденных элементарных возбуждений таковы, что их присутствие не содержит в себе противоречия с причинностью.

Разумеется, остается весьма желательным выполнение обсуждавшейся выше программы в ее первоначальном виде. Особенно это актуально для квантовой мезодинамики, где тех решений, которые найдены нами для квантовой электродинамики в последующих разделах, не существует. Однако для этого нужны хотя бы приближенные решения уравнения (18) отличные от тех, которыми мы располагаем.

Перейдем к формулировке и доказательству общего утверждения, касающегося весьма специального класса решений уравнения (18) и соответствующих им элементарных возбуждений. Два точных решения, которые мы получим в разд. 4, 6, удовлетворяют условиям следующей теоремы.

Т е о р е м а: Если $\langle A_\mu(k)\rangle$ есть решение системы уравнений (1), (18), (3) — (14) такое, что $\alpha\langle A_\mu(k)\rangle$ есть тоже решение этой системы, то уравнение (16) имеет решение $A_\mu(k) = \beta\langle A_\mu(k)\rangle$, где β — любое число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем в системе уравнений (1), (18), (3) — (14) $\alpha\langle A_\mu(k)\rangle$ вместо $\langle A_\mu\rangle$. Согласно условию теоремы система уравнений от этого не нарушится. В уравнении (18) при этом $\Pi^{(1)\lambda}_{\mu\nu}(k, s)$ и $\langle A_\mu\rangle$ перейдут в $\Pi^{(1)\alpha\lambda}_{\mu\nu}(k, S)$ и $\alpha\langle A_\mu\rangle$. Сократим в (18) α и заменим переменную интегрирования $\lambda\alpha = \lambda'$. Получим, таким образом,

$$(k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu - \Pi^R_{\mu\nu}(k))\langle A_\nu(k)\rangle = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\lambda' \int \Pi^{(1)\lambda'}_{\mu\nu}(k, s)\langle A_\nu(s)\rangle\, ds. \quad (19)$$

Вычитая (19) из (18), находим

$$\alpha\int_0^1 d\lambda \int \Pi^{(1)\lambda}_{\mu\nu}(k, s)\langle A_\nu(s)\rangle\, ds = \int_0^\alpha d\lambda \int \Pi^{(1)\lambda}_{\mu\nu}(k, s)\langle A_\nu(s)\rangle\, ds. \quad (20)$$

Двукратным дифференцированием по α убеждаемся, что подынтегральное выражение не зависит от λ и, следовательно, интеграл по λ в (18) можно допустить, заменив λ единицей. Подставляя теперь в (16) величину $\beta\langle A_\nu(k)\rangle$ в качестве решения для $A_\nu(k)$, видим, что (16) удовлетворяется, так как совпадает с (18) после сокращения на β. Утверждение теоремы доказано. Попутно мы доказали, что на классе решений, описываемых условиями теоремы, правая часть (18) обращается в нуль, поскольку величина $\int \Pi^{(1)\lambda}_{\mu\nu}(k, s)\langle A_\nu(s)\rangle\, ds$ равна нулю, если она не зависит от λ — обстоятельство, которое должно быть ясно из определения (12).

Отметим, что при доказательстве мы исходили из точной системы перенормированных уравнений квантовой электродинамики, не прибегая ни к каким приближениям.

Смысл доказанной теоремы можно выразить так: если амплитуда среднего (вакуумного) поля не фиксирована в теории, то в ней должна присутствовать частица (элементарное возбуждение), представляющая собой квант этого поля. К вакуумному полю можно добавить или изъять из него какое-то количество однородных с ним квантов, не нарушая выполненности системы (1) — (14) (мы не обсуждаем здесь энергетического аспекта этих изменений). Иными словами, вакуум содержит неопределенное число квантов, элементарных возбуждений, существующих в теории как свободные,— вырождение вакуума по числу частиц.

Подобная ситуация возникает всегда в том случае, когда в системе появляются возбуждения или связанные состояния, отличные от исходных *in* и *out*-состояний. Прежний вакуум теперь становится вырожденным по отношению к новым квантовым числам, и именно неопределенность амплитуды вакуумного поля дает возможность квантования относительно новых возбуждений (случай описываемый вышедоказанной теоремой, не является единственным возможным способом достижения неопределенности $\langle A_\mu\rangle$). Однако вопрос о квантовании не всегда прост. Так, в случае, когда минимум энергии системы достигается не при нулевой амплитуде нового решения, при квантовании этого поля необходимо выделить некоторую часть «классического» поля и квантовать лишь излишек амплитуды.

3. Вакуумное поле в виде электромагнитной волны, поляризованной вдоль светового конуса

Пусть уравнение (2) с отброшенной правой частью имеет решение, соответствующее фиктивному полюсу, иначе говоря, пусть в точной трансляционно-инвариантной D-функции имеется полюс в пространственно-подобной области (это предположение в рамках нашего подхода обсуждалось в разд. 1).

Рассмотрим поперечную четырехвекторную величину

$$\langle A_\mu(s)\rangle = n_\mu[a\delta(s-\widetilde{k}) + \overset{*}{a}\delta(s+\widetilde{k})], \qquad n^2 = n\widetilde{k} = 0, \qquad |\widetilde{k}_0| < |\widetilde{\mathbf{k}}|, \quad (21)$$

где $\widetilde{k}$ — пространственноподобный вектор, выбранный таким образом, чтобы левая часть уравнения (2) обращалась в нуль при подстановке в него (21) (это условие фиксирует только инвариант $\widetilde{k}^2$, так что по направлению $\widetilde{k}$ произволен). Во втором порядке теории возмущений $\widetilde{k}^2 \sim m^2 \exp \times \times \{12\pi e^{-2}\}$, $k^2 \gg m^2$. В координатном представлении величина (21) имеет вид

$$\langle A_\mu(x)\rangle = n_\mu \cos(\widetilde{k}x + \eta), \qquad n^2 = n\widetilde{k} = 0, \qquad |\widetilde{k}_0| < |\widetilde{\mathbf{k}}|. \tag{22}$$

Четырехмерный вектор поляризации n_μ лежит на световом конусе а выражения (21), (22) поперечны в четырехмерном смысле $n^2 = n\widetilde{k} = 0$. Эти два условия совместны только, если вектор k пространственноподобен. О специфических свойствах электромагнитного поля, порождаемого вектор-потенциалом (21), (22), речь пойдет несколько ниже. Отметим только, что по своей простоте выражения (21), (22) не уступают электромагнитному полю свободной плоской волны.

Покажем теперь, что и правая часть уравнения (2) ($J = 0$) обращается в нуль при подстановке (21), т. е. что последнее является решением системы уравнений (1) — (14). Для этого разложим $G(q + k, q)$ в функциональный ряд по $\langle A\rangle$. Имея в виду (15), убеждаемся, что правая часть (2) обладает структурой

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \int \operatorname{Sp} \gamma_\mu \frac{\delta^r G(q+k, q)\, dq}{\delta\langle A_{\mu_1}(s_1)\rangle \ldots \delta\langle A_{\mu_r}(s_r)\rangle}\bigg|_{\langle A\rangle=0} \langle A_{\mu_1}(s_1)\rangle \ldots \langle A_{\mu_r}(s_r)\rangle\, ds_1\, ds_r. \tag{23}$$

Поскольку после взятия вариационной производной среднее поле устремлено к нулю, вариационная производная содержит δ-функцию:

$$\operatorname{Sp} \gamma_\mu \frac{\delta^r G(q+k, q)}{\delta\langle A_{\mu_1}(s_1)\rangle \ldots \delta\langle A_{\mu_r}(s_r)\rangle}\bigg|_{\langle A\rangle=0} = \delta\Big(k - \sum_{i=1}^{r} s_i\Big) F_{\nu,\, \mu_1 \ldots \mu_r}(q, S_1, \ldots S_r). \tag{24}$$

Подставляя (21) в (23) и используя (24), получаем после интегрирования по всем s_i для правой части (2) при $J_\mu = 0$

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{l=-r}^{r} \delta(k - l\widetilde{k}) \int d^4q F^{(l)}_{\mu,\, \mu_1 \ldots \mu_r}(q, \widetilde{k})\, n_{\mu_1} \ldots n_{\mu_r}. \tag{25}$$

Входящий сюда интеграл по d^4q образует тензор с индексами $\mu, \mu_1, \ldots \ldots \mu_r$; $r + 1 \geqslant 3$, для построения которого в нашем распоряжении имеются вектор $\widetilde{k}$ и единичный тензор $\delta_{\mu\nu}$. Однако все $\widetilde{k}_{\mu_i}$, появляющиеся в этом тензоре, обращают в нуль выражение (25) при свертке с соответствующим вектором n_{μ_i} ($n\widetilde{k} = 0$). Аналогично появление $\delta_{\mu_i\mu_k}$ ($i, k = 1, \ldots \ldots r$) приводит к возникновению множителя $n^2 = 0$ в (25). Поскольку $r \geqslant 2$, заключаем, что выражение (25), а вместе с ним (23) исчезают при подстановке (21), (22). Таким образом, правая часть уравнения (2) при $J_\mu = 0$, так же как и его левая часть, обращается в нуль подстановкой выражений (21), (22), и последние дают точное решение системы уравнений (1) — (14).

Обращение в нуль правой части (2) при $J_\mu = 0$ означает выполнение следующего равенства для вакуумного среднего электрического тока при среднем поле (22):

$$-e \operatorname{Sp} \gamma_\mu G(x, x) = -e \operatorname{Sp} \gamma_\mu \int \frac{\delta G(x, x)}{\delta\langle A_{\mu_1}(z)\rangle}\bigg|_{\langle A\rangle=0} \langle A_{\mu_1}(z)\rangle\, dz. \tag{26}$$

Это выражение не равно нулю, так как его фурье-образ есть

$$\tilde{a}\delta(k-\tilde{k})F^{(1)}_{\mu,\mu_1}(\tilde{k})n_{\mu_1}+\overset{*}{a}\delta(k+\tilde{k})F^{(2)}_{\mu,\mu_1}(-\tilde{k})n_{\mu_1}. \qquad (27)$$

Здесь тензоры $F^{(1,2)}_{\mu,\mu_1}$ могут быть образованы из δ_{μ,μ_1} поэтому вакуумный ток является квадратично расходящимся выражением, пропорциональным вектору n_μ. Роль «перенормированного вакуумного тока», как это ясно из (2), играет (ср. (37)) выражение

$$\Pi^R_{\mu\nu}(k)\langle A_\nu(k)\rangle = n_\mu\tilde{k}^2(a\delta(k-\tilde{k})+\overset{*}{a}\delta(k+\tilde{k})), \qquad \pi(\tilde{k}^2)=1. \qquad (28)$$

Наличие неисчезающего вакуумного среднего электрического тока в нашем случае означает, что вместе со спонтанным нарушением трансляционной инвариантности произошло спонтанное нарушение зарядовой симметрии. Вакуум является вырожденным по заряду, причем значение последнего может быть как положительным, так и отрицательным. Вакуум содержит ток электрически заряженных частиц, движущихся, выражаясь на классическом языке, со скоростью света ($n^2=0$). Заметим, что спонтанно возникший ток удовлетворяет локальному закону сохранения $nk=0$. В разд. 4 будет сделано еще одно замечание о токе.

Полученное решение (25) вырождено также по амплитуде, по фазе и по направлениям векторов n и $\tilde{k}$ в пределах условий $n^2=n\tilde{k}=0$, $\tilde{k}^2=$ $=\mathrm{const}$. Более общей формой решения является

$$\langle A_\mu(x)\rangle = n_\mu\int d\theta\, d\varphi f(\theta,\varphi)\cos((k_{\theta,\varphi}x)+\eta_{\theta,\varphi}), \qquad k^2_{\theta,\varphi}=\tilde{k}^2=\mathrm{const}, \qquad (29)$$
$$(k_{\theta,\varphi}n)=n^2=0,$$

где θ и φ — две степени свободы вектора $k_{\theta,\varphi}$, подчиненного двум условиям; $f(\theta,\varphi)$ и $\eta_{\theta,\varphi}$ — весовые функции. В частности, может быть сконструирована двумерная периодическая решетка, если взять два вектора $k_{\theta,\varphi}$, пространственные части которых взаимно ортогональны и ортогональны n ($\mathbf{k}_{\theta,\varphi}\mathbf{n}=0$, $k^0_{\theta,\varphi}=0$) (выбор $\mathbf{k}_{\theta,\varphi}\parallel\mathbf{n}$ невозможен ни для какого конечного $|\mathbf{k}_{\theta,\varphi}|$). Вектор n — произвольный вектор на световом конусе, однако линейная комбинация нескольких векторов $\mathbf{n}$ недопустима для решения (по крайней мере в рамках нашего способа доказательства).

Дальнейшие ограничения на форму и нормировку решения (29) должны получаться из условий минимизации энергии физической системы или решением секулярного уравнения.

Перейдем к рассмотрению специфических свойств электромагнитного вакуумного поля с поляризацией на световом конусе. Классический тензор напряженности электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \qquad (30)$$

построенный по вектор-потенциалу (22), равен

$$F^{(1)}_{\mu\nu}=(-n_\nu\tilde{k}_\mu+n_\mu\tilde{k}_\nu)\sin(\tilde{k}x+\eta), \qquad n^2=n\tilde{k}=0. \qquad (31)$$

Поучительно сравнить его с тензором напряженности плоской свободной электромагнитной волны, задаваемой поперечным вектор-потенциалом:

$$A^{(2)}_\mu(x)=k_\mu\cos(nx+\eta), \qquad n^2=kn=0, \qquad |k_0|<|\mathbf{k}|. \qquad (32)$$

Он равен

$$F^{(2)}_{\mu\nu}=(n_\nu k_\mu-n_\mu k_\nu)\sin(nx+\eta), \qquad n^2=kn=0. \qquad (33)$$

Сравнение (31) с (33) показывает, что, с точки зрения тензорной структуры, поле типа (31) тождественно полю плоской свободной электромагнитной волны, но отличается от него пространственновременно́й зависимостью. Свободное поле изменяется в направлении n_μ, а поле (31) — в направлении $\widetilde{k}_\mu$. В частности, следующие свойства поля плоской волны справедливы также и для поля (31): векторы напряженности **E** и **H** взаимно ортогональны и равны между собой по модулю в любой системе отсчета. Энергия — импульс распространяются со скоростью света в направлении, перпендикулярном плоскости, проходящей через векторы **E** и **H**. Последнее свойство, крайне важное в рамках нашего подхода, будет обосновано несколько ниже.

Рассмотрим полученное решение более подробно с энергетической точки зрения. Для всякого поперечного поля A_μ, понимаемого как электромагнитное, справедливо соотношение:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -F_{\mu\nu} j_\nu, \tag{34}$$

в котором j_ν — ток источников этого поля, определяемый равенством

$$-\Box A_\nu = j_\nu, \tag{35}$$

а $T_{\mu\nu}$ — симметризованный тензор энергии — импульса, выражаемый с помощью соотношения

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^2_{\rho\delta} \tag{36}$$

через тензор напряженности электромагнитного поля (30).

Соотношение (34) следует автоматически из (30), (35), (36). В случае вектор-потенциала (22) тензор напряженности (31) ортогонален току j_ν, вычисленному по формуле (35):

$$j_\nu = n_\nu \widetilde{k}^2 \cos(\widetilde{k}x + \eta), \qquad n^2 = n\widetilde{k} = 0, \qquad |k_0| < |\widetilde{\mathbf{k}}|, \tag{37}$$

и поэтому соотношение (37) принимает вид

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{38}$$

выражающий локальный закон сохранения энергии — импульса при спонтанном нарушении трансляционной инвариантности. Переход к интегральному закону сохранения не самоочевиден, так как интересующее нас поле не убывает на бесконечности по самому смыслу постановки задачи. Подставляя, однако (31) в (36), получаем явное выражение для тензора энергии — импульса

$$T_{\mu\nu} = \widetilde{k}^2 n_\mu n_\nu \sin^2(kx + \eta), \qquad n^2 = \widetilde{k}n = 0, \tag{39}$$

причем плотность энергии положительна:

$$T_{00} = n_0^2 \widetilde{k}^2 \sin^2(\widetilde{k}x + \eta) > 0. \tag{40}$$

Положительностью плотности энергии мы обязаны выбору вещественного выражения для поля (22).

Интегрируя (38) по трехмерному пространству, имеем

$$-\frac{\partial P_\mu}{\partial x_4} = \int \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial x_4} d^3x = -\int \frac{\partial T_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha} d^3x = 2\widetilde{k}^2 n_\mu n_4 \widetilde{k}_4 \int \sin(\widetilde{k}x + \eta) \times$$
$$\times \cos(\widetilde{k}x + \eta)\, d^3x = -2\widetilde{k}^2 n_\mu (\mathbf{n}\widetilde{\mathbf{k}}) \int \sin(\widetilde{k}x + \eta)\cos(\widetilde{k}x + \eta)\, d^3x = 0. \tag{41}$$

Очевидной заменой переменных интеграл в (41) сводится к интегралу от нечетной функции,

$$\int \sin \widetilde{\mathbf{k}}\mathbf{x} \cos \widetilde{\mathbf{k}}\mathbf{x}\, d^3x = 0, \tag{42}$$

равному нулю, если понимать его в смысле главного значения. Таким образом, вектор энергии импульса поля (22), понимаемого как классическое

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4}\, d^3x = n_\mu n_0 \widetilde{k}^2 \int \sin^2 (\widetilde{k}x + \eta)\, d^3x, \qquad n^2 = n\widetilde{k} = 0, \tag{43}$$

является не зависящим от времени вектором, лежащим на световом конусе $P^2 = 0$.

Полученные результаты относительно тензорной структуры энергии импульса остаются в силе для любого выражения тензора энергии — импульса поля (22), если только оно содержит электромагнитное поле в степени не ниже второй и не содержит других векторов кроме n и $\widetilde{k}$. В этом случае единственный отличный от нуля член содержит тензор $n_\mu n_\nu$. Сохранение вектора P, построенного из (22) по формулам (43), (39), означает, что физическая система из электронов и фотонов, находящаяся в спонтанновозникшем среднем электромагнитном поле, как во внешнем, не передает ему и не получает от него энергию — импульс обычным путем (т. е. обменом фотонами) [1]. Действительно, равенства (38), (41) указывают на отсутствие энергетического обмена между электромагнитным полем и создавшими его классическими источниками и, следовательно, на невозможность пополнения энергии поля за счет изменения кинетической энергии его источников. Это естественно, так как классические заряды движутся со скоростью света (согласно (37)) и их кинетическая энергия не может быть изменена.

Энергетическая связь между полем и создавшими его источниками разорвана ввиду обращения в нуль величины $F_{\mu\nu} j_\nu$. Описываемым свойством энергетической консервативности, кроме рассматриваемого, обладает только свободное электромагнитное поле без источников. Его энергия — импульс также могут изменяться только путем присоединения однородного с ним кванта (свободного фотона). Любопытно, что классическое свободное электромагнитное поле также является решением системы (1) — (14) для величины $\langle A_\mu \rangle$, что будет подробно обсуждаться в разд. 6.

4. Спектр бозонных возбуждений в вакуумном поле

В этом разделе мы не будем заниматься фотонной ветвью спектра, проходящей через точку $k = 0$. Ее наличие гарантируется поперечностью поляризационного оператора $\Pi_{\mu\nu}(k, k')\, k_\mu = 0$ (см. подробнее [1, 2]). Нашей задачей является исследование решений однородного уравнения (16) в присутствии вакуумного поля (22), (29), как внешнего, которые порождаются тем же свойством поляризационного оператора (17), что и само вакуумное поле. Будем говорить об этих решениях как об элементарных возбуждениях, порожденных фиктивным полюсом. Как было отмечено, среди них имеются возбуждения [2] с волновой функцией, пропорциональ-

[1] Единственный способ изменить энергию — импульс самосогласованного поля (22), (29) состоит в изменении его амплитуды. Это может быть сделано посредством заимствования из системы кванта того же поля (элементарного возбуждения), присутствие которого в теории гарантируется тем обстоятельством, что решения (22), (29) удовлетворяют условиям теоремы предыдущего раздела.

[2] См. теорему из разд. 2.

ной вакуумному полю (22), (29):

$$A_\nu(x) = \beta n_\nu \int \cos(kx+\eta) f(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi, \qquad k^2 = \widetilde{k}^2 = \mathrm{const}, \quad kn = n^2 = 0. \quad (44)$$

Может быть найден еще более общий класс элементарных возбуждений, порожденных фиктивным полюсом:

$$A_\nu(x) = \int a_\nu(k) \cos(kx + \eta(k))\, dk, \qquad (45)$$

$$an = kn = n^2 = 0, \qquad k^2 = \widetilde{k}^2 = \mathrm{const} > 0. \qquad (46)$$

В (45) интегрирование производится по тем значениям 4-вектора k, которые удовлетворяют условиям, перечисленным в (46). Четырехмерный вектор n — тот же самый, что и в выражениях (25), (29). Чтобы убедиться в том, что выражение (45) удовлетворяет уравнению (16), нужно разложить правую часть последнего в степенной функциональный ряд по $\langle A \rangle$ и учесть теорему Фарри (ср. аналогичное доказательство в разд. 5). Условия (46) являются градиентно-инвариантными, и можно достичь лоренцовской калибровки $ak = 0$ поля (45) переопределением $a_\nu = a_\nu' - k_\nu (a'k/\widetilde{k}^2)$, при этом как a_ν, так и a_ν' будут подчиняться условиям (46).

Порожденные фиктивным полюсом элементарные возбуждения (45) не обладают нежелательной способностью передвигаться быстрее света. Чтобы убедиться в этом, представим скалярное произведение (kx), входящее в (45), в виде

$$kx = -k_0 x_0 + |\mathbf{k}|\,|\mathbf{x}| (\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos\theta), \qquad (47)$$

где

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{kn}}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{n}|}, \qquad \cos\psi = \frac{\mathbf{xn}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{n}|},$$

а θ — угол между проекциями векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{x}$ на плоскость, препендикулярную вектору $\mathbf{n}$. Условия (46) дают $k_0 = |\mathbf{k}| \cos\theta$, $|\mathbf{k}| \sin\varphi = \sqrt{\widetilde{k}^2} = \mathrm{const}$. Подставляя $|\mathbf{k}|$, выраженный отсюда, в (47), получаем

$$kx = k_0(-x_0 + |\mathbf{x}| \cos\psi) + |\mathbf{x}| \sin\psi \sqrt{\widetilde{k}^2} \cos\theta. \qquad (48)$$

Переменные k_0 и θ могут быть взяты в качестве единственных независимых переменных интегрирования в (45). Тогда ясно, что при учете (48) наиболее общей формой волнового пакета (45) является

$$A_\nu(x) = A_\nu(x_0 - x_\mathbf{n}, x_\perp), \qquad A_\mathbf{n} = 0, \qquad x_\mathbf{n} = |\mathbf{x}| \cos\psi, \qquad x_\perp = |\mathbf{x}| \sin\psi \quad (49)$$

независимо от конкретного выбора весовых функций $a_\nu(k)$, $\eta(k)$. В любой фиксированный момент времени $x_0 = \mathrm{const}$ выражение (49) описывает некоторую картину, которая при снятии условия $x_0 = \mathrm{const}$ перемещается как целое (без дисперсии) вдоль направления $\mathbf{n}$ со скоростью, равной единице (т. е. со скоростью света).

Таким образом, видно, что пространственноподобный волновой 4-вектор k_μ задает всего лишь сверхсветовую фазовую скорость и не имеет никакого отношения ни к скорости, ни к направлению распространения волнового пакета (45), (49). Такая ситуация является типичной для электромагнитных волн, распространяющихся в анизотропной среде. В нашем случае самосогласованное вакуумное поле (22), (29), рассматриваемое как внешнее в уравнении (16), играет роль анизотропной неоднородной и непостоянной во времени среды. Мы будем описывать решения (45), (49) на языке макроскопической электродинамики и покажем, каким образом им можно приписать сохраняющийся макроскопический 4-вектор энергии —

импульса, который к тому же лежит на световом конусе в согласии с тем, что, как установлено, элементарные возбуждения распространяются со скоростью света. Конструируемый вектор энергии — импульса окажется при этом параллельным в четырехмерном смысле вектору вакуумного поля n_μ. Таким образом именно этот вектор (а не волновой) описывает распространение элементарных возбуждений.

Определение напряженности электрического поля $\mathbf{E}(x) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_0} - \mathbf{grad}\, A_0(x)$ и магнитной индукции $\mathbf{B}(x) = \mathbf{rot}\ \mathbf{A}(x)$ влечет за собой автоматически первую пару уравнений Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{rot}\, \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_0} = 0. \tag{50}$$

Вводя электрическую индукцию[1] $\mathbf{D}$ согласно соотношению

$$D_i(k) = E_i(k) + \frac{\Pi_{ij}^R(k)\, E_j(k)}{k_0^2} + \int \frac{\Pi_{ij}^{(1)}(k, k')\, E_j(k')}{k_0 k_0'}\, d^4k' = \tag{51}$$

$$= E_i(k) + i\,\frac{\Pi_{i\beta}^R(k)\, A_\beta(k)}{k_0} + i \int \frac{\Pi_{i\beta}^{(1)}(k, k')\, A_\beta(k')}{k_0}\, d^4k', \ i, j = 1, 2, 3; \ \beta = 0, 1, 2, 3$$

(мы использовали поперечность $\Pi_{i\beta}$ при доказательстве промежуточного равенства) и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ согласно соотношениям:

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{rot}\, \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{grad}\, \Phi, \tag{52}$$

где Φ — произвольная скалярная функция, можно придать уравнению (16) вид второй пары уравнений Максвелла в среде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_0} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \tag{53}$$

Заметим, что равенство нулю правой части (53) означает отсутствие внешних токов. С макроскопической точки зрения, ток источников, движущихся со скоростью света (35), (37), является не внешним, а «наведенным в среде» током.

Теперь нашей задачей является получить плотность макроскопической энергии

$$\frac{\mathbf{ED} + \mathbf{BH}}{2} = T_{00} \tag{54}$$

и плотность макроскопического потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$[\mathbf{EH}]_j = T_{j0}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{55}$$

В дальнейшем будем обозначать индексами $\mathbf{n}$ и $\perp$ проекции пространственных частей векторов на направление n и на плоскость, ортогональную к $\mathbf{n}$ соответственно; будем использовать координаты $x_2 = x_\perp \cos\theta$, $x_3 = x_\perp \sin\theta$ и иметь все время в виду следующие соотношения, выполненные для (49):

$$A_0 = A_{\mathbf{n}}, \quad \frac{\partial A_\nu}{\partial x_0} = -\frac{\partial A_\nu}{\partial x_{\mathbf{n}}}. \tag{56}$$

Из (56) следует $E_{\mathbf{n}} = 0$. Поскольку пакет (49) движется вдоль $\mathbf{n}$, подходящий вектор Пойнтинга (55) должен быть параллельным $\mathbf{n}$. Чтобы добиться

[1] Обозначая ее тем же символом, что и функцию Грина фотона, мы надеемся все же не вызвать недоразумения.

этого, необходимо иметь $H_n = 0$. Последнее достигается специальным выбором произвольной функции Φ в (52):

$$\Phi = \int^{x_n} dx_n B_n. \tag{57}$$

Теперь прямым вычислением получаем для плотности импульса

$$\sqrt{T_{j4}^2} = [\mathbf{EH}]_n = |\,[\mathbf{EH}]\,| = \frac{\partial A_2}{\partial x_0}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_0} + 2\,\frac{\partial A_0}{\partial x_\perp}\cos\theta + \int^{x_n}\sin\theta \times \right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_\perp^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_\perp^2}\sin\theta\right] dx_n\right) + \frac{\partial A_3}{\partial x_0}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_0} + 2\,\frac{\partial A_0}{\partial x_\perp}\sin\theta - \right.$$
$$\left. - \int^{x_n}\cos\theta\left[\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_\perp^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_\perp^2}\sin\theta\right] dx_n\right). \tag{58}$$

Перейдем к вычислению плотности энергии. Поскольку (45), (49) удовлетворяют уравнению (16), выражение (51) может быть переписано после подстановки (45) таким образом:

$$D_j(k) = E_j(k) + i\,\frac{k^2 A_j - k_j(Ak)}{k_0}\ (j = 1, 2, 3) \tag{59}$$

или в координатном представлении

$$D_j(x) = E_j(x) - \int_{-\infty}^{x_0}\frac{\partial^2}{(\partial x_\perp)^2}\,A_j(x_0 - x_n,\, x_\perp)\,dx_0 +$$
$$+ \int_{-\infty}^{x_0}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_\perp}\cos\theta + \frac{\partial A_3}{\partial x_\perp}\sin\theta\right)dx_0. \tag{60}$$

Пользуясь (56) и тем, что все величины зависят от x_0 и x_n только в комбинации $(x_0 - x_n)$, легко убедимся в том, что $(\mathbf{ED}) = (\mathbf{BH}) = |[\mathbf{EH}]|$, или, иными словами,

$$T_{00}^2 = T_{j0}T_{j0}, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{61}$$

Соотношение (61) означает, что 4-вектор макроскопической энергии имеет исчезающий квадрат в согласии с тем, что пакет (49) движется со скоростью света. Кроме того, макроскопическая плотность энергии — импульса (54), (55) подчиняется локальному закону сохранения, что следует непосредственно из (56), (58), (61). Поскольку период осцилляций поля (23) является значительно меньшим (во всяком случае, если $\widetilde{k}^2$ вычислено по теории возмущений), чем характерные временные и пространственные размеры любой мыслимой экспериментальной установки, можно говорить, что измеряемые значения энергии и импульса суть как раз макроскопические величины. С этой точки зрения элементарные возбуждения (45) могли бы нарушать микропричинность на расстояниях порядка $1/\sqrt{\widetilde{k}^2}$, но во всяком случае не макроскопическую причинность.

Известно, что имеются серьезные препятствия к тому, чтобы можно было допустить нарушение микропричинности при сохранении макропричинности. Однако задача упрощается, если в теории содержится выделенный 4-вектор. В нашем случае это именно так благодаря спонтанному нарушению лоренц-инвариантности, сопутствующему нарушению трансляционной инвариантности. Направление 4-вектора n в (29) абсолютно произвольно, но, однажды возникнув, оно остается фиксированным (ср. направление спонтанной намагниченности в ферромагнетиках или значение фазы в сверхпроводниках).

К сожалению, мы не можем быть уверены в том, что (45) охватывает все решения уравнения (16), которые имеют пространственноподобный волновой вектор. Исследования уравнения (16), произведенные Баталиным и одним из авторов [18] для внешних полей, которые могут служить грубой моделью поля (22), показывают, что кроме элементарных возбуждений (45) в этом случае имеются также и другие элементарные возбуждения, порождаемые фиктивным полюсом. Вопросы о том, движутся ли эти дополнительные возбуждения быстрее света и существуют ли они в случае самосогласованных полей (22), (29), остаются пока открытыми.

Остановимся на свойствах элементарных возбуждений (44) — квантах вакуумного поля, которые являются частным случаем (45). Вектор-потенциал (44) приводит к равенствам $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, $(\mathbf{E}\ \mathbf{D}) = |\mathbf{E}|^2$ (но $\mathbf{E} \neq \mathbf{D}$) и энергия — импульс принимает свою обычную форму в пустоте (36), (39), (43). Элементарные возбуждения (44) весьма похожи на фотон. Мы уже установили аналогию между свободной плоской волной и полем вида (23), (44) сравнением (31) с (33). Теперь мы можем добавить совпадение скорости распространения (44) со скоростью фотонов и закон сохранения (38). Такова специфика электромагнитного вектор-потенциала, лежащего на световом конусе. Как ясно из формулы (37), такое поле для реализации его как классического требует в качестве источников ток электрически заряженных частиц, движущихся со скоростью света в направлении $\mathbf{n}$. Поэтому такое поле не рассматривается в классической электродинамике. Однако, с квантовой точки зрения, оно могло бы соответствовать частице с массой нуль, во многом подобной фотону. В нашем случае нужно различать два квадрата «массы»: равный нулю квадрат вектора макроскопической энергии — импульса P_μ и (взятый со знаком минус) квадрат волнового вектора k. Последняя «масса» — чисто мнимая, но она не имеет отношения к распространению элементарных возбуждений. Вектор k может определять характер зависимости силы от расстояния $r^{-1} \exp\{i\sqrt{\overline{k}^2}\, r\}$. Эта сила не является эффективным дальнодействием, поскольку она сильно осциллирует.

Резюмируя изложенное в разд. 3, 4, можно сказать, что наличие так называемого фиктивного полюса фотонного пропагатора в пространственноподобной области плоскости энергии — импульса приводит к спонтанному нарушению трансляционной инвариантности. Возникающий трансляционно-неинвариантный вакуум характеризуется классическим электромагнитным полем со структурой периодической решетки, период которой (элементарная длина) определяется местом расположения фиктивного полюса и потому весьма мал (насколько об этом можно судить по теории возмущений). В теории присутствуют свободные частицы нулевой массы — элементарные возбуждения трансляционно-неинвариантного вакуума (голдстоуновские бозоны, которые, в частности, являются квантами вакуумного поля).

Ни одно из найденных элементарных возбуждений, порождаемых в новом вакууме фиктивным полюсом, не содержит в себе противоречия с причинностью, но противоречит спектральности в ее обычной формулировке, т. е. требованию положительной определенности квадратов и нулевых компонент волновых векторов частиц, дающих вклад в условие унитарности. В представлении волнового 4-вектора функция Грина фотона не диагональна (т. е. зависит от двух волновых векторов k и k' — волновой вектор не сохраняется) и содержит «след» фиктивного полюса в пространственноподобной области. Мы имеем в виду, что этот полюс порождает возбуждения типа (44), (45) (мы не нашли других возбуждений), в то время как в обычном трансляционно-инвариантном подходе он приводит к более широкому классу возбуждений, среди которых есть такие, которые заведомо противоречат причинности.

Наряду с представлением волнового 4-вектора имеется диагональное представление функции Грина фотона (во всяком случае, если интегро-дифференциальный оператор в уравнении (3) эрмитов), в котором она зависит только от одного сохраняющегося 4-вектора, представляющего макроскопические энергию — импульс или 4-квазиимпульс. Пример функции Грина в представлении 4-квазиимпульса рассмотрен в следующем разделе для дираковской функции Грина. В диагональном представлении не должно быть полюса в пространственноподобной области плоскости 4-квазиимпульса. Элементарные возбуждения (44), (45) должны включаться в полную систему физических состояний. При выводе спектральных соотношений Челлена — Лемана они дадут вклад с мнимой массой и приведут к пространственноподобному полюсу в представлении микроскопического 4-импульса (волнового вектора), но дадут вклад с нулевой макроскопической массой и положительной макроскопической энергией в диагональном представлении. На этом языке наличие фиктивного полюса в трансляционно-инвариантном пропагаторе есть свидетельство неполноты использованных физических состояний и указание на неустойчивость трансляционно-инвариантного вакуума. Описанное весьма напоминает ситуацию в теории сверхпроводимости, где появление фиктивного полюса является следствием необходимости зачислить в полную систему физических состояний новые образования — куперовские пары.

5. Спектр электрона в вакуумном поле

Перейдем теперь к рассмотрению спектра электрона при наличии частного случая (22) среднего вакуумного поля (29). Для этого ограничимся таким приближением, когда в уравнении (1) пренебрегается массовыми операторами Σ^R и $\Sigma^{(1)}$, а в качестве вершины берется $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$. В этом приближении уравнение (1) превращается в уравнение для дираковской функции Грина с внешним полем $\langle A_\mu \rangle$. Используя результаты работы [19], в которой рассмотрено решение уравнения Дирака с внешним полем несколько более общего вида, чем (22), можно написать выражение для функции Грина [1]

$$G(x,\ x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{r=0}^{\infty} \int dp \int_{-1}^{1} d\omega \left(1 - i\ \frac{\hat{k}\,\hat{n}}{2np}\ \frac{d}{d\,(kx)}\right) \frac{-i\hat{p} + m - \frac{\hat{n}E_{r,\,\omega}}{2\,(np)}}{p^2 + m^2 + E_{r,\,\omega} - i\varepsilon} \times$$

$$\times \left(1 - i\ \frac{\hat{k}\,\hat{n}}{2np}\ \frac{d}{d\,(kx')}\right) \exp\{ip\,(x - x') + i\,\frac{\omega}{2}\ k\,(x - x')\} \times$$

$$\times\ \chi_{r,\,\omega}(kx)\,\chi_{r,\,-\omega}(kx'),\quad pk = 0. \tag{62}$$

Здесь интеграл берется по бесконечной трехмерной гиперповерхности $pk = 0$, а функция

$$v_{r,\,\omega}(kx) = e^{i\omega\frac{kx}{2}}\,\chi_{r,\,\omega}(kx), \qquad \chi_{r,\,\omega}(kx + 2\pi) = \chi_{r,\,\omega}(kx) \tag{63}$$

представляет собой собственное решение одномерного уравнения Шредингера (дифференциальное уравнение типа Матье)

$$\frac{k^2 d^2 v_{r,\,\omega}}{d\,(kx)^2} + 2e\,(np)\cos(kx)\,v_{r,\,\omega} = -E_{r,\omega}v_{r,\,\omega}, \qquad pk = 0. \tag{64}$$

[1] На протяжении этого раздела знак тильда над k всюду для краткости опущен $k \equiv \tilde{k}$.

Выражение (62) удовлетворяет уравнению, получаемому из (1) в рассматриваемом приближении:

$$(\hat{\partial}_x + m - ie\hat{n}\cos(kx))\, G(x, x') = \delta(x - x'), \quad n^2 = nk = 0. \tag{65}$$

Собственные функции (64) имеют блоховский вид и нумеруются зонным индексом r и непрерывным квантовым числом $\omega = 2q/k$. 4-вектор q (параллельный 4-вектору k) следует называть вектором квазиэнергии — квазиимпульса в соответствии с обычными правилами. Четырем квантовым числам p_μ, описывающим степени свободы в направлениях, ортогональных (в четырехмерном смысле) 4-квазиимпульсу q, мы сохраним наименование энергия — импульс. Для того чтобы убедиться в том, что уравнение (65) действительно выполнено, полезно иметь в виду соотношение полноты решений уравнения Матье в форме

$$\delta(x_k - x_k') = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \int_{-k/2}^{k/2} dq\, [v_{r,q}(kx)\, v_{r,-q}(kx')], \quad \text{где} \quad x_k = \frac{xk}{\sqrt{k^2}}. \tag{66}$$

Закон сохранения квазиэнергии — квазиимпульса при взаимодействии электрона с внешним полем выражается соотношением ортогональности

$$\delta_{rr'}\delta(q - q') = \frac{1}{2\pi} \int dx_k v_{r,q}(kx)\, v_{r',-q'}(kx). \tag{67}$$

Чтобы найти спектр электрона в «квазиимпульсном» представлении, нужно решить систему уравнений

$$p^2 + m^2 + E_{r,q} = 0, \quad pk = 0, \tag{68}$$

имея в виду, что, как это ясно из (64), $E_{r,q}$ зависит сложным образом от скалярного произведения np.

Структуру уравнения (68) легче всего понять в специальной системе отсчета, где q имеет одну пространственную компоненту, скажем q_3, а вектор n — две компоненты $n_0 = n_1$ (возможна другая ориентация $n_0 = -n_1$). В этой системе $p_3 = 0$ и (68) примет вид

$$p_1^2 + p_2^2 + m^2 - p_0^2 + E_{r,q}(n_0(p_1 - p_0)) = 0. \tag{69}$$

Проанализируем характер спектра в точке с равными нулю компонентой p_2 и квазиимпульсом q в нижней зоне ($p_2 = q = r = 0$). Тогда решением уравнения (64) является периодическая функция Матье $v_{00}(k_3x_3) = ce_0\left(\frac{k_3x_3}{2}, \frac{en_0(p_0 - p_1)}{2k_3^2}\right)$, а собственное значение имеет разложение по безразмерной величине [20]

$$\rho = \frac{\alpha(p_0 - p_1)^2}{k_3^2}, \tag{70}$$

где $\alpha = \dfrac{2e^2n_0^2}{k_3^2}$,

$$E_{00} = k_3^2\left(-\frac{\alpha(p_0 - p_1)^2}{k_3^2} + \frac{7}{8}\,\frac{\alpha^2(p_0 - p_1)^4}{k_3^4} - O(\rho^3)\right).$$

Удерживая в разложении (70) только первый член, находим из уравнения (63) спектр (верхний знак соответствует электрону, нижний —

позитрону)

$$p_0 = \frac{p_1\alpha \pm \sqrt{m^2(1+\alpha) + p_1^2}}{1+\alpha}. \tag{71}$$

Выражение (71) правильно передает спектр в некоторой окрестности точки $p_1 = 0$, $p_0 \sim m$. Экстремум этой функции (минимум для электрона, максимум для позитрона) достигается при значениях:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\alpha m}{\sqrt{1-\alpha}} \text{ — для электрона,} \\ p_1 &= \frac{\alpha m}{\sqrt{1-\alpha}} \text{ — для позитрона,} \end{aligned} \tag{72}$$

лежащих симметрично относительно точки $p_1 = 0$, и равен

$$\begin{aligned} p_0 &= m\sqrt{1-\alpha} < m \text{ — для электрона,} \\ p_0 &= -m\sqrt{1-\alpha} > -m \text{ — для позитрона.} \end{aligned} \tag{73}$$

Специфическая черта спектра заключается в том, что электрон (позитрон) обладает минимумом (максимумом) энергии не в покое, а при равномерном движении вдоль (навстречу) пространственной части вектора n, которая совпадает с направлением распространения энергии внешнего поля. Если представить себе электрон движущимся в диссипирующей энергию среде, то его предельным состоянием окажется не покой, а движение с постоянной скоростью $v = -2e^2n_0^2/k_3^2$. Электрон и позитрон меняются ролями, когда делается пространственное отражение. Это соответствует нарушению зарядовой симметрии, обсуждавшемуся ранее. Поскольку кривая (71) для энергии электрона (позитрона) при наличии спонтанновозникающего поля (22) идет, как можно показать, ниже (выше) соответствующей кривой для свободного электрона (позитрона) ($p_0 = \pm\sqrt{p_1^2 + m^2}$), можно заключить, что спонтанное появление поля (22) может оказаться энергетически выгодным.

Возникает вопрос, как может уменьшиться энергия и какова величина амплитуды вакуумного поля (22) (значение n_0), если таковая существует, которая доставляет энергии абсолютный минимум? Ответ на этот вопрос позволил бы фиксировать эту амплитуду в теории. Использование дальнейших членов разложения (70) оказывается, однако, для ответа на этот вопрос бесполезным.

Для возможного фиксирования амплитуды самосогласованного поля из соображений минимальности энергии и выяснения характера спектра при больших p_0, $p_\perp$ необходимо более тщательное исследование уравнения (68), которое сталкивается с трудностями, связанными с недостаточной исследованностью уравнения Матье. Важно также найти асимптотическое поведение $E_{r,q}$ при $p \to \infty$, поскольку от него зависят расходимости интегралов в теории возмущений. Что касается зависимости энергии p_0 от квазиимпульса, то она содержит щели при $q = \pm\frac{\sqrt{k^2}}{2} \gg m^2$, ширина которых пропорциональна $e\,(np)$.

Если амплитуда внешнего поля не слишком велика, зависимость энергии как от $\mathbf{p}$, так и от квазиимпульса $\mathbf{q}$ при ныне экспериментально достижимых энергиях: $p_0 \ll \sqrt{k^2}$, практически не отличается по форме от спектра свободного электрона. Это означает, что электрон в самосогласованном поле (22) является квазисвободным при разумных значениях его скорости, причем обычные энергия — импульс заменяются квазиэнергией — квазиимпульсом. Такая замена представляется разумной, поскольку период осцилляций вакуумного поля (решетки) гораздо меньше размеров любых доступных приборов и доступных времен производства измерений.

Чтобы добиться совершенства этой интерпретации, мы должны доказать, что вероятность несохранения квазиэнергии — квазиимпульса в процессах с участием более одной частицы (так называемое явление переброса) исчезает в случае самосогласованного поля (22) в противоположность теориям с обычным внешним периодическим полем. Упомянутое сохранение должно иметь своим формальным выражением появление δ-функций, сохраняющих 4-квазимпульс в электрон-фотонных вершинах, если развита диаграммная техника в поле (22) (картина Фарри) в квазиимпульсном представлении. В этой технике обычные свободные пропагаторы должны быть заменены пропагаторами, взятыми из выражения для электронной функции Грина (62) $\dfrac{-i\hat{p}+m-\hat{n}E_{r,\,q}/2np}{p^2+m^2+E_{r,\,q}-i\varepsilon}$ и из (не полученного) решения уравнения (3) для фотонной функции Грина $D_{\mu\nu}$. Хотя наличие упомянутых δ-функций еще не доказано, можно верить в возможность сделать это вследствие сохранения энергии — импульса самосогласованного поля (22), доказанного в разд. 3 (см. соотношение (38)).

Еще одно замечание по поводу выражения (62). Очевидно, что оно не содержит особенности при $n \to 0$, и поэтому разложение по степеням n, предпринятое в разд. 3 при доказательстве того, что среднее поле (22) дает решение уравнения (2), является оправданным.

6. Вакуумное поле в виде свободной электромагнитной волны

В этом разделе мы укажем на существование некоторого другого класса точных решений бесконечной системы (1) — (14) при $J_\mu = 0$ для вакуумного среднего оператора электромагнитного поля $\langle A_\mu \rangle$. Пусть

$$\langle A_\mu(x)\rangle = \varepsilon_\mu V(nx), \qquad n^2 = \varepsilon n = 0, \qquad |\varepsilon_0| < |\boldsymbol{\varepsilon}|. \tag{74}$$

Выражение (74) задает свободное электромагнитное поле в лоренцовой калибровке

$$\Box \langle A_\mu(x)\rangle = 0. \tag{75}$$

Выражение (74) в импульсном представлении имеет вид

$$\langle A_\mu(s)\rangle = \varepsilon_\mu \int d\alpha V(\alpha)\,\delta(s-\alpha n), \quad n^2 = \varepsilon n = 0. \tag{76}$$

Очевидно, что подстановка (76) (с $s = k$) обращает в нуль левую часть уравнения (2) или (18) (напомним, что $\Pi^R_{\mu\nu}(k) = (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\,\pi(k^2)$):

$$(k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)(1-\pi(k^2))\,\varepsilon_\nu \int d\alpha V(\alpha)\,\delta(k-\alpha n) = 0. \tag{77}$$

Для доказательства того, что и правая часть (2) при $J_\mu = 0$ (или, что то же, правая часть (18)) обращается в нуль подстановкой (76), поступим так же, как в разд. 3.

Разлагая правую часть (18) в функциональный ряд по $\langle A \rangle$:

$$\int \Pi_{\mu\nu}^{(1)\lambda}(k,\ s)\langle A_\nu(s)\rangle\, ds = \sum_r \frac{\lambda^r}{r!}\int \frac{\delta^r \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k,\ s)}{\delta\langle A_{\mu_1}(s_1)\rangle \ldots \delta\langle A_{\mu_r}(s_r)\rangle}\Bigg|_{\langle A\rangle=0} \langle A_{\mu_1}(s_1)\rangle \ldots$$
$$\ldots\langle A_{\mu_r}(s_r)\rangle\langle A_\nu(s)\rangle\, ds_1 \ldots ds_r ds, \tag{78}$$

и пользуясь тем обстоятельством, что коэффициенты этого разложения трансляционно-инвариантны, получаем подстановкой (76)

$$\sum_r \frac{\lambda^r}{r!}\int \delta\Big(k - \alpha n - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i n\Big) V(\alpha_1)\ldots V(\alpha_r)\, V(\alpha)\, F^{(\alpha_i,\ r)}_{\mu,\nu,\mu_1\ldots\mu_r}(n)\, \varepsilon_{\mu_1}\ldots\varepsilon_{\mu_r}\varepsilon_\nu\, d\alpha\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_r. \tag{79}$$

Тензор $F^{(\alpha_i r)}_{\mu\nu\mu_1\ldots\mu_r}(n)$ может быть построен с помощью вектора n_μ или с помощью тензора $\delta_{\alpha\beta}$. Однако если хотя бы один из индексов μ, ν, $\mu_1 \ldots \mu_r$ несет на себе вектор n, выражение (79) обращается в нуль при свертке с одним из векторов ε. Тензор F содержит четное число индексов вследствие теоремы Фарри. Поэтому если в нем возникает n_μ, то вектор n должен войти также по крайней мере еще с одним индексом и в этом случае выражение (79) также обращается в нуль.

Остается рассмотреть вариант, когда тензор F построен из одних только тензоров $\delta_{\alpha\beta}$, умноженных на скалярную функцию от n^2. Ввиду того что $n^2 = 0$, эта скалярная функция может быть только константой, а вся часть тензора F, построенная из тензоров $\delta_{\alpha\beta}$, представляет собой матричный элемент многофотонного рассеяния обычной трансляционно-инвариантной теории при нулевых значениях всех импульсов фотонов. Хорошо известно, что требование градиентной инвариантности обращает эту величину в нуль. Таким образом, выражения (74), (76) дают точное решение бесконечной перенормированной системы (1) — (14) для вакуумного среднего электромагнитного поля. Обращение в нуль величины (78) при подстановке (76) имеет простой физический смысл: рассеяние любого числа фотонов с параллельными 4-импульсами происходит без их взаимодействия.

Более общим решением является выражение

$$\langle A_\mu(s)\rangle = \int \varepsilon_\mu V_\varepsilon(\alpha)\, \delta(\alpha n - s)\, d\alpha\, d\varepsilon, \qquad \varepsilon n = n^2 = 0, \tag{80}$$

в котором интегрирование производится по гиперповерхности, ортогональной вектору n. Линейная комбинация решений с разными векторами n не является решением (ср. (29)). Отличие от нуля и от константы вакуумного среднего (80) означает, что вакуум содержит в себе все квантовые числа электромагнитного поля, в частности спин, т. е. нарушены спонтанно не только трансляционная и лоренц-инвариантности, но и четность.

Решение (80) вырождено по амплитуде, и поэтому согласно теореме из разд. 2 в теории присутствуют свободные частицы с волновой функцией, пропорциональной (80), т. е. роль голдстоуновских бозонов в нашем случае играют фотоны с волновым вектором, параллельным в четырехмерном смысле волновому вектору среднего вакуумного поля.

Полученное нами решение в виде свободной плоской волны имеет в этой связи простую физическую интерпретацию: оно соответствует бесконечному числу фотонов (т. е. классическому полю), сопровождающих любой электромагнитный процесс (по современным представлениям, сечение чисто упругих электромагнитных процессов равно нулю).

Имея в виду, что формальным источником решения (80) является обращение в нуль трансляционно-инвариантной части поляризационного оператора $\Pi^R_{\mu\nu}(k)$ при $k = 0$, т. е. та же причина, которая ведет к существанию полюса $1/k^2$ у фотонного пропагатора и к инфракрасной катастрофе, можно полагать, что бесконечное вырождение вакуума и других состояний по числу фотонов является математической причиной проявления (инфракрасных) расходимостей при разложении по теории возмущений.

С этой точки зрения следовало бы сначала решить нечто аналогичное секулярному уравнению, которое позволило бы определенным образом приготовить состояния, т. е. найти функцию распределения по импульсам голдстоуновских фотонов и только после этого производить разложение по теории возмущений, которое уже должно быть свободно от инфракрасных расходимостей. Известно, что, описывая асимптотически свободный электрон вектором нефоковского представления, содержащим наряду с электроном бесконечное число когерентных фотонов, можно так подобрать [21, 22] распределение последних, чтобы теория возмущений, использующая нефоковское электронное состояние как исходное, не приводила к инфракрасным расходимостям. При этом распределение фотонов оказывается коррелированным с импульсом электрона и содержит, естественно, параметр, представляющий собой разрешающую способность прибора.

Возможность описания электрона вектором нефоковского представления является в действительности прямым следствием вырождения, связанного со спонтанным нарушением трансляционной инвариантности. Что касается бозонного спектра, то можно показать [1, 2], что уравнение (16) в присутствии спонтанновозникшей плоской электромагнитной волны с волновым вектором n не имеет решений с волновым вектором, лежащим на световом конусе и не параллельным n. Ввиду того что спонтанное направление n полностью произвольно и все n, различные по направлению, равновероятны, описанная ситуация не должна приводить к реальной анизотропии. Гиперповерхность, описывающая спектр фотона, имеет общую линию $k_\mu = \beta n_\mu$ со световым конусом как следствие теоремы из разд. 2. Фотонный полюс в фотонном пропагаторе имеет вблизи точки $k = 0$ структуру $[k^2 - \alpha(e^2)(kn)^2]^{-1}$. Явная форма для функции распространения фотона во внешнем поле, являющемся частным случаем поля (74) с $V(nx) = nx$, получена в работе [18].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разд. 1 сформулирована задача поиска спонтанного нарушения трансляционной и других инвариантностей в рамках решения бесконечной системы уравнений для функций Грина. Эта система берется в полностью перенормированном виде, так что не возникает необходимости вводить нефизические обрезающие параметры. Получены два явные выражения для вакуумного среднего оператора электромагнитного поля $\langle A_\mu(x)\rangle$, точно удовлетворяющие упомянутой бесконечной системе в пределе исчезающего классического источника. Существование этих решений говорит в пользу принципиальной допустимости трансляционно-неинвариантных состояний физической системы в квантовой электродинамике.

Одно из этих точных решений, описанное в разд. 6, является свободной классической плоской электромагнитной волной довольно произвольной формы и по своему физическому смыслу соответствует бесчисленному числу фотонов, которые, как известно, сопровождают любой электромагнитный процесс рассеяния. Это решение обязано своим возникновением фотонному полюсу в функции Грина, и вырождение вакуума, связанное с его существованием, может быть математической причиной инфракрасных расходимостей. С другой стороны, фотонный полюс пропагатора в трансляционно-неинвариантном состоянии ослаблен. Мы имеем в виду, что свободные фотоны, которые могут рождаться (элементарные возбуждения трансляционно-неинвариантного вакуума или голдстоуновские бозоны), должны быть коррелированы с «вакуумным» полем. Другими словами, фотонная функция распространения зависит от волнового вектора, выделенного полем $\langle A_\mu(x)\rangle$. Конкретный пример фотонной функции распространения получен в работе [18].

В противоположность описанному, второе из полученных точных решений ведет к весьма специфической ситуации.

Известно, что обычная функция распространения фотона, будучи вычислена методом суммирования наиболее существенных диаграмм теории возмущений, имеет полюс в пространственноподобной области в комплексной плоскости энергии — импульса. Об этом полюсе обычно говорят как о фиктивном, поскольку он запрещен условием причинности и гипотезой о полноте состояний с положительной энергией. Хотя фиктивный полюс возникает в результате никак не безупречной процедуры, многие авторы склонны рассматривать его как проявление внутренней противоречивости квантовой электродинамики и других полевых теорий с зарядовыми расходимостями.

В разд. 3 показано, что «фиктивный» полюс фотонной функции распространения ведет к возможности спонтанного нарушения трансляционной инвариантности. В этом случае также найдено точное выражение для $\langle A_\mu(x)\rangle$, и оно обладает весьма специфическими свойствами: 4-вектор-потенциал $\langle A_\mu(x)\rangle$ лежит на световом конусе, будучи взят в лоренцовой калибровке. Тензор напряженности такого потенциала имеет такую же структуру, что и для свободной плоской электромагнитной волны, но отличается от последней своей пространственно-временно́й зависимостью. Энергия — импульс этого поля сохраняются. Это уникальное свойство (известное только для свободного электромагнитного поля) есть следствие того, что трансляционная инвариантность нарушена спонтанно, и оно приводит в конечном счете к возможности введения сохраняющихся макроскопических энергии и импульса. Вторым замечательным свойством 4-потенциала, лежащего на световом конусе, является то, что 4-вектор энергии — импульса электромагнитного поля также лежит на световом конусе (скорость распространения равна скорости света). 4-вектор энергии — импульса не имеет никакого отношения к волновому вектору, который пространственноподобен (фазовая скорость больше световой). Вакуумное среднее электрического тока также отлично от нуля, так что и зарядовая инвариантность спонтанно нарушена. Решение, полученное для вакуумного поля $\langle A_\mu(x)\rangle$, позволяет, в частности, сконструировать из него двумерную пространственную периодическую решетку. Осцилляции решетки чрезвычайно быстры, и период («элементарная длина») определяется положением фиктивного полюса.

В пренебрежении радиационными добавками может быть найдена гриновская функция дираковского электрона в трансляционно-неинвариантном вакууме (см. разд. 5). Это особенно легко сделать для одномерной решетки, когда уравнение Дирака сводится к одномерному уравнению Шредингера с периодическим потенциалом, что также есть результат специфики поля с изотропным вектором поляризации.

Спектр электрона в представлении 4-квазиимпульса имеет щели при очень больших значениях квазиимпульса. При разумных значениях квазиимпульса электрон в вакуумном поле «квазисвободен» (мы имеем в виду, что его спектр не отличим от спектра свободного электрона в трансляционно-инвариантном вакууме, если заменить 4-импульс на 4-квазиимпульс). Важным обстоятельством является то, что энергетическая кривая p_0 (p) для электрона проходит ниже, чем в случае трансляционно-инвариантного вакуума. Это означает, что переход в трансляционно-неинвариантное состояние может оказаться энергетически выгодным.

В разд. 4 точно найден некоторый класс элементарных возбуждений трансляционно-неинвариантного вакуума — голдстоуновских бозонов. Этот класс является подклассом элементарных возбуждений, порождаемых фиктивным полюсом в обычном подходе. Важным для нас является то, что этот подкласс настолько узок, что всякий волновой пакет, который может быть построен из описывающих его волновых функций, перемещается с единичной скоростью (т. е. со скоростью света в пустоте). Таким образом, причинность не нарушается элементарными возбуждениями, порождаемыми фиктивным полюсом, после перехода в трансляционно-неинвариантное состояние, порожденное этим же фиктивным полюсом.

С помощью процедуры, обычной для электродинамики анизотропных сред, элементарным возбуждениям может быть приписана макроскопическая плотность энергии — импульса, которая, во-первых, удовлетворяет локальному закону сохранения и, во-вторых, пространственный интеграл от нее является 4-вектором с исчезающим квадратом. При этом волновой вектор, описывающий элементарные возбуждения, пространственноподобен, и их фазовая скорость больше световой. Полученные элементарные возбуждения должны включаться в полную систему состояний, при этом постулат спектральности выполняется не в терминах волнового вектора, а в терминах макроскопического 4-импульса. Разумеется, мы не можем быть уверены, что в теории нет других элементарных возбуждений, которые могли бы противоречить макроскопической причинности.

Интересно отметить, что среди элементарных возбуждений, порождаемых фиктивным полюсом, есть такие, чья волновая функция пропорциональна вакуумному полю $A_\mu(x) \sim \langle A_\mu(x)\rangle$ (кванты вакуумного поля). Они во многих отношениях сходны с фотонами.

Хотя многие из возражений против пространственноподобного полюса фотонного пропагатора как будто устраняются переходом в трансляционно-неинвариантное состояние, дальнейший анализ может показать, что найденный вид спонтанного нарушения неприемлем по той или иной физической причине. В этом случае становится особенно важной проблема поиска других трансляционно-неинвариантных решений, также порождаемых фиктивным полюсом, которые исключали бы его полностью. Это может быть особенно важным для квантовой мезодинамики, так как решений найденного нами типа в этом случае вообще не существует, между тем именно квантовая мезодинамика нуждается в коренной перестройке, чтобы стать физической теорией. Программа «самоисключения» фиктивного полюса обсуждалась в разд. 2 в сравнении с аналогичной программой, о которой известно, что она успешно выполнена в квантовой статистике.

Оба точных решения, полученных для $\langle A_\mu(x)\rangle$, имеют произвольную амплитуду, ориентацию, и их форма также до некоторой степени произвольна. В разд. 5, 6 мы указывали на необходимость минимизации энергии в целях конкретизации решения. Сейчас мы хотим обсудить другую, по существу эквивалентную возможность. Отмеченный произвол может расцениваться как проявление бесконечного вырождения вакуума, связанного со спонтанным нарушением симметрии. Как известно, вырожденные состояния не являются, вообще говоря, устойчивыми по отношению к возмущениям: расходимости возникают, если пытаться применять разложения по теории возмущений непосредственно.

Инфракрасные расходимости связаны с решением, описанным в разд. 6, а ультрафиолетовые — с решением разд. 3 (потому что присутствие фиктивного полюса в обычной теории есть в конечном счете результат бесконечной ультрафиолетовой перенормировки). Согласно обычным правилам следует решить секулярное уравнение, прежде чем производить вычисления по теории возмущений. Стабильные состояния, которые должны получаться таким путем, являются функционалами от возмущения. В частности, они являются функционалами влияния измерительной установки. Это влияние не может быть пренебрежимо мало в условиях, когда физическая система является неустойчивой. Разумеется, отдельные непредсказуемые детали этого влияния не должны быть существенны. Однако ориентация четырехмерного изотропного вектора n_μ, который характеризует оба полученные решения для $\langle A_\mu(x)\rangle$ (при этом линейная комбинация нескольких векторов n_μ невозможна для решений), должна быть коррелирована с геометрией измерительного устройства, с геометрией постановки задачи рассеяния. Хотя существование выделенного вектора (лежащего на световом конусе) означает (спонтанное) нарушение лоренц-инвариантности, оно может не вести к нарушению принципа относительности, если этот вектор вносится измерительным устройством.

Другим параметром, отражающим влияние экспериментального устройства, является зависимость функции распределения голдстоуновских бозонов от способности устройства разрешать их по энергии. Факт явной зависимости сечения электромагнитных процессов от предельной разрешающей способности установки известен. Разрешающая способность по энергии фотонов заменяет собой физически бессмысленный обрезающий фактор — конечную «массу» фотона. В случае ультрафиолетовой расходимости в ответ, по-видимому, также должна входить в роли обрезающего фактора разрешающая способность установки относительно энергии элементарных возбуждений нулевой макроскопической массы. Она должна заменить собой введение параметра обрезания интегралов в области больших импульсов, присутствие которого в конечном ответе физически неоправданно.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. S. Fradkin, A. E. Shabad. P. N. Lebedev Physical Inst., preprint N 6 Moscow, 1967.
2. А. Е. Шабад. Диссертация. ФИАН, 1968.
3. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 26, 751 (1954).
4. Е. С. Фрадкин. Труды ФИАН, 29, 7 (1965).
5. А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 98, 361 (1954).
6. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 29, 121 (1955).
7. J. D. Bjorken. Ann. Phys., 24, 176 (1963): G. S. Guralnik. Phys. Rev., 136, B 1 404 (1964).
8. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 95, 1177 (1954).
9. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 28, 750 (1955).
10. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 102, 489 (1955).
11. P. I. Redmond. Phys. Rev., 112, 1404 (1958); P. I. Redmond, J. L. Uretsky. Phys. Rev. Letters, 1, 147 (1958); Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Д. В. Ширков. ЖЭТФ, 37, 805 (1959).
12. Д. А. Киржниц, В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 38, 239 (1960).
13. Ф. А. Березин. Докл. АН СССР, 143, 811 (1962).
14. Б. Л. Воронов. ЖЭТФ, 54, 1817 (1968).
15. K. Johnson, M. Baker, R. Willey. Phys. Rev. Letters, 11, 518 (1963); Phys. Rev., 136, B111 (1964); J. Bosner. Univ. of Washington preprint, RLO-1388-507, 1967.
16. Ю. А. Гольфанд. Ядерная физика, 7, 183 (1968).
17. J. Des Cloisaux. J. Phys. Radium, 20, 607, 707 (1960); L. G. Soos. J. Chem. Phys., 43, 1121 (1965); Д. А. Киржниц, Ю. А. Непомнящий. Письма ЖЭТФ, 4, 96 (1966).
18. И. А. Баталин, А. Е. Шабад. Препринт ФИАН, № 166, М., 1968.
19. А. Е. Шабад. Ядерная физика, 7, 685 (1968).
20. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
21. V. Chung. Phys. Rev., 140, B 1, 110 (1965).
22. T. W. B. Kibble. Phys. Rev., 175, 1624 (1968).