АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
1990 ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА Том 201

УДК 530.12:531.51

И. Л. БУХБИНДЕР, Д. М. ГИТМАН, Е. С. ФРАДКИН

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени, в которой гравитационное поле описывается классической метрикой, а все остальные физические поля являются квантованными, представляет собой важный этап в построении квантовой теории гравитации. Интерес к квантовой теории с внешним гравитационным полем в значительной мере обусловлен ее приложениями в физике черных дыр и космологии. Современные достижения квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени отражены в обзорных статьях [1—6] и книгах [7, 8]. Общепринято, что квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени представляет собой достаточно хорошую модель для описания многих квантово-гравитационных эффектов.

Отличительные особенности квантовой теории с внешним гравитационным полем обусловлены неоднозначностью выбора вакуумного состояния и в первую очередь проявляются в эффекте рождения частиц из вакуума. Последовательное описание эффекта рождения частиц требует точного учета взаимодействия с внешним гравитационным полем; по теории возмущений следует рассматривать только взаимодействия квантовых полей. Возможность рождения частиц из вакуума указывает на то, что стандартные фейнмановские правила для вычисления амплитуд квантовых процессов должны быть модифицированы.

Заметим, что в отличие от квантовой теории поля в плоском пространстве квантовая теория с внешним гравитационным полем содержит два типа матричных элементов. Во-первых, при вычислении амплитуд процессов возникают матричные элементы, в которых вакуумы начальных и конечных состояний не совпадают. Во-вторых, в теории появляются матричные элементы, представляющие собой средние значения по начальному состоянию. Такими матричными элементами являются, например, число частиц, рожденных из вакуума, и тензор энергии-импульса рожденной материи. Фейнмановские правила для вычисления указанных двух типов матричных элементов, вообще говоря, должны быть различными.

Указанные особенности квантовой теории поля с внешним гравитационным полем не являются специфическими именно для этой теории, а присущи любой квантовополевой модели с нестабильным вакуумом. Впервые и в полном объеме они выявлены и проанализированы на примере квантовой электродинамики с внешним полем в работах [9—13] (см. также: [82]).

Настоящая работа посвящена построению формализма квантовой электродинамики в искривленном пространстве-времени, учитывающего возможность рождения частиц сильным гравитационным полем, и фактически представляет собой обобщение методов работ [9—13], учитывающее искривленное пространство-время, и применение этих методов для рассмотрения некоторых квантовых эффектов во внешнем гравитационном поле.

Глава 1

ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

1. Лагранжиан и представление взаимодействия. Рассмотрим спинорную электродинамику в искривленном пространстве-времени. Лагранжиан системы полей имеет вид

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_{\text{int}}. \tag{1}$$

Здесь $\mathscr{L}_1$ — лагранжиан свободного спинорного поля:

$$\mathscr{L}_1 = \sqrt{-g}\,\bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu(x)D_\mu - m]\psi(x), \tag{2}$$

где $\gamma^\mu(x) = e^\mu_a(x)\gamma^a$ — обычные матрицы Дирака; $e^\mu_a(x)$ — тетрада; $D_\mu\psi = (\partial_\mu + {}^1/_2\omega_{\mu ab}\sigma^{ab})\psi$ — ковариантная производная спинора; ω^{ab}_μ — коэффициенты спинорной связности; $\sigma^{ab} = {}^1/_4(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)$ (см., напр.: [14]); $\mathscr{L}_2$ — лагранжиан свободного электромагнитного поля в лоренцевской калибровке:

$$\mathscr{L}_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2(\nabla_\mu A^\mu)^2); \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \tag{3}$$

$\mathscr{L}_{\text{int}}$ – лагранжиан взаимодействия:

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = -\sqrt{-g}\,j^\mu(x)A_\mu(x);$$
$$j^\mu(x) = \frac{e}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu(x)\psi(x)]. \tag{4}$$

Лагранжиан (1)—(4) соответствует следующим уравнениям движения:

$$i\gamma^\mu(x)D_\mu\psi(x) - m\psi(x) = e\gamma^\mu(x)\psi(x)A_\mu(x),$$
$$iD_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x) + m\bar{\psi}(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)A_\mu(x), \tag{5}$$
$$(\Box\,\delta^\mu_\nu - R^\mu_\nu(x))A^\nu(x) = -j^\mu(x),$$

где $\Box A_\mu = \nabla^\alpha\nabla_\alpha A_\mu$.

Коммутационные соотношения для операторов $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ можно записать в явно ковариантной форме. Пусть $\sigma(x) = \text{const}$ — пространственноподобная гиперповерхность, f_μ — произвольный вектор, φ_a ($a = 1, 2, 3, 4$) — произвольный спинор. Отличные от нуля перестановочные соотношения имеют вид

$$\int_\sigma [A_\mu(x), \nabla_\lambda A^\nu(x')]\,f_\nu(x')\,d\sigma^\lambda(x') = if_\mu(x),$$
$$\int_\sigma \{\psi_a(x), (\bar{\psi}(x')\gamma^\lambda(x'))_b\}\,\varphi_b(x')\,d\sigma_\lambda(x') = \varphi_a(x),\ x \in \sigma, \tag{6}$$

где [,] — коммутатор; {,} — антикоммутатор. Можно показать, что соотношения (6) не зависят от выбора гиперповерхности σ. Поэтому в качестве σ можно выбрать поверхность $x^0 = \text{const}$. Тогда соотношения (6) переходят в одновременные канонические перестановочные соотношения.

Уравнения (5) являются полевыми уравнениями в гейзенберговском представлении. Для построения теории возмущений удобно перейти к представлению взаимодействия, в котором уравнения движения для полевых операторов становятся однородными.

Введем операторы:

$$\tilde{\psi}(x) = S(\sigma, \sigma_0)\psi(x)S^{-1}(\sigma, \sigma_0), \quad \tilde{\bar{\psi}}(x) = S(\sigma, \sigma_0)\bar{\psi}(x)S^{-1}(\sigma, \sigma_0), \tag{7}$$
$$\tilde{A}_\mu(x) = S(\sigma, \sigma_0)A_\mu(x)S^{-1}(\sigma, \sigma_0), \quad S(\sigma_0, \sigma_0) = 1, \quad x \in \sigma.$$

Потребуем, чтобы оператор $S(\sigma, \sigma_0)$ удовлетворял общековариантному уравнению Томонага—Швингера [1]:

$$i\,\frac{\delta S(\sigma, \sigma_0)}{\delta\sigma(x)} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\tilde{\mathscr{L}}_{\text{int}}(x)\,S(\sigma, \sigma_0), \tag{8}$$

где $\tilde{\mathscr{L}}_{\text{int}}$ зависит от полевых операторов в представлении взаимодействия. Тогда можно показать, что операторы $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\bar{\psi}}(x)$, $\tilde{A}_\mu(x)$ удовлетворяют полевым уравнениям для свободных полей. Заметим, что взаимодействие с внешним гравитационным полем учтено точно.

Формальное решение уравнения (8) имеет вид

$$S(\sigma, \sigma_0) = T\exp\left\{i\int_{\sigma_0}^{\sigma}\tilde{\mathscr{L}}_{\text{int}}(x)\,d^4x\right\}. \tag{9}$$

Интегрирование ведется по четырехмерному объему, заключенному между двумя гиперповерхностями $\sigma(x) = \sigma$ и $\sigma(x) = \sigma_0$.

Ряд теории возмущений получается разложением оператора $S(\sigma, \sigma_0)$ по степеням e.

Далее, если специально не оговорено, мы будем иметь дело только с операторами в представлении взаимодействия, поэтому волна над операторами ставиться не будет.

2. Свободное спинорное поле. Полевые уравнения свободного спинорного поля имеют вид

$$i\gamma^\mu(x)D_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0, \quad iD_\mu\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x) + m\bar{\psi}(x) = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим описание квантовых процессов для невзаимодействующих фермионов.

Расчеты амплитуд процессов предполагают, что начальные и конечные состояния заданы. Предположим, что пространство-время является глобально гиперболическим [15], и рассмотрим две пространственно-подобные гиперповерхности $\sigma(x) = \sigma_1$ и $\sigma(x) = \sigma_2$. Предположим далее, что поверхность σ_2 лежит в будущем по отношению к поверхности σ_1, что обозначим так: $\sigma_2 > \sigma_1$. Начальные состояния будут задаваться на поверхности σ_1, а конечные — на поверхности σ_2. Согласно общим принципам квантовой механики, на фиксированной пространственно-подобной поверхности можно приготовить произвольное состояние. Следовательно, можно ставить вопрос о вероятности перехода в произвольное состояние на другой фиксированной пространственно-подобной поверхности.

Конкретный выбор состояний должен определяться из физических соображений. При решении конкретных задач предлагались разные способы выбора состояний квантованных полей в искривленном пространстве-времени (см., напр.: [7, 9—13, 16—27]). Единый рецепт построения состояний частиц во внешнем гравитационном поле в настоящее время отсутствует.

Мы рассмотрим формальный метод, пригодный для любых начальных и конечных состояний. Единствено, что предполагается об этих состояниях, это то, что для них каким-либо образом проведена классификация по типу частица-античастица. Пусть на поверхности σ_1 задан полный набор состояний $\{\pm\varphi_p(x \mid \sigma_1)\}$, где знак «+» относится к электронным, а знак «—» — к позитронам, и пусть на поверхности σ_2 задан полный набор состояний $\{\pm\varphi_q(x \mid \sigma_2)\}$. Здесь p, q — квантовые числа; обозначение $\varphi(x \mid \sigma)$ указывает, что точка с координатами x лежит на фиксированной поверхности σ. Введенные соотношения удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$(\pm\varphi_p, \pm\varphi_{p'})_{\sigma_1} = \delta_{pp'}, \quad (\pm\varphi_p, \mp\varphi_{p'})_{\sigma_1} = 0, \tag{11}$$

[1] Приведем определение производной по гиперповерхности: $\dfrac{\delta F(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = \lim\limits_{\Delta v\to 0}\dfrac{F(\sigma') - F(\sigma)}{\Delta v}$, $\Delta v = \sqrt{-g}\,\Delta x^0\Delta x^1\Delta x^2\Delta x^3$; σ' получается из σ деформацией вблизи точки x.

где скалярное произведение состояний имеет вид

$$(\varphi_1, \varphi_2)_\sigma = \int_\sigma \overline{\varphi}_1 (x \mid \sigma) \gamma^\mu (x) \varphi_2 (x \mid \sigma) \, d\sigma_\mu (x), \tag{12}$$

и соотношение полноты

$$\int_{\sigma_1} \sum_\rho ({}_+\varphi_p (x \mid \sigma_1) {}_+\overline{\varphi}_p (x' \mid \sigma_1) + {}_-\varphi_p (x \mid \sigma_1) {}_-\overline{\varphi}_p (x' \mid \sigma_1)) \gamma^\mu (x') f (x' \mid \sigma_1) \times$$
$$\times d\sigma_\mu (x') = f (x \mid \sigma_1), \qquad \forall f (x \mid \sigma_1). \tag{13}$$

Равенства, аналогичные равенствам (11)—(13), выполнены и для состояний $\{\pm\varphi_q (x \mid \sigma_2)\}$.

Разложим полевой оператор $\psi (x \mid \sigma_1)$ на полной системе состояний $\{\pm\varphi_p (x \mid \sigma_1)\}$:

$$\psi (x \mid \sigma_1) = \sum_\rho \{a_p (\text{in}) {}_+\varphi_p (x \mid \sigma_1) + b_p^+ (\text{in}) {}_-\varphi_p (x \mid \sigma_1)\}. \tag{14}$$

Отсюда

$$a_p (\text{in}) = ({}_+\varphi_p, \psi)_{\sigma_1}, \quad b_p^+ (\text{in}) = ({}_-\varphi_p, \psi)_{\sigma_1},$$
$$a_p^+ (\text{in}) = ({}_+\varphi_p, \overline{\psi})_{\sigma_1}, \quad b_p (\text{in}) = ({}_-\varphi_p, \overline{\psi})_{\sigma_1}. \tag{15}$$

Из соотношений (6), (15) следуют перестановочные соотношения для операторов a (in), a^+ (in), b (in), b^+ (in):

$$\{a_p (\text{in}), a_{p'}^+ (\text{in})\} = \{b_p (\text{in}), b_{p'}^+ (\text{in})\} = \delta_{pp'},$$
$$\{a_p (\text{in}), a_{p'} (\text{in})\} = \{a_p (\text{in}), b_{p'} (\text{in})\} = \{b_p (\text{in}), b_{p'} (\text{in})\} = 0. \tag{16}$$

Разложим полевой оператор $\psi (x \mid \sigma_2)$ по полной системе состояний $\{\pm\varphi_q (x \mid \sigma_2)\}$:

$$\psi (x \mid \sigma_2) = \sum_q \{a_q (\text{out}) {}^+\varphi_q (x \mid \sigma_2) + b_q^+ (\text{out}) {}^-\varphi_q (x \mid \sigma_2)\}. \tag{17}$$

Из соотношений (6), (16) следуют перестановочные соотношения

$$\{a_q (\text{out}), a_{q'}^+ (\text{out})\} = \{b_q (\text{out}), b_{q'}^+ (\text{out})\} = \delta_{qq'},$$
$$\{a_q (\text{out}), a_{q'} (\text{out})\} = \{a_q (\text{out}), b_{q'} (\text{out})\} = \{b_q (\text{out}), b_{q'} (\text{out})\} = 0. \tag{18}$$

С помощью операторов уничтожения электронов и позитронов a (in), a (out), b (in), b (out) можно определить вакуумные векторы спинорного поля $|0\rangle_{\text{in}}$, $|0\rangle_{\text{out}}$ как решения уравнений

$$a_p (\text{in}) \mid 0\rangle_{\text{in}} = b_p (\text{in}) \mid 0\rangle_{\text{in}} = 0, \quad \forall p,$$
$$a_q (\text{out}) \mid 0\rangle_{\text{out}} = b_q (\text{out} \mid 0\rangle_{\text{out}} = 0, \quad \forall q. \tag{19}$$

Уравнения (19) имеют решение в исходном гильбертовом пространстве, если операторы $\{a (\text{in}), a^+ (\text{in}), b (\text{in}), b^+ (\text{in})\}$ и $\{a (\text{out}), a^+ (\text{out}), b (\text{out}), b^+ (\text{out})\}$ унитарно эквивалентны набору операторов уничтожения и рождения, для которых существует вакуумный вектор в этом гильбертовом пространстве [29]. Известно, что для свободного спинорного поля в плоском пространстве-времени вакуумный вектор существует. Тогда можно показать [9], что условия разрешимости уравнений (19) в исходном гильбертовом пространстве имеют вид

$$\sum_{p, p'} \{ |({}_+\varphi_p, {}_-\varphi_{p'}^{(0)})_{\sigma_1}|^2 + |({}_-\varphi_p, {}_+\varphi_{p'}^{(0)})_{\sigma_1}|^2\} < \infty,$$
$$\sum_{q, q'} \{ |({}^+\varphi_q, {}^-\varphi_{q'}^{(0)})_{\sigma_2}|^2 + |({}^-\varphi_q, {}^+\varphi_{q'}^{(0)})_{\sigma_2}|^2\} < \infty, \tag{20}$$

где ${}_\pm\varphi_p^{(0)} (x \mid \sigma_1) = {}_\pm\varphi_p (x \mid \sigma_1 |)_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}$; ${}^\pm\varphi_q^{(0)} (x \mid \sigma_2) = {}^\pm\varphi_q (x \mid \sigma_2)|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}$.

Для дальнейшего нам потребуются амплитуды простейших квантовых процессов: $c_v = {}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid 0 \rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда вероятности вакууму остаться вакуумом; $w(\overset{+}{q} \mid \overset{+}{p}) = c_v^{-1}\, {}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid a_q(\mathrm{out})\, a_p^+(\mathrm{in}) \mid 0 \rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда рассеяния электрона; $w(\bar{q} \mid \bar{p}) = c_v^{-1}\, {}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid b_q(\mathrm{out}) b_p^+(\mathrm{in}) \mid 0 \rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда рассеяния позитрона; $w(0 \mid \bar{p}' \overset{+}{p}) = c_v^{-1}\, {}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid b_{p'}^+(\mathrm{in}) a_p^+(\mathrm{in}) \mid 0 \rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда уничтожения пары; $w(\overset{+}{q}\bar{q}' \mid 0) = c_v^{-1}\, {}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid a_q(\mathrm{out})\, b_{q'}(\mathrm{out}) \mid 0 \rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда рождения пары.

Для вычисления этих амплитуд установим соотношения, связывающие операторы a (in), b (in) и a (out) b (out). Заметим, что решения уравнений (10) связаны между собой посредством функции Грина $G(x, x')$:

$$\psi(x) = \int_\sigma G(x, x')\, \gamma^\mu(x')\, \psi(x')\, d\sigma_\mu(x'),$$

$$\overline{\psi}(x) = \int_\sigma \overline{\psi}(x')\, \gamma^\mu(x')\, G(x', x)\, d\sigma_\mu(x'). \tag{21}$$

Причем из перестановочных соотношений (6) следует, что $G(x, x') = \{\psi(x), \overline{\psi}(x')\}$. Функция Грина $G(x, x')$ — это биспинор [14], удовлетворяющий уравнениям

$$i\gamma^\mu(x) D_{(x)\mu};\ (x, x') - mG(x, x') = 0, \quad iD_{(x')\mu}\, G(x, x')\gamma^\mu(x') + mG(x, x') = 0$$

и граничному условию

$$(G(x, x')\gamma^\mu(x')_{ab} n_\mu(x) = i\delta_{ab}\delta_\mu(x, x'),$$

где n_μ — нормаль к поверхности σ; $\delta_\sigma(x, x')$ — δ-функция на поверхности, определяемая соотношением

$$\int_\sigma \delta_\sigma(x, x')\, n^\mu(x')\, d\sigma_\mu(x') = 1.$$

Функцию Грина $G(x, x')$ можно построить, используя любой полный и ортонормированный набор решений $\{\varphi_n(x)\}$ уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени:

$$G(x, x') = \sum_n \varphi_n(x)\, \overline{\varphi}_n(x').$$

Положим в соотношении (21) $x \in \sigma_2$ и $\sigma = \sigma_1$, т. е. запишем

$$\psi(x \mid \sigma_2) = \int_{\sigma_1} G(x, x')\, \gamma^\mu(x')\, \psi(x' \mid \sigma_1)\, d\sigma_\mu(x').$$

Подставим в левую часть этого равенства разложение (17), а в правую — разложение (14) и используем соотношения ортогональности. Тогда получим [69]:

$$a(\mathrm{out}) = G({}^+|_+)\, a(\mathrm{in}) + G({}^+|_-) b^+(\mathrm{in}), \quad b^+(\mathrm{out}) = G({}^-|_+) a(\mathrm{in}) + G({}^-|_-) b^+(\mathrm{in}),$$

$$a^+(\mathrm{out}) = a^+(\mathrm{in}) G({}_+|^+) + b(\mathrm{in})\, G({}_-|^+), \quad b(\mathrm{out}) = a^+(\mathrm{in}) G({}_+|^-) + b(\mathrm{in}) G({}_-|^-), \tag{22}$$

где

$$G\left({}^{\pm}_{q}\middle|{}^{p}_{\pm}\right) = \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu(x) \int_{\sigma_1} d\sigma_\nu(x')\, {}^{\pm}\overline{\varphi}_q(x \mid \sigma_2)\, \gamma^\mu(x)\, G(x, x')\, \gamma^\nu(x')\, {}_{\pm}\varphi_p(x' \mid \sigma_1);$$

$$G\left({}^{p}_{\pm}\middle|{}^{\pm}_{q}\right) = \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu(x) \int_{\sigma_2} d\sigma_\nu(x')\, {}_{\pm}\overline{\varphi}_p(x \mid \sigma_1)\, \gamma^\mu(x)\, G(x, x')\, \gamma^\nu(x')\, {}^{\pm}\varphi_q(x' \mid \sigma_2). \tag{23}$$

Аналогично из соотношения (21) при $x \in \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$ получим

$$a\,(\mathrm{in}) = G\,({}_+|{}^+)a\,(\mathrm{out}) + G\,({}_+|{}^-)b^+\,(\mathrm{out}),\quad b^+\,(\mathrm{in}) = G\,({}_-|{}^+)a\,(\mathrm{out}) + G\,({}_-|{}^-)b^+\,(\mathrm{out}),$$
$$a^+\,(\mathrm{in}) = a^+\,(\mathrm{out})G\,({}^+|{}_+) + b(\mathrm{out})G\,({}^-|{}_+),\quad b\,(\mathrm{in}) = a^+\,(\mathrm{out})G\,({}^+|{}_-) + b\,(\mathrm{out})G\,({}^-|{}_-) \tag{24}$$

Для матричных элементов функций Грина $G\,({}^\pm|{}_\pm)$, $G\,({}_\pm|{}^\pm)$ имеет место ряд соотношений, получающихся из перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения in и out состояний и равенств (22), (23). Эти соотношения имеют вид

$$G\,({}^\pm|{}_+)G\,({}_+|{}^\pm) + G\,({}^\pm|{}_-)G\,({}_-|{}^\pm) = I,\quad G\,({}^\pm|{}_+)G\,({}_+|{}^\mp) + G\,({}^\pm|{}_-)G\,({}_-|{}^\mp) = 0,$$
$$G\,({}_\pm|{}^+)G\,({}^+|{}_\pm) + G\,({}_\pm|{}^-)G\,({}^-|{}_\pm) = I,\quad G\,({}_\pm|{}^+)G\,({}^+|{}_\mp) + G\,({}_\pm|{}^-)G\,({}^-|{}_\pm) = 0, \tag{25}$$
$$G\,({}^\pm|{}_\pm)^+ = G\,({}_\pm|{}^\pm).$$

Используя соотношения (22), (24), (25), можно найти выражения для амплитуд простейших процессов:

$$w\,(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p}) = G^{-1}\,({}_+|{}^+)_{qp},\quad w\,(\bar{q}|\bar{p}) = G^{-1}\,({}^-|{}_-)_{\bar{p}q},$$
$$w\,(0\,|\,\bar{p}'\overset{+}{p}) = [G\,({}_-|{}^+)G^{-1}\,({}_+|{}^+)]_{p'p} = -[G^{-1}\,({}^-|{}_-)G\,({}^-|{}_+)]_{p'p}, \tag{26}$$
$$w\,(\overset{+}{q}\bar{q}'\,|\,0) = [G^{-1}\,({}^+|{}_+)G\,({}_+|{}^-)]_{qq'} = -[G({}^+|{}_-)G^{-1}\,({}^-|{}_-)]_{qq'}.$$

Соотношения (22), (24) показывают, что операторы $\{a\,(\mathrm{out}), a^+\,(\mathrm{out}), b\,(\mathrm{out}), b^+\,(\mathrm{out})\}$ и $\{a\,(\mathrm{in}), a^+\,(\mathrm{in}), b\,(\mathrm{in}), b^+\,(\mathrm{in})\}$ связаны линейным преобразованием. Предположим, что это преобразование унитарно, тогда существует оператор V, такой, что

$$\begin{pmatrix} a\,(\mathrm{out}) \\ a^+\,(\mathrm{out}) \\ b\,(\mathrm{out}) \\ b^+\,(\mathrm{out}) \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} a\,(\mathrm{in}) \\ a^+\,(\mathrm{in}) \\ b\,(\mathrm{in}) \\ b^+\,(\mathrm{in}) \end{pmatrix}V,\quad {}_{\mathrm{out}}\langle 0| = {}_{\mathrm{in}}\langle 0|V. \tag{27}$$

Тогда

$$c_v = {}_{\mathrm{in}}\langle\,0\,|\,V\,|\,0\rangle_{\mathrm{in}}.$$

Явное выражение для оператора V можно найти, используя функциональные методы [29]:

$$V = c_v \exp\,[-a^+\,(\mathrm{in})w\,({}^{+-}|0)b^+\,(\mathrm{in})]\exp[a^+\,(\mathrm{in})\ln\,w\,({}^+|{}^+)a\,(\mathrm{in})]\times$$
$$\times \exp\,[b^+\,(\mathrm{in})\ln\,w\,({}^-|{}^-)b\,(\mathrm{in})]\exp\,[-b\,(\mathrm{in})w\,(0\,|{}^{-+})a\,(\mathrm{in})]. \tag{28}$$

Установим условия того, что оператор V является унитарным. Критерии унитарности оператора, осуществляющего линейное каноническое преобразование, найден в [29]. Использование этого критерия в нашем случае приводит к соотношению [9]:

$$\mathrm{Sp}\,[G\,({}^+\,|{}_-)G\,({}_-|{}^+) + G\,({}^-|{}_+)G\,({}_+|{}^-)] < \infty. \tag{29}$$

Покажем, что выражение, стоящее в левой части соотношения (29), представляет собой полное число электронов и позитронов, родившихся из вакуума. Число электронов, родившихся из вакуума в состоянии с квантовыми числами q, равно [70]:

$$n_q^+ = {}_{\mathrm{in}}\langle 0\,|\,a_q^+\,(\mathrm{out})\,a_q\,(\mathrm{out})\,|\,0\rangle_{\mathrm{in}} = [G\,({}^+\,|\,{}_-)\,G\,({}_-\,|\,{}^+)]_{qq}.$$

Аналогично число позитронов, родившихся из вакуума с квантовыми числами q, равно

$$n_q^- = {}_{\mathrm{in}}\langle 0\,|\,b_q^+\,(\mathrm{out})\,b_q\,(\mathrm{out})\,|\,0\rangle_{\mathrm{in}} = [G\,({}^-\,|\,{}_+)\,G\,({}_+\,|\,{}^-)]_{qq}.$$

Тогда полные числа рожденных электронов и позитронов имеют вид

$$n^+ = \mathrm{Sp}\, G\,({}^+|_-)G\,({}_-|^+), \quad n^- = \mathrm{Sp}\, G\,({}^-|_+)G\,({}_+|^-). \tag{30}$$

При этом $n^+ + n^-$ совпадает с левой частью соотношения (29). Можно показать также, что $n^+ = n^-$. Таким образом, если полное число частиц, рожденных гравитационным полем, конечно, то преобразование от in-операторов к out-операторам является унитарным, и наборот. Другое рассмотрение вопроса об унитарности преобразований (22), (24) проведено в работе [30].

3. Свободное электромагнитное поле. Уравнение свободного электромагнитного поля имеет вид

$$\Box A^\mu (x) - R^\mu_\nu (x) A^\nu (x) = 0. \tag{31}$$

Так же как и в разд. 2, предположим, что на гиперповерхностях σ_2, σ_1 заданы полные наборы состояний электромагнитного поля $\{{}_\pm e^\mu_{nj} (x \mid \sigma_1), n_1^\nu \nabla_{\nu\,\pm} e^\mu_{nj} (x \mid \sigma_1)\}$ и $\{{}^\pm e^\mu_{mi} (x \mid \sigma_2), n_2^\nu \nabla^\pm_\nu e^\mu_{mi} (x \mid \sigma_2)\}$, где $n^\nu_{1,2}$ — нормаль к поверхности $\sigma_{1,2}$; ${}_-e^\mu_{nj} = {}_+e^{\nu *}_{nj}$; ${}^-e^\mu_{mi} = {}^+e^{\mu *}_{mi}$; m, n — квантовые числа; $i, j = 0, 1, 2, 3$ — индексы поляризации. Введенные состояния удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\begin{gathered}({}_+e_{nj}, {}_+e_{n'j'})_{\sigma_1} = \delta_{nn'}\eta_{jj'}, \quad ({}_\pm e_{nj}, {}_\mp e_{n'j'})_{\sigma_1} = 0,\\ ({}^+e_{mi}, {}^+e_{m'i'})_{\sigma_2} = \delta_{mm'}\, \eta_{ii'}, \quad ({}^\pm e_{mi}, {}^\mp e_{m'i'})_{\sigma_2} = 0,\end{gathered} \tag{32}$$

где

$$(e_1, e_2) = -i \int_\sigma e_1^{*\mu} (x \mid \sigma) \overleftrightarrow{\nabla}^\lambda e_{2\mu} (x \mid \sigma)\, d\sigma_\lambda (x),$$

и полноты:

$$-i \int_{\sigma_1} \sum_{n,\, j} {}_+e^\mu_{nj} (x \mid \sigma_1)\, {}_-e^\nu_{nj} (x' \mid \sigma_1) \overleftrightarrow{\nabla}^\lambda A_\nu (x' \mid \sigma_1)\, d\sigma_\lambda (x') = A_\mu (x \mid \sigma), \quad \forall A_\mu (x \mid \sigma). \tag{33}$$

Разложим полевые операторы $A_\mu (x \mid \sigma_1)$, $A_\mu (x \mid \sigma_2)$ по полным системам $\{{}_\pm e\}$ и $\{{}^\pm e\}$ соответственно:

$$\begin{gathered}A^\mu (x \mid \sigma_1) = \sum_{n,\, j} (c_{nj} (\mathrm{in})\, {}_+e^\mu_{nj} (x \mid \sigma_1) + c^+_{nj} (\mathrm{in})\, {}_-e^\mu_{nj} (x \mid \sigma_1)),\\ A^\mu (x \mid \sigma_2) = \sum_{m,\, i} (c_{mi} (\mathrm{out})\, {}^+e^\mu_{mi} (x \mid \sigma_2) + c^+_{mi} (\mathrm{out})\, {}^-e^\mu_{mi} (x \mid \sigma_2)).\end{gathered} \tag{34}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}c_{nj} (\mathrm{in}) = \eta_{jj}\, ({}_+e_{nj}, A)_{\sigma_1}, \quad c^+_{nj} (\mathrm{in}) = \eta_{jj}\, (A, {}_+e_{nj})_{\sigma_1},\\ c_{mi} (\mathrm{out}) = \eta_{ii}\, ({}^+e_{mi}, A)_{\sigma_2}, \quad c^+_{mi} (\mathrm{out}) = \eta_{ii}\, (A, {}^+e_{mi})_{\sigma_2},\end{gathered} \tag{35}$$

Из соотношений (6), (35) следуют перестановочные соотношения для операторов c (in), c^+ (in), c (out), c^+ (out):

$$\begin{gathered}[c_{nj} (\mathrm{in}), c^+_{n'j'} (\mathrm{in})] = -\eta_{jj'}\delta_{nn'}, [c_{nj} (\mathrm{in}), c_{n'j'} (\mathrm{in})] = 0,\\ [c_{mi} (\mathrm{out}), c^+_{m'i'} (\mathrm{out})] = -\eta_{ii'}\delta_{mm'}, [c_{mi} (\mathrm{in}), c_{m'i'} (\mathrm{in})] = 0.\end{gathered} \tag{36}$$

Из равенств (36) видно, что операторы c_{n0} (in), c^+_{n0} (in) и c_{m0} (out), c^+_{m0} (out) имеют «неправильный» знак в коммутаторах, что указывает на необходимость использования индефинитной метрики. С помощью операторов уничтожения c (in), c (out) можно определить вакуумные векторы электромагнитного поля как решения уравнений

$$c_{nj} (\mathrm{in}) | 0\rangle_{\mathrm{in}} = 0, \ \forall n, j, \quad c_{mi} (\mathrm{out}) | 0\rangle_{\mathrm{out}} = 0, \ \forall m, i. \tag{37}$$

Используя условие Лоренца в форме

$$\langle \mathrm{in} \mid \nabla_\mu A^\mu (x \mid \sigma_1) \mid \mathrm{in} \rangle = 0,$$
$$\langle \mathrm{out} \mid \nabla_\mu A^\mu (x \mid \sigma_2) \mid \mathrm{out} \rangle = 0,$$

где $|\mathrm{in}\rangle$, $|\mathrm{out}\rangle$ — произвольные линейные комбинации фоковских векторов, образованных соответственно путем действия операторов $c^+_{nj}(\mathrm{in})$ на $|0\rangle_{\mathrm{in}}$ и действия $c^+_{mi}(\mathrm{out})$ на $|0\rangle_{\mathrm{out}}$, можно показать, так же как и в плоском пространстве-времени [31], что на допустимых состояниях имеют место равенства

$$(c_{n0}(\mathrm{in}) - c_{n3}(\mathrm{in}))|\mathrm{in}\rangle = 0,$$
$$(c_{m0}(\mathrm{out}) - c_{m3}(\mathrm{out}))|\mathrm{out}\rangle = 0. \tag{38}$$

Запишем условия того, что уравнения (37) имеют решения в исходном гильбертовом пространстве физических фотонов. Эти условия получаются так же, как и условия (20), и имеют вид

$$\sum_{n,\, j=1,\, 2} |({}_+e_{nj}, {}_-e^{(0)}_{nj})_{\sigma_1}|^2 < \infty, \qquad \sum_{m,\, i=1,\, 2} |({}^+e_{mi}, {}^-e^{(0)}_{mi})_{\sigma_2}|^2 < \infty, \tag{39}$$

где

$${}_-e^{(0)}_{nj} = {}_-e_{nj}|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}, \qquad {}^-e^{(0)}_{mi} = {}^-e_{mi}|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}.$$

Рассмотрим амплитуды простейших квантовых процессов: $c_v = {}_{\mathrm{out}}\langle 0 | 0\rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда вероятности вакууму остаться вакуумом; $w(mi \mid nj) = c_v^{-1}\,{}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid c_{mi}(\mathrm{out}) c^+_{nj}(\mathrm{in}) | 0\rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда рассеяния фотона; $w(0 | njn'j') = c_v^{-1}\,{}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid c^+_{n'j'}(\mathrm{in})\, c^+_{nj}(\mathrm{in}) | 0\rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда уничтожения пары; $w(mim'i' \mid 0) = c_v^{-1}\,{}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid c_{mi}(\mathrm{out})\, c_{m'i'}(\mathrm{out}) | 0\rangle_{\mathrm{in}}$ — амплитуда рождения пары. Отметим, что вакуумные векторы $|0\rangle_{\mathrm{out}}$, $|0\rangle_{\mathrm{in}}$ определены так, что ${}_{\mathrm{out}}\langle 0 \mid A_\mu(x) | 0\rangle_{\mathrm{in}} = 0$.

Установим связь между операторами $c(\mathrm{in})$, $c(\mathrm{out})$. Введем функцию Грина уравнения (31) как бивектор $\Delta_{\mu\nu}(x, x')$, удовлетворяющий уравнениям

$$\Box_{(x)} \Delta_{\mu\nu}(x, x') - R^\lambda_\mu(x)\, \Delta_{\lambda\nu}(x, x') = 0,$$
$$\Box_{(x')} \Delta_{\mu\nu}(x, x') - R^\lambda_\nu(x')\, \Delta_{\mu\lambda}(x, x') = 0 \tag{40}$$

и граничным условиям

$$\Delta_{\mu\nu}(x, x') = 0, \text{ если } x \in \sigma,\ x' \in \sigma,$$
$$n_\lambda(x')\, \overleftrightarrow{\nabla}^\lambda_{(x')} \Delta^\mu_\nu(x, x') = \delta^\mu_\nu \delta_\sigma(x, x'). \tag{41}$$

Функция Грина $\Delta_{\mu\nu}(x, x')$ переводит решение уравнения (31) снова в решение

$$A_\mu(x) = -i \int_\sigma \Delta_{\mu\nu}(x, x')\, \overleftrightarrow{\nabla}^\lambda_{(x')} A^\nu(x')\, d\sigma_\lambda(x'). \tag{42}$$

Из перестановочных соотношений (6) следует, что

$$\Delta_{\mu\nu}(x, x') = -[A_\mu(x), A_\nu(x')], \quad \Delta_{\mu\nu}(x, x') = -\Delta_{\nu\mu}(x', x),$$
$$\Delta^*_{\mu\nu}(x, x') = \Delta_{\nu\mu}(x', x).$$

Функцию Грина $\Delta_{\mu\nu}(x, x')$ можно построить, если известен полный набор ортонормированных решений уравнения (31). Тогда

$$\Delta_{\mu\nu}(x, x') = \sum_n f_{n\mu}(x) f^*_{n\nu}(x').$$

Положим в соотношении (42) $x \in \sigma_2$, $\sigma = \sigma_1$, а затем $x \in \sigma_1$, $\sigma = \sigma_2$ и используем разложения (34). В результате получим

$$\begin{aligned}
&c\,(\text{out}) = \Delta\,({}^{+}|_{+})\eta c\,(\text{in}) + \Delta\,({}^{+}|_{-})\eta c^{+}\,(\text{in}),\\
&c^{+}\,(\text{out}) = c\,(\text{in})\eta\Delta\,({}_{-}|^{+}) + c^{+}\,(\text{in})\eta\Delta\,({}_{+}|^{+}),\\
&c\,(\text{in}) = \Delta\,({}_{+}|^{+})\eta c\,(\text{out}) + \Delta\,({}_{+}|^{-})\eta c^{+}\,(\text{out}),\\
&c^{+}\,(\text{in}) = c\,(\text{out})\eta\Delta\,({}^{-}|_{+}) + c^{+}\,(\text{out})\eta\Delta\,({}^{+}|_{+}),
\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta\left({}^{\pm}_{mi}\,\middle|\,{}^{nj}_{\pm}\right) = -\eta_{ii}\eta_{jj}\int\limits_{\sigma_2} d\sigma_\alpha(x)\int\limits_{\sigma_1} d\sigma_\beta(x')\,{}^{\pm}e^{*\mu}_{mi}(x\,|\,\sigma_2)\,\overleftrightarrow{\nabla}^{\alpha}\Delta_{\mu\nu}(x,x')\,\overleftrightarrow{\nabla}^{\beta}_{\pm}e^{\nu}_{nj}(x'\,|\,\sigma_1),\\
&\Delta\left({}^{nj}_{\pm}\,\middle|\,{}^{\pm}_{mi}\right) = -\eta_{ii}\eta_{jj}\int\limits_{\sigma_1} d\sigma_\alpha(x)\int\limits_{\sigma_2} d\sigma_\beta(x')\,{}_{\pm}e^{*\mu}_{nj}(x\,|\,\sigma_1)\,\overleftrightarrow{\nabla}^{\alpha}\Delta_{\mu\nu}(x,x')\,\overleftrightarrow{\nabla}^{\beta}{}^{\pm}e^{\nu}_{mi}(x'\,|\,\sigma_2).
\end{aligned} \tag{44}$$

Из перестановочных соотношений для операторов c (in), c^+ (in), c (out), c^+ (out) и соотношений (43) следуют равенства

$$\begin{aligned}
&\Delta\,({}^{+}|_{+})\eta\Delta\,({}_{+}|^{+}) - \Delta\,({}^{+}|_{-})\eta\Delta\,({}_{-}|^{+}) = \eta I, \quad \Delta\,({}^{+}|_{+})\eta\Delta\,({}_{+}|^{-}) -\\
&\qquad - \Delta\,({}^{+}|_{-})\eta\Delta\,({}_{-}|^{-}) = 0,\\
&\Delta\,({}_{+}|^{+})\eta\Delta\,({}^{+}|_{+}) - \Delta\,({}_{+}|^{-})\eta\Delta\,({}^{-}|_{+}) = \eta I, \quad \Delta\,({}_{+}|^{+})\eta\Delta\,({}^{+}|_{-}) -\\
&\qquad - \Delta\,({}_{+}|^{-})\eta\Delta\,({}^{-}|_{-}) = 0,\\
&\Delta\,({}^{\pm}|_{\mp}) = -\Delta({}_{\pm}|^{\mp}).
\end{aligned} \tag{45}$$

Дополнительные равенства получаются из соотношений (38), (43):

$$\begin{aligned}
&\Delta\left({}^{\pm}_{m0}\,\middle|\,{}^{nj}_{\pm}\right) = \Delta\left({}^{\pm}_{m3}\middle|{}^{nj}_{\pm}\right),\ j = 1, 2; \qquad \Delta\left({}^{+}_{m0}\middle|{}^{n0}_{\pm}\right) + \Delta\left({}^{+}_{m3}\middle|{}^{n3}_{\pm}\right) =\\
&\qquad = \Delta\left({}^{+}_{m0}\middle|{}^{n3}_{\pm}\right) + \Delta\left({}^{+}_{m3}\middle|{}^{n0}_{\pm}\right); \qquad \Delta\left({}^{n0}_{\pm}\middle|{}^{\pm}_{mi}\right) = \Delta\left({}^{n3}_{\pm}\middle|{}^{\pm}_{mi}\right),\ i = 1, 2;\\
&\Delta\left({}^{n0}_{+}\middle|{}^{\pm}_{m0}\right) + \Delta\left({}^{n3}_{+}\middle|{}^{\pm}_{m3}\right) = \Delta\left({}^{n0}_{+}\middle|{}^{\pm}_{m3}\right) + \Delta\left({}^{n3}_{+}\middle|{}^{\pm}_{m0}\right).
\end{aligned} \tag{46}$$

Используя соотношения (43), (45), можно записать амплитуды простейших процессов в форме:

$$\begin{aligned}
&w\,(mi\mid nj) = -\eta_{ii}\eta_{jj}\,\Delta^{-1}\,({}^{+}|_{+})_{minj},\\
&w\,(0\mid n'j'nj) = \eta_{jj}\,[\Delta({}_{-}|^{+})\,\Delta^{-1}\,({}^{+}|_{+})]_{n'j'nj},\\
&w\,(mim'i'\mid 0) = \eta_{ii}\,[\Delta^{-1}\,({}^{+}|_{+})\,\Delta({}_{+}|^{-})]_{mim'i'}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Рассмотрим соотношения (43) при условии, что в левой части стоят только операторы физических фотонов. Тогда с использованием соотношений (46) получим

$$\begin{aligned}
&c_{mi}\,(\text{out}) = -\sum_{n,\,j=1,\,2}\left(\Delta\left({}^{+}_{mi}\middle|{}^{nj}_{+}\right)c_{nj}\,(\text{in})\,\Delta\left({}^{+}_{mi}\middle|{}^{nj}_{-}\right)c^{+}_{nj}\,(\text{in})\right), \qquad i = 1, 2,\\
&c^{+}_{mi}\,(\text{out}) = -\sum_{n,\,j=1,\,2}\left(c_{nj}\,(\text{in})\,\Delta\left({}^{nj}_{-}\middle|{}^{+}_{mi}\right) + c^{+}_{nj}\,(\text{in})\,\Delta\left({}^{nj}_{+}\middle|{}^{+}_{mi}\right)\right).
\end{aligned} \tag{48}$$

Предположим, что существует унитарный оператор V, такой, что для операторов физических фотонов выполнено

$$\begin{pmatrix} c\,(\text{out}) \\ c^{+}\,(\text{out} \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} c\,(\text{in}) \\ c^{+}\,(\text{in}) \end{pmatrix} V, \ {}_{\text{out}}\langle 0\,| = {}_{\text{in}}\langle 0\,|\,V. \tag{49}$$

Здесь $|\,0\rangle_{\text{in}}$, $|\,0\rangle_{\text{out}}$ определены только для физических фотонов:

$$c_{nj}\,(\text{in})\,|\,0\rangle_{\text{in}} = 0, \quad \forall n,\ j = 1, 2,$$

$$c^{+}_{mi}\,(\text{out})\,|\,0\rangle_{\text{out}} = 0, \quad \forall m,\ i = 1, 2.$$

Таким образом, мы предполагаем, что только операторы рождения и уничтожения физических фотонов связаны унитарным преобразованием.

Предположение о существовании унитарного преобразования еще и между операторами продольных и временных фотонов было бы слишком сильным.

Используя функциональные методы [29], получим

$$V = c_v \exp\left[\frac{1}{2} c^+(\text{in})\, w(|0)\, c^+(\text{in})\right] \exp\left[c^+(\text{in}) \ln w(|)\, c(\text{in})\right]\times$$
$$\times \exp\left[\frac{1}{2} c(\text{in})\, w(0|)\, c(\text{in})\right], \quad c_v = \det w(mi\,|\,nj);\ i, j = 1, 2. \qquad (50)$$

В равенстве (50) все суммирования ведутся только по состояниям с $j = 1, 2$. Необходимое и достаточное условие того, чтобы оператор V был унитарным, имеет вид

$$\operatorname{Sp} \Delta({}^+|_-)\, \Delta({}_-|^+) < \infty. \qquad (51)$$

Вычислим полное число физических фотонов, рожденных из вакуума гравитационным полем:

$$n = \sum_{m;\, i=1,2} {}_{\text{in}}\langle 0 \,|\, c^+_{mi}(\text{out})\, c_{mi}(\text{out}) \,|\, 0\rangle_{\text{in}} = \operatorname{Sp} \Delta({}^+|_-)\, \Delta({}_-|^+). \qquad (52)$$

Тогда соотношение (51) перепишется в форме $n < \infty$. Таким образом, для того чтобы оператор V (49) был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы полное число рожденных из вакуума физических фотонов было конечным.

4. Амплитуды квантовых процессов. Обобщенное нормальное произведение. Амплитуды произвольного квантового процесса с заданным числом начальных и конечных частиц имеет следующую форму:

$$M_{\text{in}\to\text{out}} = {}_{\text{out}}\langle 0 \mid a(\text{out}) \ldots b(\text{out}) \ldots c(\text{out}) S c^+(\text{in}) \ldots b^+(\text{in}) \ldots$$
$$\ldots a^+(\text{in}) \mid 0\rangle_{\text{in}}, \qquad (53)$$

где $S = \lim\limits_{\substack{\sigma_2\to\infty\\ \sigma_1\to-\infty}} S(\sigma_2, \sigma_1)$, $|0\rangle_{\substack{\text{in}\\(\text{out})}} = |0\rangle^{(1)}_{\substack{\text{in}\\(\text{out})}} \otimes |0\rangle^{(2)}_{\substack{\text{in}\\(\text{out})}}$,

$|0\rangle^{(1)}_{\substack{\text{in}\\(\text{out})}}$ — вакуумы спинорного поля; $|0\rangle^{(2)}_{\substack{\text{in}\\(\text{out})}}$ — вакуумы электромагнитного поля. Отличительная особенность матричного элемента (53) от соответствующих матричных элементов в плоском пространстве состоит в том, что вакуумные состояния и операторы рождения и уничтожения слева и справа от оператора S различны. Поэтому обычный путь вывода фейнмановских правил, основанный на приведении оператора S к нормальной форме, относительно одного вакуума становится непригодным.

Мы покажем, что, введя подходящее обобщение нормального произведения, можно получить модифицированные фейнмановские правила для вычисления матричных элементов.

Определим обобщенную нормальную форму операторов спинорного и электромагнитного полей как форму, в которой эти операторы выражены только через операторы уничтожения начальных состояний a (in), b (in), c (in) и операторы рождения конечных состояний a^+ (out), b^+ (out), c^+ (out), причем все операторы рождения конечных состояний стоят слева от всех операторов уничтожения начальных состояний. Обобщенным нормальным произведением (N-произведением) опраторов назовем произведение этих операторов, приведенное к нормальной форме, считая, что в процессе приведения все антикоммутаторы для спинорного поля и все коммутаторы для электромагнитного поля равны нулю. Такое обобщение нормального произведения было введено в квантовой электродинамике с внешним электромагнитным полем [9, 28] и использовалось для вывода фейнмановских правил в квантовой теории с внешним гравитационным полем в работах [4, 32, 33]. С помощью N-произведения можно ввести обобщенное спаривание операторов:

$$\underbrace{AB} = AB - N(AB),$$

и обобщенное хронологическое спаривание

$$\overline{AB} = T(AB) - N(AB).$$

Для приведения операторов к обобщенной нормальной форме необходимо выразить их только через a^+ (out), b^+ (out), c^+ (out), a (in), b (in), c (in). Это можно сделать, используя соотношения (22), (24), (26), (43), (47). Результат вычислений имеет вид

$$\begin{aligned}
a_q(\text{out}) &= \sum_p w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p})\, a_p(\text{in}) - \sum_{q'} w(\overset{+}{q}\bar{q}'\,|\,0)\, b^+_{q'}(\text{out}),\\
b_q(\text{out}) &= \sum_p w(\bar{q}, \bar{p})\, b_p(\text{in}) + \sum_{q'} w(\overset{+}{q}{}'\bar{q}\,|\,0)\, a^+_{q'}(\text{out}),\\
a^+_p(\text{in}) &= \sum_q a^+_q(\text{out})\, w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p}) - \sum_{p'} w(0\,|\,\bar{p}'\overset{+}{p})\, b_{p'}(\text{in}),\\
b^+_p(\text{in}) &= \sum_q b^+_q(\text{out})\, w(\bar{q}\,|\,\bar{p}) + \sum_{p'} w(0\,|\,\bar{p}\overset{+}{p}{}')\, a_{p'}(\text{in}),\\
c_{mi}(\text{out}) &= -\sum_{n,j} w(mi\,|\,nj)\, \eta_{jj} c_{nj}(\text{in}) - \sum_{m',i'} w(mim'i'\,|\,0)\, \eta_{i'i'} c^+_{m'i'}(\text{out}),\\
c^+_{nj}(\text{in}) &= -\sum_{m,i} c^+_{mi}(\text{out})\, \eta_{ii} w(mi\,|\,nj) - \sum_{n',j'} w(0\,|\,njn'j')\, \eta_{j'j'} c_{n'j'}(\text{in}).
\end{aligned} \tag{54}$$

Соотношения (54) позволяют выразить полевые операторы $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ в обобщенной нормальной форме. Проведем вычисления для оператора $A_\mu(x)$, для операторов спинорного поля эти вычисления аналогичны.

Положим в соотношении (42) $\sigma = \sigma_1$ и подставим для $A_\mu(x\,|\,\sigma_1)$ разложение по функциям ${}_\pm e^\mu_{nj}(x\,|\,\sigma_1)$. Тогда получим:

$$A_\mu(x) = \sum_{n,j} \{c_{nj}(\text{in})_+ e_{\mu nj}(x) + c^+_{nj}(\text{in})_- e_{\mu nj}(x)\}, \tag{55}$$

где

$$\pm e^\mu_{nj}(x) = -i\int_{\sigma_1} \Delta^\mu_\nu(x, x')\, \overleftrightarrow{\nabla}_\lambda {}_\pm e^\nu_{nj}(x'\,|\,\sigma_1)\, d\sigma^\lambda(x').$$

Положим в соотношении (42) $\sigma = \sigma_2$ и подставим для $A_\mu(x\,|\,\sigma_2)$ разложение по функциям ${}^\pm e^\mu_{mi}(x\,|\,\sigma_2)$:

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &= \sum_{m,i} \{c_{mi}(\text{out})^+ e_{\mu mi}(x) + c^+_{mi}(\text{out})^- e_{\mu mi}(x)\},\\
{}^\pm e^\mu_{mi}(x) &= -i\int_{\sigma_2} \Delta^\mu_\nu(x, x')\, \overleftrightarrow{\nabla}_\lambda {}^\pm e^\nu_{mi}(x'\,|\,\sigma_2)\, d\sigma^\lambda(x').
\end{aligned} \tag{56}$$

Заменяя операторы c (out), c^+ (in) через c^+ (out), c (in), согласно равенствам (54), получим

$$\begin{aligned}
&A_\mu(x) = A^{(+)}_\mu(x) + A^{(-)}_\mu(x),\\
&A^{(+)}_\mu(x) = \sum_{m,i} {}^-a_{\mu mi}(x)\, c^+_{mi}(\text{out}), \qquad A^{(-)}_\mu(x) = \sum_{n,j} {}_+a_{mnj}(x)\, c_n(\text{in}),
\end{aligned} \tag{57}$$

где

$$\begin{aligned}
{}^-a^\mu_{mi}(x) &= -\sum_{n,j} \eta_{ii} w(mi\,|\,nj)_- e^\mu_{nj}(x) = {}^-e^\mu_{mi}(x) - \sum_{m'i'} \eta_{ii}{}^+e^\mu_{m'i'}(x)\, w(m'i'mi\,|\,0);\\
{}_+a^\mu_{nj}(x) &= -\sum_{m,i} \eta_{jj}{}^+e^\mu_{mi}(x)\, w(mi\,|\,nj) = {}_+e^\mu_{nj}(x) - \sum_{n',j'} \eta_{jj} w(0\,|\,njn'j')\, {}_-e^\mu_{n'j'}(x).
\end{aligned} \tag{58}$$

Точно так же имеем для спинорного поля

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \qquad \overline{\psi}(x) = \overline{\psi}^{(+)}(x) + \overline{\psi}^{(-)}(x),\\
&\psi^+(x) = \sum_q {}^-\psi_q(x)\, b^+_q(\text{out}), \qquad \psi^{(-)}(x) = \sum_p {}_+\psi_p(x)\, a_p(\text{in}),
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x)=\sum_q {}^+\bar{\psi}_q(x)\,a_q^+(\text{out}),\qquad \bar{\psi}^{(-)}(x)=\sum_p {}_-\bar{\psi}_p(x)\,b_p(\text{in}),$$

где

$$\begin{aligned}
{}_+\psi_p(x)&=\sum_q {}^+\varphi_q(x)\,w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p})={}_+\varphi_p(x)+\sum_{p'} w(0\,|\,\bar{p}'\overset{+}{p})_-\,\varphi_{p'}(x);\\
{}^-\psi_q(x)&=\sum_p w(\bar{q}\,|\,\bar{p})_-\,\varphi_p(x)={}^-\varphi_q(x)-\sum_{q'} w(\overset{+}{q}{}'\bar{q}\,|\,0)\,{}^+\varphi_{q'}(x);\\
{}^+\bar{\psi}_q(x)&=\sum_p w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p})\,{}_+\bar{\varphi}_p(x)={}^+\bar{\varphi}_q(x)+\sum_{q'} w(\overset{+}{q}\bar{q}'\,|\,0)\,{}^-\varphi_{q'}(x);\\
{}_-\bar{\psi}_p(x)&=\sum_q {}^-\bar{\varphi}_q(x)\,w(\bar{q}\,|\,\bar{p})={}_-\bar{\varphi}_p(x)-\sum_{p'} w(0\,|\,\bar{p}\overset{+}{p}{}')\,{}_+\bar{\varphi}_{p'}(x);\\
{}_\pm\varphi_p(x)&=\int_{\sigma_1} G(x,x')\,\gamma^\mu(x')\,{}_\pm\varphi_p(x'\,|\,\sigma_1\,d\sigma_\mu(x');\\
{}^\pm\varphi_q(q)&=\int_{\sigma_2} G(x,x')\,\gamma^\mu(x')\,{}^\pm\varphi_q(x'\,|\,\sigma_2)\,d\sigma_\mu(x').
\end{aligned}\tag{60}$$

Соотношения (57)—(60) решают задачу о выражении полевых операторов в виде функций только от операторов уничтожения начальных состояний и операторов рождения конечных состояний. После того как все операторы выражены указанным образом, приведение операторных функционалов к обобщенной нормальной форме может быть достигнуто с помощью обычной теоремы Вика. Доказательство теоремы Вика (см., напр.: [34]) основано только на алгебраических свойствах операторов, которые проявляются в выражениях для спариваний и хронологических спариваний. Таким образом, для приведения операторов к обобщенной нормальной форме с помощью теоремы Вика необходимо предварительно вычислить спаривания. Проводя вычисления на основе соотношений (47), (54), (59) получим

$$\begin{gathered}
\underbrace{a_q(\text{out})\,b_{q'}}(\text{out})=w(\overset{+}{q}\bar{q}\,|\,0),\quad \underbrace{a_q(\text{out})a_p^+}(\text{in})=w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p}),\\
\underbrace{b_q(\text{out})\,b_p^+}(\text{in})=w(\bar{q}\,|\,\bar{p}),\quad \underbrace{b_p^+(\text{in})\,a_{p'}^+}(\text{in})=w(0\,|\,\bar{p}'\overset{+}{p}),\\
\underbrace{c_{mi}(\text{out})c_{m'i'}}(\text{out})=w(mim'i'\,|\,0),\quad c_{nj}^+(\text{in})\,c_{n'}^+(\text{in})=w(0\,|\,njn'j'),\\
\underbrace{c_{mi}(\text{out})c_{nj}^+}(\text{in})=w(mm|\,nj).
\end{gathered}\tag{61}$$

Хронологические спаривания запишем в виде

$$\begin{gathered}
\overline{\psi(x)\bar{\psi}}(x')=c_v^{-1}\,{}_{\text{out}}\langle 0\,|\,T\psi(x)\,\bar{\psi}(x')\,|\,0\rangle_{\text{in}}=-iS^c(x,x'),\\
S^c(x,x')=\begin{cases} S^{(-)}(x,x'), & \text{если точка } x \text{ лежит в будущем по отношению к } x',\\ -S^{(+)}(x,x'), & \text{если точка } x \text{ лежит в прошлом по отношению к } x',\end{cases}\\
S^{(-)}(x,x')=i\,\{\psi^{(-)}(x),\bar{\psi}^{(+)}(x')\}=i\sum_{p,q}{}^+\varphi_q(x)\,w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p})\,{}_+\bar{\varphi}_p(x'),\\
S^{(+)}(x,x')=i\,\{\psi^{(+)}(x),\bar{\psi}^{(-)}(x')\}=i\sum_{p,q}{}^-\bar{\varphi}_q(x')\,w(\bar{q}\,|\,\bar{p})\,{}_-\varphi_p(x),\\
\overline{A_\mu(x)\,A}_\nu(x')=c_v^{-1}\,{}_{\text{out}}\langle 0\,|\,TA_\mu(x)\,A_\nu(x')\,|\,0\rangle_{\text{in}}=-iD^c_{\mu\nu}(x,x').\\
D^c_{\mu\nu}(x,x')=\begin{cases} D^{(-)}_{\mu\nu}(x,x'), & \text{если } x \text{ в будущем по отношению к } x',\\ -D^{(+)}_{\mu\nu}(x,x') & \text{если } x \text{ в прошлом по отношению к } x',\end{cases}\\
D^{(-)}_{\mu\nu}(x,x')=i\,[A^{(-)}_\mu(x),A^{(+)}_\nu(x')]=i\sum_{m,i,n,j}{}^+e_{\mu mi}(x)\,w(mi\,|\,nj)\,{}_-e_{\nu nj}(x'),\\
D^{(+)}_{\mu\nu}(x,x')=-D^{(-)}_{\nu\mu}(x',x).
\end{gathered}\tag{62}$$

Исходя из соотношений (62) можно показать, что функции S^c, D^c удовлетворяют уравнениям

$$[i\gamma^\mu(x) D_\mu - m] S^c(x, x') = -\frac{\delta(x-x')}{\sqrt{-g(x)}}, \tag{63а}$$

$$[\delta^\alpha_\mu \Box - R^\alpha_\mu(x)] D^c_{\alpha\nu}(x, x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\delta(x-x')}{\sqrt{-g(x)}}. \tag{63б}$$

Из определений (62) вытекают важные свойства функций S^c, D^c:

$$\begin{aligned}
{}_+\psi_p(x) &= -i \int_{\sigma_1} S^c(x, x') \gamma^\mu(x')\, {}_+\varphi_p(x' \mid \sigma_1)\, d\mu_\mu(x'),\\
{}_-\overline{\psi}_p(x) &= i \int_{\sigma_1} {}_-\overline{\varphi}(x' \mid \sigma_1) \gamma^\mu(x') S^c(x', x)\, d\sigma_\mu(x'),\\
{}^-\psi_q(x) &= i \int_{\sigma_2} S^c(x, x') \gamma^\mu(x')\, {}^-\varphi_q(x' \mid \sigma_2)\, d\sigma_\mu(x'),\\
{}^+\overline{\psi}_q(x) &= -i \int_{\sigma_2} {}^+\overline{\varphi}_q(x' \mid \sigma_2) \gamma^\mu(x') S^c(x', x)\, d\sigma_\mu(x'),\\
{}_+a_{\mu nj}(x) &= i \int_{\sigma_1} D^c_{\mu\nu}(x, x') \overleftrightarrow{\nabla}_{\lambda}\, {}_+e^\nu_{nj}(x' \mid \sigma_1)\, d\sigma^\lambda(x'),\\
{}^-a_{\mu mi}(x) &= -i \int_{\sigma_2} D^c_{\mu\nu}(x, x') \overleftrightarrow{\nabla}_{\lambda}\, {}^-e^\nu_{mi}(x' \mid \sigma_2)\, d\sigma^\lambda(x').
\end{aligned} \tag{64}$$

Соотношения (64) показывают, что функции S^c, D^c играют роль фейнмановских пропагаторов в искривленном пространстве-времени. Они распространяют положительно частотные соотношения в будущее, а отрицательно частотные — в прошлое.

5. Правила Фейнмана в искривленном пространстве-времени. Таким образом, для вычисления матричных элементов (53) удобно представить S-матрицу в обобщенной нормальной форме, используя теорему Вика для T-произведений. При этом соответствующие спаривания определены относительно обобщенного нормального произведения, введенного в предыдущем разделе. Лагранжиан взаимодействия также удобно представить в обобщенной нормальной форме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}} &= -\sqrt{-g}\, A_\mu(x) j^\mu(x) = -\sqrt{-g}\, N(A_\mu(x) j^\mu(x)) -\\
&\quad - \sqrt{-g}\, A_\mu(x) j^\mu(x) + \sqrt{-g}\, N(A_\mu(x) j^\mu(x)) \equiv \sqrt{-g}\, N(A_\mu(x) j^\mu(x)) -\\
&\quad - \sqrt{-g}\, J^\mu(x) A_\mu(x),
\end{aligned} \tag{65}$$

где

$$\begin{aligned}
J^\mu(x) &= c_v^{-1}\, {}_{\text{out}}\langle 0 \mid j^\mu(x) \mid 0\rangle_{\text{in}} = ie \operatorname{Sp} \gamma^\mu(x) S^c(x, x),\\
S^c(x, x) &= \frac{1}{2}[S^c(x+0, x) + S^c(x, x+0)].
\end{aligned} \tag{66}$$

Согласно результатам, полученным в предыдущем разделе, вычисление матричного элемента (53) сводится к вычислению матричных элементов от обобщенного нормального произведения вида

$$\begin{aligned}
&{}_{\text{out}}\langle 0 \mid a(\text{out}) \ldots b(\text{out}) \ldots c(\text{out}) N(\ldots) c^+(\text{in}) \ldots b^+(\text{in}) \ldots\\
&\quad \ldots a^+(\text{in}) \mid 0\rangle_{\text{in}}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Ясно, что матричный элемент отличен от нуля, если сумма чисел частиц каждого поля в начальных и конечных состояниях больше или равна числу полевых операторов каждого поля под знаком нормального произведения. Если для каждого полевого оператора $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ из обобщенного N-произведения найдется оператор $a^+(\text{in})$, $b^+(\text{in})$, $c^+(\text{in})$ из начального состояния или оператор $a(\text{out})$, $b(\text{out})$, $c(\text{out})$ из конечного состояния, с которым он может свернуться, то такой матричный элемент представляется обычными фейнмановскими диаграммами с модифицированными правилами соответствия.

1. Электрону в начальном (конечном) состоянии с квантовыми числами p (q) сопоставляется функция ${}_{+}\psi_p(x)$ $({}^{+}\overline{\psi}_q(x))$ (60).

2. Позитрону в начальном (конечном) состоянии с квантовыми числами p (q) сопоставляется функция ${}_{-}\overline{\psi}_p(x)({}^{-}\psi_q(x))$ (60).

3. Фотону в начальном (конечном) состоянии с квантовыми числами n, j (m, i) сопоставляется функция ${}_{+}a^{\mu}_{nj}(x)$ $({}^{-}a^{\mu}_{mi}(x))$ (58).

4. Внутренней фермионной линии, направленной от точки x' в точку x, сопоставляется пропагатор $-iS^c(x, x')$ (62).

5. Внутренней фотонной линии, направленной от точки x' в точку x сопоставляется пропагатор $-iD^c_{\mu\nu}(x, x')$ (62).

6. Замкнутой фермионной линии сопоставляется числовой ток $J^{\mu}(x)$ (66).

7. Вклад от любой диаграммы содержит в качестве множителя $c_v = c_v^{(1)}c_v^{(2)}$, где $c_v^{(1)}$ — амплитуда вероятности вакууму остаться вакуумом для спинорного поля (28); $c_v^{(2)}$ — амплитуда вероятности вакууму остаться вакуумом для электромагнитного поля (50).

Остальные правила соответствия остаются обычными (с учетом того, что интегралы берутся по инвариантному объему $\sqrt{-g}d^4x$).

Пусть теперь число операторов в начальном и конечном состояниях больше, чем необходимо для компенсации операторов из нормального произведения. В этом случае матричный элемент равен произведению вкладов фейнмановских диаграмм, возникающих от компенсации операторов из нормального произведения операторами начальных и конечных состояний на амплитуды $w(\overset{+}{q}\ldots\bar{q}'\ldots mi\mid nj\ldots\bar{p}'\ldots\overset{+}{p})$, полученные от нескомпенсированных операторов начальных и конечных состояний. Вклад от фейнмановских диаграмм вычисляется по указанным выше правилам. Амплитуды $w(\overset{+}{q}\ldots\bar{q}'\ldots mi\mid nj\ldots\bar{p}'\ldots\bar{p}')$ вычисляются путем приведения операторов a_q (out), ..., $b_{q'}$ (out), ..., c_{mi} (out), c^{+}_{nj} (in), ..., $b^{+}_{p'}$ (in), ..., a^{+}_p (in) к обобщенной нормальной форме с помощью теоремы Вика и соотношения (61). Тем самым амплитуда вероятности $w(\overset{+}{q}\ldots\bar{q}'\ldots mi\mid nj\ldots\bar{p}'\ldots\overset{+}{p})$ выражается в виде суммы произведений амплитуд простейших процессов (26), (47) с соответствующими знаками, получающимися из теоремы Вика. Например, амплитуда вероятности рассеяния фотона с рождением фотонной пары имеет вид $w(mim'i'm''i''\mid nj) = w(mim'i'\mid 0)\,w(m''i''\mid nj) + w(mim''i''\mid 0)\,w(m'i'\mid nj) + w(m'i'm''i''\mid 0)\,w(mi\mid nj)$.

6. Уравнения для точных функций Грина. Добавим, следуя работе [35], к лагранжиану (1) лагранжиан взаимодействия с внешними источниками:

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}^{\text{ext}}(x), \tag{68}$$

где $\mathscr{L}_0(x)$ имеет вид (1), а

$$\mathscr{L}^{\text{ext}}(x) = -\left(-I^{\mu}(x)A_{\mu}(x) + \overline{\eta}(x)\psi(x) + \overline{\psi}(x)\eta(x)\right). \tag{69}$$

Здесь $\overline{\eta}(x), \eta(x)$ являются грассмановскими функциями. Все операторы взяты в представлении Гейзенберга. Уравнения движения, отвечающие лагранжиану (68), (69), записываются в форме

$$\begin{gathered}(\gamma^{\mu}(x)iD_{\mu} - m)\psi(x) + e\gamma^{\mu}(x)A_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\eta(x),\\ \overline{\psi}(x)(i\overleftarrow{D}_{\mu}\gamma^{\mu}(x) + m) - e\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}(x)A_{\mu}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\overline{\eta}(x),\\ (\delta^{\mu}_{\nu}\Box - R^{\mu}_{\nu}(x))A^{\nu}(x) + j^{\mu}(x) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}I^{\mu}(x).\end{gathered} \tag{70}$$

Введем $\tilde{S}(I, \bar{\eta}, \eta)$, удовлетворяющую уравнению

$$i\frac{\delta \tilde{S}(\sigma, \sigma_0)}{\delta\sigma(x)} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathcal{L}^{\text{ext}}(x)\tilde{S}(\sigma, \sigma_0).$$

Обозначим $\tilde{S} = \lim\limits_{\sigma\to\infty,\ \sigma_0\to-\infty} \tilde{S}(\sigma, \sigma_0)$ и рассмотрим производящий функционал

$$Z(I, \bar{\eta}, \bar{\eta}) = {}_{\text{out}}\langle 0 \mid \tilde{S} \mid 0\rangle_{\text{in}}. \tag{71}$$

Функции Грина (69) получаются как производные функционала Z (71) по источникам:

$$G(x, y, \mu z) = \frac{(-i)^m}{Z}\times$$
$$\times\frac{\vec{\delta}^{(2n+m)}Z}{\delta\bar{\eta}(x_1)\ldots\delta\bar{\eta}(x_n)\,\delta\eta(y_1)\ldots\delta\eta(y_n)\,\delta I_{\mu_1}(z_1)\ldots\delta I_{\mu_m}(z_m)}\Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=I=0}. \tag{72}$$

Найдем уравнения, которым удовлетворяет производящий функционал Z. Для этого заметим, что, согласно (71):

$$\frac{\delta Z}{\delta I^\mu(x)} = -i\,{}_{\text{out}}\langle 0 \mid \tilde{S}A_\mu(x) \mid 0\rangle_{\text{in}},\qquad \frac{\vec{\delta} Z}{\delta\eta(x)} = i\,{}_{\text{out}}\langle 0 \mid \tilde{S}\bar{\psi}(x) \mid 0\rangle_{\text{in}}, \tag{73}$$
$$\frac{\delta \bar{Z}}{\delta\bar{\eta}(x)} = -i_{\text{out}}\langle 0 \mid \tilde{S}\psi(x) \mid 0\rangle_{\text{in}}.$$

Используя уравнения движения для полевых операторов $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $A_\mu(x)$ (70), получим, следуя [35], уравнения для функционала Z:

$$(\delta^\mu_\nu\Box - R^\mu_\nu(x))\frac{\delta Z}{\delta I_\nu(x)} + ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu(x)\frac{\vec{\delta}^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(x)} = \frac{i}{\sqrt{-g}}I^\mu(x)Z,$$
$$(i\gamma^\mu(x)D_\mu - m)\frac{\vec{\delta} Z}{\delta\bar{\eta}(x)} + ie\gamma^\mu(x)\frac{\vec{\delta}^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta I^\mu(x)} = -\frac{i}{\sqrt{-g}}\eta(x)Z, \tag{74}$$
$$\frac{\overleftarrow{\delta} Z}{\delta\eta(x)}(i\overleftarrow{D}_\mu\gamma^\mu(x) + m) - ie\frac{\overleftarrow{\delta}^2 Z}{\delta\eta(x)\,\delta I^\mu(x)}\gamma^\mu(x) = \frac{i}{\sqrt{-g}}\bar{\eta}(x)Z.$$

Введем для одночастичных функций Грина обозначения

$$G(x, x') = -i\frac{\delta^2 \ln Z}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(x')}\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0},\qquad D_{\mu\nu}(x, x') = -i\frac{\delta^2 \ln Z}{\delta I^\mu(x)\,\delta I^\nu(x')}\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0}, \tag{75}$$
$$\langle A_\mu(x)\rangle = i\frac{\delta \ln Z}{\delta I^\mu(x)}\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0}.$$

Заметим сразу, что $\langle A_\mu(x)\rangle$ не является средним электромагнитным полем, поскольку

$$\langle A_\mu(x)\rangle = \frac{{}_{\text{out}}\langle 0 \mid \tilde{S}A_\mu(x) \mid 0\rangle_{\text{in}}}{{}_{\text{out}}\langle 0 \mid \tilde{S} \mid 0\rangle_{\text{in}}},$$

тогда как среднее поле должно быть выражением вида ${}_{\text{in}}\langle 0 \mid A_\mu(x) \mid 0\rangle_{\text{in}}$. Дифференцируя уравнения (74) по источникам и используя определения (75), получим

$$(\delta^\mu_\nu\Box - R^\mu_\nu(x))\langle A^\nu(x)\rangle - ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu(x)G(x, x) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}I^\mu(x),$$
$$(\delta^\mu_\nu\Box_{(x)} - R^\mu_\nu(x))D^\nu_\lambda(x, x') + ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu(x)\frac{\delta G(x, x)}{\delta I^\lambda(x)} = \delta^\mu_\lambda\frac{\delta(x - x')}{\sqrt{-g(x)}}, \tag{76}$$
$$(i\gamma^\mu(x)D_{(x)\mu} + e\gamma^\mu(x)\langle A_\mu(x)\rangle - m)G(x, x') + ie\gamma^\mu(x)\frac{\delta G(x, x')}{\delta I^\mu(x)} = -\frac{\delta(x - x')}{\sqrt{-g(x)}}.$$

Уравнения (75) могут быть преобразованы в уравнения Швингера. Так же как и в плоском пространстве [35], введем

$$ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)\frac{\delta G(x,x)}{\delta I^{\lambda}(x')} = -\int dy\sqrt{-g(y)}\,\Pi^{\mu\alpha}(x,y)\,D_{\alpha\lambda}(y,x'),$$
$$ie\gamma^{\mu}(x)\frac{\delta G(x,x')}{\delta I^{\mu}(x)} = -\int dy\sqrt{-g(y)}\,\Sigma(x,y)\,G(y,x'), \tag{77}$$

где

$$\Sigma(x,y) = ie^2\gamma^{\mu}(x)\int du\sqrt{-g(u)}\int dv\int\sqrt{-g(v)}\,G(x,u)\,\Gamma^{\alpha}(u,y,v)\,D_{\mu\alpha}(x,v),$$
$$\Pi^{\mu\alpha}(x,y) = ie^2\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)\int du\sqrt{-g(u)}\int dv\sqrt{-g(v)}G(x,u)\Gamma^{\alpha}(u,v,y)G(v,x),$$
$$\Gamma^{\alpha}(x,y,z) = \gamma^{\alpha}(x)\frac{\delta(x-z)}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta(x-y)}{\sqrt{-g(x)}} + e^2\Lambda(x,y,z), \tag{78}$$
$$e^2\Lambda^{\alpha}(x,y,z) = -\frac{1}{e\sqrt{-g(z)}}\frac{\delta\Sigma(x,y)}{\delta\langle A_{\alpha}(z)\rangle}.$$

Тогда уравнения (75) принимают вид

$$(\delta^{\mu}_{\nu}\Box - R^{\mu}_{\nu}(x))\langle A^{\nu}(x)\rangle - ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)\,G(x,x) = -\frac{I^{\mu}(x)}{\sqrt{-g(x)}},$$
$$(\delta^{\mu}_{\nu}\Box_{(x)} - R^{\mu}_{\nu}(x))\,D^{\nu}_{\lambda}(x,x') - \int dy\sqrt{-g(y)}\,\Pi^{\mu}_{\alpha}(x,y)\,D^{\alpha}_{\lambda}(y,x') = \delta^{\mu}_{\lambda}\frac{\delta(x-x')}{\sqrt{-g(x)}},$$
$$(i\gamma^{\mu}(x)D_{(x)\mu} + e\gamma^{\mu}(x)\langle A_{\mu}(x)\rangle - m)\,G(x,x') - \int dy\sqrt{-g(y)}\,\Sigma(x,y)\,G(y,x') = -\frac{\delta(x-x')}{\sqrt{-g}}. \tag{79}$$

Уравнения (77), (79) являются основой теории возмущений для функций Грина G, D. Найдем выражения для поляризационного и массового операторов в низшем порядке по e^2. Из соотношений (78) очевидно, что

$$\Gamma^{\mu}_{0}(x,y,z) = \gamma^{\mu}(x)\frac{\delta(x-y)}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta(x-z)}{\sqrt{-g(x)}}. \tag{80}$$

Тогда, используя (78), (80), получим

$$\Pi^{\mu\nu}_{0}(x,y) = ie^2\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)S^{c}(x,y)\gamma^{\nu}(y)S^{c}(y,x), \tag{81}$$

где пропагаторы S^c определены согласно (62). Рассмотрим теперь уравнения для $\langle A\mu(x)\rangle$ и $G(x,x')$. Обозначим $J^{\mu}(x) = ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)\,S^{c}(x,x)$ и запишем решение первого уравнения (79) при $I = 0$ в виде

$$\langle A^{\mu}(x)\rangle = \int dy\sqrt{-g(y)}\,D^{(0)\mathrm{ret}\mu}_{\nu}(x,y)\,J^{\nu}(y), \tag{82}$$

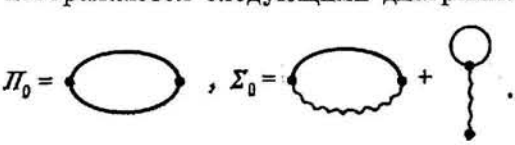
где $D^{(0)\mathrm{ret}}$ — запаздывающая функция Грина уравнения (31). Поставим выражение (82) в уравнение (79) для функции $G(x,x')$, тогда получим

$$(i\gamma^{\mu}(x)D_{(x)\mu} - m)\,G(x,x') - \int dy\sqrt{-g(y)}\,\widetilde{\Sigma}_{0}(x,y)\,G(y,x') = -\frac{\delta(x-x')}{\sqrt{-g(x)}}, \tag{83}$$

где в низшем порядке

$$\widetilde{\Sigma}_{0}(x,y) = e^2\gamma^{\mu}(x)\int dz\sqrt{-g(z)}\,D^{(0)\,\mathrm{ret}}_{\mu\nu}(x,z)\,J^{\nu}(z)\frac{\delta(x-y)}{\sqrt{-g(x)}} + ie^2\gamma^{\mu}(x)\,S^{c}(x,y)\,\gamma^{\nu}(y)\,D^{c}_{\mu\nu}(x,y). \tag{84}$$

Из равенств (81), (84) следует, что поляризационный и массовый операторы изображаются следующими диаграммами:



Другой вариант теории возмущений получается, если рассматривать уравнения для $\langle A_\mu \rangle$ и $G(x, x')$ как систему уравнений, выбирая в качестве нулевого приближения функцию Грина $G^{(0)}$, зависящую от $\langle A \rangle$. В этом случае массовый оператор дается следующей диаграммой:

$\Sigma_0 =$ 

Здесь жирная линия — это функция Грина $G^{(0)}$, являющаяся решением уравнения

$$(i\gamma^\mu(x) D_{(x)\mu} + e\gamma^\mu(x) \langle A_\mu(x) \rangle - m) G^{(0)}(x, x') = -\frac{\delta(x - x')}{\sqrt{-g(x)}}.$$

Поле $\langle A_\mu(x) \rangle$, в свою очередь, определяется равенством (82).

7. Некоторые следствия из условия унитарности S-матрицы. Как показано в работах [13, 66—68], в случае, если вакуум является нестабильным, возникает ряд особенностей при использовании соотношения унитарности матрицы рассеяния для вывода соотношений типа оптической теоремы (см. также: [82]). Здесь мы обсудим эти особенности конкретно для рассматриваемой модели.

Условие унитарности матрицы рассеяния

$$SS^+ = S^+S = I$$

приводит в искривленном пространстве-времени к ряду интересных следствий. Представим, как обычно, $S = I + iT$, тогда $T^+T = -i(T - T^+)$. Пусть $|\,\mathrm{in}\rangle$ — некоторое начальное состояние и $\{|\,\mathrm{out}\rangle_f\}$ — полный набор конечных состояний. Отсюда следует, что

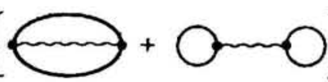
$$\sum_f |{}_f\langle \mathrm{out} | T | \mathrm{in} \rangle|^2 = 2\,\mathrm{Im}\,\langle \mathrm{in} | T | \mathrm{in} \rangle. \tag{85}$$

Рассмотрение по теории возмущений равенства (85) приводит к некоторым отличиям от обычно используемых соотношений этого вида в плоском пространстве. Важнейшее отличие состоит в том, что для расчета вероятностей некоторых процессов необходимы пропагаторы ${}_{\mathrm{in}}\langle 0 | T\psi(x)\overline{\psi}(x') | 0 \rangle_{\mathrm{in}}$.

Предположим, что в качестве начального состояния $|\,\mathrm{in}\rangle$ выбрано вакуумное состояние $|\,0\rangle_{\mathrm{in}}$. Запишем равенство (85) во втором порядке теории возмущений:

$$\begin{aligned}\sum_{N,\,M}\ \sum_{\{q,\,q',\,mi\}} \frac{1}{(N!)^2 M!} \Big| {}_{\mathrm{out}}\langle 0 | a_{q_1}(\mathrm{out}) \ldots a_{q_N}(\mathrm{out})\, b_{q'_1}(\mathrm{out}) \ldots \\ \ldots b_{q'_N}(\mathrm{out})\, c_{m_1 i_1}(\mathrm{out}) \ldots c_{m_M i_M}(\mathrm{out}) \Big[-i \int d^4x \sqrt{-g(x)}\, j^\mu(x)\, \times \\ \times A_\mu(x)\Big] | 0 \rangle_{\mathrm{in}} \Big|^2 = 2\,\mathrm{Im} \int d^4x_1 d^4x_2 \sqrt{-g(x_1)}\, \times \\ \times \sqrt{-g(x_2)}\, {}_{\mathrm{in}}\langle 0 | j^\mu(x_1) A_\mu(x_1) j^\nu(x_2) A_\nu(x_2) | 0 \rangle_{\mathrm{in}}.\end{aligned} \tag{86}$$

Правая часть этого равенства может быть представлена в виде

$p = 2\mathrm{Im}\Big\{$  $\Big\}.$

где используются следующие обозначения:

 $= -iS^c(x, x') = -i\,{}_{\mathrm{in}}\langle 0 | T\psi(x)\overline{\psi}(x') | 0 \rangle_{\mathrm{in}},$

 $= -iD^c_{\mu\nu}(x, x') = -i\,{}_{\mathrm{in}}\langle 0 | TA_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle_{\mathrm{in}},$

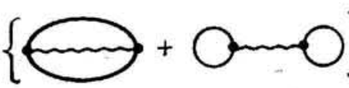
$$= \mathcal{J}^\mu(x) = \frac{ie}{2}\,\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu(x)\,[\tilde{S}^c(x+0, x) + \tilde{S}^c(x, x+0)].$$

Здесь $\mathcal{J}^\mu(x)$ — вакуумный ток.

Рассмотрим более подробно левую часть соотношения (86). Присутствующий в этом соотношении матричный элемент отличен от нуля только для нечетных M. Поэтому в низшем порядке теории возмущений левая часть соотношения (86) запишется так:

$$\sum_{N,\,K}\sum_{\{q,\,q',\,mi\}}\frac{1}{N!\,(2K+1)!}\,|\,{}_{\mathrm{out}}\langle 0|\,a_{q_1}(\mathrm{out})\dots a_{q_N}(\mathrm{out})\,b_{q'_1}(\mathrm{out})\dots$$
$$\dots b_{q'_1}(\mathrm{out})\,c_{m_1i_1}(\mathrm{out})\dots c_{m_{2K+1}i_{2K+1}}(\mathrm{out})\,S\,|0\rangle_{\mathrm{in}}|^2. \tag{88}$$

Соотношение (88) представляет собой вероятность квантового процесса, при котором из вакуума рождается произвольное число электрон-позитронных пар и нечетное число фотонов. Обозначим эту вероятность p. Указанный процесс имеет чисто радиационную природу, поскольку в нулевом порядке по радиационному взаимодействию гравитационное поле рождает из вакуума только четное число фотонов. Таким образом, p — это полная вероятность рождения любого числа электрон-позитронных пар гравитационным полем и радиационного рождения любого числа фотонов. Соотношения (86)—(88) показывают, что вероятность p вычисляется следующим образом:

2 Im  , (89)

Отметим, что диаграммы в правой части равенства (89) содержат пропагаторы $\tilde{S}^c$, $\tilde{D}^c$, отличающиеся от пропагаторов S^c, D^c, которые появляются при непосредственном вычислении амплитуд процессов.

Используя в равенстве (85) в качестве состояний различные начальные состояния, можно связать полные вероятности некоторых квантовых процессов с мнимыми частями определенных диаграмм. При этом все возникшие диаграммы будут содержать пропагаторы $\tilde{S}^c$, $\tilde{D}^c$.

8. Вычисление средних значений. Важный круг задач квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени связан с вычислением средних значений по начальному состоянию [2]. Таким средним значением является число частиц, родившихся из вакуума, к расчету указанных средних сводится проблема нахождения тензора энергии-импульса материи, рожденной из начального состояния. При полуклассическом подходе такой тензор энергии-импульса следует подставить в правую часть уравнений Эйнштейна для определения обратного влияния рожденной материи на метрику.

Среднее значение по начальному состоянию определяется соотношением

$$\langle F\rangle^M = \langle \mathrm{in}\mid F\mid \mathrm{in}\rangle, \tag{90}$$

где $|\,\mathrm{in}\rangle$ — произвольное начальное состояние: F — оператор в гейзенберговском представлении. Для вычисления средних введем, следуя [36], производящий функционал, зависящий от удвоенного числа источников:

$$Z^M = {}_{\mathrm{in}}\langle 0|\,\tilde{S}^{-1}(I_2\,\bar\eta_2, \eta_2)\,\tilde{S}\,(I_1, \bar\eta_1, \eta_1)\,|0\rangle_{\mathrm{in}},$$
$$Z^M(I_2, \bar\eta_2, \eta_2, I_1, \bar\eta_1, \eta_1)\big|_{\substack{I_2=I_1\\ \bar\eta_2=\bar\eta_1\\ \eta_2=\eta_1}} = 1. \tag{91}$$

[2] В этом разделе рассмотрено вычисление средних значений по начальному вакууму в контексте квантовой электродинамики в искривленном пространстве-времени. Общий подход к расчету средних значений в теориях с нестабильным вакуумом изложен в Приложении.

Операторы $\tilde{S}$ и $\tilde{S}^{-1}$ имеют вид

$$\tilde{S}(I, \bar{\eta}, \eta) = T \exp\left\{-i\int d^4x\, [I^\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]\right\}, \tag{92}$$

$$\tilde{S}^{-1}(I, \bar{\eta}, \eta) = \exp\left\{i\int d^4x\, [I^\mu(x) A_\mu(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]\right\} T.$$

Символ T, стоящий слева от оператора, производит хронологическое упорядочение, а справа — антихронологическое упорядочение.

Из определения (91) следует, что

$$\frac{\delta^{n+m+l+n'+m'+l'} Z^M}{\delta\bar{\eta}_2(x_1)\ldots\delta\bar{\eta}_2(x_n)\,\delta\eta_2(y_1)\ldots\delta\eta_2(y_m)\,\delta I_2(z_1)\ldots\delta I_2(z_l)\,\delta\bar{\eta}_1(x_1')\ldots\delta I_1(z_{l'}')}\Bigg|_0 =$$
$$= i^{n+l+m'}(-i)^{m+n'+l'}{}_{\text{in}}\langle 0|\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\ldots\bar{\psi}(y_m)A(z_1)\ldots A(z_l)\times$$
$$\times T\psi(x_1')\ldots\psi(x_{n'}')\bar{\psi}(y_1')\ldots\bar{\psi}(y_{m'}')A(z_1')\ldots A(z_{l'}')|0\rangle_{\text{in}} \equiv$$
$$\equiv i^{n+l+m'}(-i)^{m+n'+l'} G^M_{nml,\,n'm'l'}(xyz, x'y'z'). \tag{93}$$

При этом T-произведение действует и направо и налево. Функции Грина (98) дают возможность вычислить средние значения по начальному состоянию. Рассмотрим, например, число фотонов, родившееся из вакуумного состояния:

$$n_{mi} = {}_{\text{in}}\langle 0|S^{-1}(\sigma, \sigma_0)\, c^+_{mi}(\text{out})\, c_{mi}(\text{out})\, S(\sigma, \sigma_0)|0\rangle_{\text{in}} =$$
$$= -\int_\sigma d\sigma^\alpha(x)\int_\sigma d\sigma^\beta(x')^+ e^\mu_{mi}(x)\,\overleftrightarrow{\nabla}_\alpha G^M_{001,\,001\mu\nu}(x, x')\,\overleftrightarrow{\nabla}'_\beta{}^- e^\nu_{mi}(x'). \tag{94}$$

Для вычисления производящего функционала (9) можно развить теорию возмущений. Используя функциональные методы [34, 35], запишем функционал Z^M в форме [36]:

$$Z^M = \exp\left\{i\int d^4x\, [\mathscr{L}^{(2)}_{\text{int}}(\bar{\psi}, \psi, A) + \mathscr{L}^{(1)}_{\text{int}}(\bar{\psi}, \psi, A)]\right\} Z^M_0, \tag{95}$$

где

$$\mathscr{L}^{(2)}_{\text{int}}(\bar{\psi}, \psi, A) = \mathscr{L}_{\text{int}}\Big|_{\substack{\bar{\psi}=\delta/\delta i\eta_2\\ \psi=\delta/\delta i\bar{\eta}_2\\ A=\delta/\delta iI_2}}; \qquad \mathscr{L}^{(1)}_{\text{int}}(\bar{\psi}, \psi, A) = \mathscr{L}_{\text{int}}\Big|_{\substack{\bar{\psi}=\delta/\delta i\eta_1\\ \psi=\delta/\delta i\bar{\eta}_1\\ A=\delta/\delta iI_1}};$$

$$Z^M_0 = {}_{\text{in}}\langle 0|\tilde{S}^{-1}_0(I_2\bar{\eta}_2, \eta_2)\,\tilde{S}_0(I_1, \bar{\eta}_1, \eta\eta_1)|0\rangle_{\text{in}}. \tag{96}$$

Операторы $\tilde{S}^{-1}_0$, $\tilde{S}_0$ имеют тот же вид, что и операторы $\tilde{S}^{-1}$, $\tilde{S}$ (92), только зависят от операторов $\tilde{A}$, $\tilde{\bar{\psi}}$, $\tilde{\psi}$ в представлении взаимодействия. Выражение в правой части (96) можно явно вычислить. В результате получим

$$Z^M_0 = \exp i\left\{\bar{\eta}_1\tilde{S}^c\eta_1 + \bar{\eta}_2\tilde{S}^{\bar{c}}\eta_2 + \bar{\eta}_1\tilde{S}^{(+)}\eta_2 - \bar{\eta}_2\tilde{S}^{(-)}\eta_1 - \frac{1}{2}[I_1\tilde{D}^cI_1 + I_2\tilde{D}^{\bar{c}}I_2 +\right.$$
$$\left. + I_1\tilde{D}^{(+)}I_2 - I_2\tilde{D}^{(-)}I_1]\right\}, \tag{97}$$

где обозначено, например: $I_1DI_2 \equiv \int d^4x d^4y I^\mu_1(x)\, D_{\mu\nu}(x, y)\, I^\nu_2(y)$. Здесь

$$\tilde{S}^c(x, y) = i\,{}_{\text{in}}\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle_{\text{in}}; \qquad \tilde{D}^c_{\mu\nu}(x, y) = i\,{}_{\text{in}}\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle_{\text{in}};$$
$$\tilde{S}^{\bar{c}}(x, y) = i\,{}_{\text{in}}\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)T|0\rangle_{\text{in}}; \qquad \tilde{D}^{\bar{c}}_{\mu\nu}(x, y) = i\,{}_{\text{in}}\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)T|0\rangle_{\text{in}};$$
$$\tilde{S}^{(-)}(x, y) = i\,{}_{\text{in}}\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle_{\text{in}}; \qquad \tilde{D}^{(-)}_{\mu\nu}(x, y) = i\,{}_{\text{in}}\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle_{\text{in}};$$
$$\tilde{S}^{(+)}(x, y) = i\,{}_{\text{in}}\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle_{\text{in}}; \qquad \tilde{D}^{(+)}_{\mu\nu}(x, y) = -i\,{}_{\text{in}}\langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle_{\text{in}}. \tag{98}$$

Рассмотрим подробнее возникшие функции Грина. Из определений (98) следует, что $\tilde{S}^c$, $\tilde{S}^{\bar{c}}$ подчиняются уравнению (63а), $\tilde{S}^{(\pm)}$ подчиняются уравнению (10), $\tilde{D}^c$, $\tilde{D}^{\bar{c}}$ подчиняются уравнению (63б), $\tilde{D}^{\pm}$ подчиняются уравнению (31). Согласно определениям (98),

$$\tilde{S}^c(x, y) = \begin{cases} \tilde{S}^{(-)}(x, y), & \text{если } x \text{ в будущем по отношению к } y, \\ -\tilde{S}^{(+)}(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$\tilde{S}^{\bar{c}}(x, y) = \begin{cases} -\tilde{S}^{(+)}(x, y), & \text{если } x \text{ в будущем по отношению к } y, \\ \tilde{S}^{(-)}(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$
$$\tilde{D}^c(x, y) = \begin{cases} \tilde{D}^{(-)}(x, y), & \text{если } x \text{ в будущем по отношению к } y, \\ -\tilde{D}^{(+)}(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (99)$$
$$\tilde{D}^{\bar{c}}(x, y) = \begin{cases} -D^{(+)}(x, y), & \text{если } x \text{ в будущем по отношению к } y, \\ D^{(-)}(x, y) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь функции $\tilde{S}^{(\pm)}$, $\tilde{D}^{(\pm)}$. Согласно результатам разд. 2, 3, можно записать

$$\tilde{S}^{(-)}(x, y) = i \sum_p {}_+\varphi_p(x)\, {}_+\bar{\varphi}_p(y), \qquad \tilde{S}^{(+)}(x, y) = i \sum_p {}_-\varphi_p(x)\, {}_-\bar{\varphi}_p(y),$$
$$\tilde{D}^{(-)}_{\mu\nu}(x, y) = -i \sum_{n, j} {}_+e_{\mu nj}(x)\, \eta_{jj}\, {}_-e_{\eta nj}(y), \quad (100)$$
$$\tilde{D}^{(+)}_{\mu\nu}(x, y) = i \sum_{n, j} {}_+e_{\nu nj}(y)\, \eta_{jj}\, {}_-e_{\mu nj}(x).$$

Сравнение выражений (99) с функциями $S^{(\pm)}$, $D^{(\pm)}$ (62) показывает существенное различие выражений $\tilde{S}$, $\tilde{D}$ и S, D. Интересно установить связь между этими функциями. Для этого заметим, что функции S^c и $\tilde{S}^c$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (63а) и поэтому могут отличаться только на решение однородного уравнения (10). Запишем

$$S^c(x, y) = \tilde{S}^c(x, y) + S^a(x, y),$$
$$(i\gamma^\mu(x) D_{(x)\mu} - m)\, S^a(x, y) = 0. \quad (101)$$

Используя выражения (62) для $S^{(\pm)}$ и (100) для $\tilde{S}^{(\pm)}$ можно обнаружить

$$S^a(x, y) = i \sum_{p, p'} {}_-\varphi_p(x)\, w(0 \mid \overset{+}{\bar{p}} p')_+\, \bar{\varphi}_{p'}(y), \quad (102)$$

т. е. функция S^a связана с процессами аннигиляции электрон-позитронных пар.

Точно так же функции Грина D^c, $\tilde{D}^c$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (63б) и поэтому

$$D^c_{\mu\nu}(x, x') = \tilde{D}^c_{\mu\nu}(x, x') + D^a_{\mu\nu}(x, x'),$$
$$(\delta^\mu_\nu \Box - R^\mu_\nu(x))\, D^{a\nu}_\lambda(x, x') = 0. \quad (103)$$

Из выражений (62) для $D^{(\pm)}$ и (100) для $\tilde{D}^{(\pm)}$ получим

$$D^a_{\mu\nu}(x, x') = i \sum_{nj, n'j'} {}_-e_{\mu nj}(x)\, w(0 \mid njn'j')\, {}_-e_{\nu n'j'}(x'). \quad (104)$$

Функция D^a связана с процессами аннигиляции фотонных пар.

Выражение (95) для производящего функционала Z^M эквивалентно теории возмущений для функций Грина G^M (93). Диаграммная техника для функций Грина G^M получается с помощью обычной теоремы Вика. Запишем функции (93) через операторы в представлении взаимодействия:

$$G^M_{nml,\, n'm'l'}(xyz, x'y'z') = {}_{\text{in}}\langle 0 \mid S^{-1} \tilde{\psi}(x_1) \ldots \tilde{\psi}(x_n)\, \tilde{\bar{\psi}}(y_1) \ldots \tilde{\bar{\psi}}(y_m)\, \tilde{A}(z_1) \ldots$$
$$\ldots \tilde{A}(z_l)\, T \tilde{\psi}(x'_1) \ldots \tilde{\psi}(x'_{n'})\, \tilde{\bar{\psi}}(y'_1) \ldots \tilde{\bar{\psi}}(y'_{m'})\, A(z'_1) \ldots A(z'_{l'})\, S \mid 0\rangle_{\text{in}} \quad (105)$$

и разложим операторы S^{-1}, S по степеням e. Получающиеся при этом матричные элементы изображаются фейнмановскими диаграммами с модифицированными правилами соответствия. Пропагаторы даются матрицами $\tilde{S}_{ab}$, $\tilde{D}_{ab}$:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{S}^c & \tilde{S}^{(+)} \\ -\tilde{S}^{(-)} & \tilde{S}^{\bar{c}} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D}^c & \tilde{D}^{(+)} \\ -\tilde{D}^{(-)} & \tilde{D}^{\bar{c}} \end{pmatrix}, \tag{106}$$

а вершина определяется выражением

$$\Gamma^{\mu}_{abc}(x) = e\gamma^{\mu}(x)\,\delta_{ab}\,\delta_{ac}\sqrt{-g(x)}, \qquad a, b, c = 1, 2. \tag{107}$$

Остальные правила соответствия обычные.

Соотношения (106), (107) получаются из представления (95), (96) для производящего функционала Z^M. Для производящего функционала Z^M можно вывести систему уравнений в функциональных производных таким же способом, как это сделано для функционала Z в разд. 6. Такая система уравнений запишется так:

$$(\delta^{\mu}_{\nu}\Box - R^{\mu}_{\nu}(x))\frac{\delta Z^M}{\delta I_{\nu a}(x)} + (-1)^{a-1} ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)\frac{\delta^2 Z^M}{\delta\bar{\eta}_a(x)\,\delta\eta_a(x)} =$$
$$= \frac{i}{\sqrt{-g}} I^{\mu}_a(-1)^{a-1} Z^M, \quad a = 1, 2;$$
$$(i\gamma^{\mu}(x) D_{\mu} - m)\frac{\delta Z^M}{\delta\bar{\eta}_a(x)} + (-1)^{a-1} ie\gamma^{\mu}(x)\frac{\delta^2 Z^M}{\delta\bar{\eta}_a(x)\,\delta I^{\mu}_a(x)} =$$
$$= (-1)^a \frac{i}{\sqrt{-g}}\eta_a(x) Z^M, \quad a = 1, 2. \tag{108}$$

Обозначим

$$i\left.\frac{\delta \ln Z^M}{\delta I^{\mu}_a(x)}\right|_{\eta_a=\bar{\eta}_a=0} = \langle A_{\mu}(x)\rangle^M_a, \qquad \tilde{G}_{ab}(x, x') = -i\left.\frac{\delta^2 \ln Z^M}{\delta\bar{\eta}_a(x)\,\delta\eta_b(x')}\right|_{\eta_a=\bar{\eta}_a=0},$$
$$\tilde{D}_{\mu a\nu b}(x, x') = -i\left.\frac{\delta^2 \ln Z^M}{\delta I^{\mu}_a(x)\,\delta I^{\nu}_b(x')}\right|_{\eta_a=\bar{\eta}_a=0}. \tag{109}$$

Вычисления, аналогичные проведенным в разд. 6, приводят к следующей системе уравнений:

$$(\delta^{\mu}_{\nu}\Box - R^{\mu}_{\nu}(x))\langle A^{\nu}(x)\rangle^M_a - ie(-1)^{a-1}\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)\,\tilde{G}_{aa}(x, x) = \frac{(-1)^a}{\sqrt{-g}} I^{\mu}_a(x),$$
$$(g_{\mu\nu}\Box - R_{\mu\nu}(x))\,\tilde{D}^{\nu\lambda}_{ab}(x, x') - \int dy\sqrt{-g(y)}\,\tilde{\Pi}_{\mu\alpha ac}(x, y)\,\tilde{D}^{\alpha\lambda}_{cb}(y, x') =$$
$$= (-1)^{a-1}\,\delta_{ab}\delta^{\lambda}_{\mu}\frac{\delta(x - x')}{\sqrt{-g(x)}},$$
$$(i\gamma^{\mu}(x) D_{\mu} + (-1)^{a-1} e\gamma^{\mu}(x)\langle A_{\mu}(x)\rangle^M_a - m)\,\tilde{G}_{ab}(x, x') -$$
$$- \int dy\sqrt{-g(y)}\,\tilde{\Sigma}_{ac}(x, y)\,\tilde{G}_{cb}(y, x') = (-1)^a\frac{\delta(x - x')}{\sqrt{-g(x)}}, \tag{110}$$

где обозначено

$$\tilde{\Sigma}_{ab}(x, y) = (-1)^{a-1} ie^2\gamma^{\mu}(x)\int du\sqrt{-g(u)}\int dv\sqrt{-g(v)}\,\tilde{G}_{ac}(x, u)\times$$
$$\times\tilde{\Gamma}^{\nu}_{cbf}(u, y, v)\,\tilde{D}_{\mu a\nu f}(x, v),$$
$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu}_{ab}(x, y) = (-1)^{a-1} ie^2\,\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}(x)\int du\sqrt{-g(u)}\times$$
$$\times\int dv\sqrt{-g(v)}\,\tilde{G}_{ac}(x, u)\,\tilde{\Gamma}^{\nu}_{cfb}(u, v, y)\,\tilde{G}_{fa}(v, x),$$
$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{abc}(x, y, z) = \gamma^{\mu}(x)\,\delta_{ab}\delta_{ac}\frac{\delta(x - z)}{\sqrt{-g(x)}}\frac{\delta(x - y)}{\sqrt{-g(x)}} + e^2\tilde{\Lambda}^{\mu}_{abc}(x, y, z),$$
$$e^2\tilde{\Lambda}^{\mu}_{abc}(x, y, z) = (-1)^a\frac{1}{e\sqrt{-g(z)}}\frac{\delta\tilde{\Sigma}_{ab}(x, y)}{\delta\langle A_{\mu}(z)\rangle^M_c}.$$

Функция $\langle A_\mu(x)\rangle^M = \langle A_\mu(x)\rangle_1^M|_{I_a=0} = -\langle A_\mu(x)\rangle_2^M|_{I_a=0} = {}_{\rm in}\langle 0 | A_\mu(x) | 0\rangle_{\rm in}$ является средним полем, образованным вакуумным током $\mathcal{J}_\mu(x) = ie\,\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu(x)\,\tilde{G}_{aa}(x, x)$.

Глава 2

КВАНТОВОЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В КОНФОРМНО-ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ [3]

9. Функции Грина спинарного поля в конформно-плоском пространстве-времени. 1. Одна из основных задач квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени состоит в нахождении функций Грина полевых уравнений. Функции Грина, точно учитывающие взаимодействие частиц с внешним гравитационным полем, необходимы для расчета квантовых процессов и вычисления средних значений физических величин в искривленном пространстве-времени. На основе введенных подходящим образом пропагаторов можно решить вопрос об определении вакуума во внешнем гравитационном поле. Функции Грина также полезны для нахождения среднего числа частиц, рожденных гравитационным полем, и перенормировке тензора энергии-импульса в искривленном пространстве-времени. Вычислению функций Грина и изучению их свойств в различных внешних гравитационных полях посвящено большое число работ (см., напр.: [22, 24—27, 37—47]).

Отличительная черта квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени состоит в несовпадении вакуумов начальных и конечных состояний, что проявляется в эффекте рождения частиц из вакуума. По этой причине в искривленном пространстве-времени можно построить две причинные функции Грина

$$S^c(x, y) = i\,\frac{{}_{\rm out}\langle 0 | T\psi(x)\,\bar{\psi}(y) | 0\rangle_{\rm in}}{{}_{\rm out}\langle 0 | 0\rangle_{\rm in}}$$

и

$$\tilde{S}^c(x, y) = i\,{}_{\rm in}\langle 0 | T\psi(x)\,\bar{\psi}(y) | 0\rangle_{\rm in},$$

удовлетворяющие одному и тому же уравнению. Как показано в гл. 1, функция S^c естественным образом возникает при расчете амплитуд квантовых процессов, а функция $\tilde{S}^c$ появляется при расчете средних значений во внешнем гравитационном поле. Функция Грина S^c может быть найдена: а) на основе метода Швингера—де Витта интегрирования по собственному времени [14]; б) прямым решением уравнения для функций Грина с подходящими граничными условиями; в) суммированием по решениям полевых уравнений с предварительным определением положительно частотных состояний (100)—(103). Что касается функции $\tilde{S}^c$, то в настоящее время кажется, что ее можно найти только на основе последнего способа. Было бы особенно полезно получить для функции $\tilde{S}^c$ представление в виде контурного интеграла типа Швингера—де Витта.

В данной статье вычисляются функции Грина S^c, $\tilde{S}^c$ спинорного поля во внешнем гравитационном поле с метрикой

$$ds^2 = \eta^2\,(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \tag{112}$$

Метрика (112) отвечает квазиевклидовой модели Фридмана с масштабным фактором $a(t) \sim t^{1/2}$. Доказано, что функции S^c, $\tilde{S}^c$ можно представить в виде интегралов от единого ядра Швингера—де Витта, отличающихся только контурами интегрирования.

---

[3] Результаты этой главы получены при участии Л. И. Царегородцева [46, 60].

2. Рассмотрим уравнение Дирака во внешнем гравитационном поле

$$(ie_a^\mu(x)\,\gamma^a D_\mu - m)\,\psi = 0, \tag{113}$$

где e_a^μ — тетрада; γ^a — матрицы Дирака; D_μ — ковариантная производная спинора. Совершим конформное преобразование поля $\psi = \eta^{-3/2}\varphi$. Тогда для спинора φ получим уравнение Дирака в плоском пространстве, но с переменной массой:

$$(\hat{P} - m\eta)\,\varphi = 0, \qquad \hat{P} \equiv i\gamma^a\partial_a. \tag{114}$$

Из результатов гл. 1 следует, что функция Грина спинорного поля S^c для уравнения (114) имеет вид

$$\begin{aligned} S^c(x, x') &= \theta(\eta - \eta')\,S^{(-)}(x, x') - \theta(\eta' - \eta)\,S^{(+)}(x, x'), \\ S^{(-)}(x, x') &= i\sum_{p,q} {}^{+}\varphi_q(x)\,w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p})\,{}_{+}\overline{\varphi}_p(x'), \\ S^{(+)}(x, x') &= i\sum_{p,q} {}^{-}\varphi_q(x)\,w(\bar{q}\,|\,\bar{p})\,{}_{-}\overline{\varphi}_p(x). \end{aligned} \tag{115}$$

Здесь $\{{}_{\pm}\varphi_p(x)\}$ — полный набор решений уравнения (114), являющихся положительно (+) и отрицательно (—) частотными при $\eta \to -\infty$; $\{{}^{\pm}\varphi_q(x)\}$ — полный набор решений уравнения (114), являющихся положительно (+) и отрицательно (—) частотными при $\eta \to \infty$; $w(\overset{+}{q}\,|\,\overset{+}{p})$, $w(\bar{q}\,|\,\bar{p})$ — амплитуды рассеяния электрона и позитрона. Что касается функции $\bar{S}^c$, то для нее имеем

$$\begin{aligned} \bar{S}^c(x, x') &= \theta(\eta - \eta')\,\bar{S}^{(-)}(x, x') - \theta(\eta' - \eta)\,\bar{S}^{(+)}(x, x'), \\ \bar{S}^{(\pm)}(x, x') &= i\sum_p {}_{\mp}\varphi_p(x)\,{}_{\mp}\overline{\varphi}_p(x'). \end{aligned} \tag{116}$$

Из соотношений (100)—(103) следует, что функции S^c, $\bar{S}^c$ связаны соотношением

$$\begin{aligned} S^c(x, x') &= \bar{S}^c(x, x') + S^a(x, x'), \\ S^a(x, x') &= i\sum_{p,q} {}_{-}\varphi_p(x)\,w(0\,|\,\bar{p}\overset{+}{q})\,{}_{+}\overline{\varphi}_q(x'), \end{aligned} \tag{117}$$

где $w(0\,|\,\bar{p}\overset{+}{q})$ — амплитуда аннигиляции электрон-позитронной пары. Таким образом, нахождение функций Грина S^c, $\bar{S}^c$ сводится к построению полных наборов решений уравнений (114), вычислению амплитуд рассеяния и аннигиляции и выполнению суммирования по квантовым числам, согласно соотношениям (115), (116).

3. Для нахождения полной системы решений уравнений (114) потребуем, чтобы функция $\varphi(x)$ была собственной для операторов, являющихся интегралами движения уравнения (114). В качестве таких интегралов можно выбрать оператор импульса $\mathbf{P}$ и оператор $(\sigma\mathbf{P})/\mathbf{p}$, собственные значения $\lambda = \pm 1$ которого описывают спиральность частицы. Для классификации решений по частностям используем метод диагонализации мгновенного гамильтониана в форме, предложенной в работе [23]. В результате вычислений получим, что полные наборы $\{{}_{\pm}\varphi_{\mathbf{p}\lambda}(x)\}$, $\{{}^{\pm}\varphi_{\mathbf{p}\lambda}(x)\}$ решений с заданными импульсами $\mathbf{p}$ и спиральностями λ, нормированные на δ-функцию, имеют вид

$$\overset{\pm}{}_{\pm}\varphi_{\mathbf{p}\lambda}(x, \eta) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{px} + \frac{i\pi\nu}{4}}\, \overset{\pm}{}_{\pm}\Phi_{\mathbf{p}\lambda}(k_0\eta)\,u^{(\lambda)}(\mathbf{p}). \tag{118}$$

Здесь $\overset{\pm}{}_{\pm}\Phi$ — блочные столбцы, элементами которых являются матрицы размерности 2×2:

$${}_{+}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} -\dfrac{ip}{k_0} D_{\nu-1}(-k_0\eta)\, I \\ \lambda D_\nu(-k_0\eta)\, I \end{pmatrix}, \qquad {}_{-}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} D_{-\nu}(-ik_0\eta)\, I \\ -\dfrac{\lambda p}{k_0} D_{-\nu-1}(-ik_0\eta)\, I \end{pmatrix},$$

$$
{}^{+}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} D_{-\nu}(-k_0\eta) I \\ \frac{\lambda p}{k_0} D_{-\nu-1}(ik_0\eta) I \end{pmatrix}, \quad {}^{-}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} -\frac{ip}{k_0} D_{\nu-1}(k_0\eta) I \\ -\lambda D_{\nu}(k_0\eta) I \end{pmatrix}. \tag{119}
$$

Спинор $u^{(\lambda)}$ удовлетворяет уравнению

$$
(\sigma\mathbf{P})\, u^{(\lambda)}(p) = \lambda p u^{(\lambda)}(\mathbf{p}), \qquad u^{(\lambda)}(\mathbf{p})\, u^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 1;
$$

$D_\nu(k_0\eta)$ — функции параболического цилиндра [48]; $k_0 = \sqrt{2m}\, e^{-i\pi/4}$; $\nu = p^2/k_0^2$; I — единичная матрица 2×2. Расчеты амплитуд рассеяния, проведенные по методу, изложенному в разд. 2, приводят к следующему результату:

$$
w(\overset{+}{p}{}'\lambda' \,|\, \overset{+}{p}\lambda) = w(\bar{p}'\lambda' \,|\, \bar{p}\lambda) = \frac{k_0}{p} \frac{\Gamma(1+\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \tag{120}
$$

После подстановки функций (118), (119) и амплитуд (120) в равенства (115), (116), получим для функций $S^{(\pm)}$, $\tilde{S}^{(\pm)}$ следующие выражения:

$$
S^{(\pm)}(x, x') = (\hat{P}(x) + m\eta)\, G^{(\pm)}(x, x'), \quad \tilde{S}^{\pm}(x, x') = (\hat{P}(x) + m\eta)\, \tilde{G}^{(\pm)}(x, x'),
$$

$$
G^{(\pm)}(x, x') = \pm \frac{e^{-i\pi/4}}{4\sqrt{\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} B_\nu^{(\pm)}(\eta, \eta'),
$$

$$
\tilde{G}^{(\pm)}(x, x') = \pm \frac{e^{-i\pi/4}}{4\sqrt{\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tilde{B}_\nu^{(\pm)}(\eta, \eta'), \tag{121}
$$

$$
B_\nu^{(\pm)} = (1 + \gamma^0)\, \Gamma(1+\nu)\, D_{-\nu-1}(\pm ik_0\eta)\, D_{-\nu-1}(\pm ik_0\eta') + (1 - \gamma^0)\, \Gamma(\nu)\, D_{-\nu}(\mp ik_0\eta)\, D_{-\nu}(\pm ik_0\eta'), \tag{122}
$$

$$
\tilde{B}_\nu^{(+)} = e^{i\pi\nu/2}\left[(1+\gamma^0) D_{-\nu-1}(-ik_0\eta) D_\nu(-k_0\eta') - i(1-\gamma^0) D_{-\nu}(-ik_0\eta) D_{\nu-1}(-k_0\eta')\right],
$$

$$
\tilde{B}_\nu^{(-)} = e^{i\pi\nu/2}\left[(1+\gamma^0) D_{-\nu-1}(-ik_0\eta') D_\nu(-k_0)\eta - i(1-\gamma^0) D_{-\nu}(-ik_0\eta') D_{\nu-1}(-k_0\eta)\right]. \tag{123}
$$

Величины $B_\nu^{(\pm)}$, $\tilde{B}_\nu^{(\pm)}$ выражаются через произведения функций параболического цилиндра. Можно показать, что для произведений функций параболического цилиндра, входящих в (122), справедливы интегральные представления

$$
\Gamma(1+\nu) D_{-\nu-1}(\mp ik_0\eta) D_{-\nu-1}(\pm ik_0\eta') = \sqrt{2}\, m \left\{ \int_{\Gamma_c} e^{-ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds + \theta(\pm\beta) \int_{\Gamma} e^{-ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds \right\}, \tag{124}
$$

$$
\Gamma(\nu) D_{-\nu}(\mp ik_0\eta) D_{-\nu}(\pm ik_0\eta') = \sqrt{2}\, m \left\{ \int_{\Gamma_c} e^{ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds + \theta(\pm\beta) \int_{\Gamma} e^{ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds \right\},
$$

$$
j(\alpha, \beta, s) = \frac{e^{-ip^2 s}}{\sqrt{\operatorname{sh}(2ms)}} \exp\left[-\frac{im\alpha^2}{4}\operatorname{th}(ms) - \frac{im\beta^2}{4}\operatorname{cth}(ms)\right], \tag{125}
$$

$$
\alpha = \eta + \eta', \quad \beta = \eta - \eta'.
$$

Контуры Γ, Γ_c задаются следующими уравнениями в плоскости комплексной переменной s. $\Gamma: s = \varepsilon e^{i\varphi}$ $(-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0)$, $\varepsilon \to +0$ после вычисления интеграла по этому контуру. $\Gamma_c: \operatorname{Im} s = 0$ $(0 \leqslant \operatorname{Re} s < \infty)$. Можно показать, что для произведения функций параболического цилиндра, входящих в (123), получаются интегральные представления вида

$$D_{-\nu-1}(-ik_0\eta)\, D_\nu(-k_0\eta')\, e^{\frac{i\pi\nu}{2}} = \frac{im}{\sqrt{\pi}}\Big\{\int\limits_{\Gamma_c+\Gamma_a} e^{-ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds +$$

$$+ \theta(\beta)\int\limits_{\Gamma} e^{-ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds + \theta(\alpha)\int\limits_{\Gamma_1} e^{-ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds\Big\}, \qquad (126)$$

$$D_{-\nu}(-ik_0\eta)\, D_{\nu-1}(-k_0\eta')\, e^{\frac{i\pi\nu}{2}} = \frac{im}{\sqrt{\pi}}\Big\{\int\limits_{\Gamma_c+\Gamma_a} e^{ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds +$$

$$+ \theta(\beta)\int\limits_{\Gamma} e^{ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds + \theta(\alpha)\int\limits_{\Gamma_1} e^{ms} j(\alpha, \beta, s)\, ds\Big\}.$$

Контуры Γ_a, Γ_1 задаются в плоскости комплексного переменного s уравнениями $\Gamma_a: \operatorname{Im} s = -i\pi/2m$ $(0 \leqslant \operatorname{Re} s < \infty)$, $\Gamma_1: s = -i\pi\, 2m + \varepsilon e^{i\varphi}$ $(-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0)$, $\varepsilon \to +0$, после вычисления интеграла. Интегральные представления для функций, входящих в $\tilde{B}^{(-)}$, получаются из (126) заменой $\eta \leftrightarrow \eta'$.

Подставляя выражения (124)—(126) в соотношения (122), (123) и выполняя интегрирования по импульсам, получим следующее представление для функций $G^{(\pm)}$, $\tilde{G}^{(\pm)}$:

$$G^{(\pm)}(x, x') \mp \int\limits_{\Gamma_c} g(x, x', s)\, ds \mp \theta(\pm\beta)\int\limits_{\Gamma} g(x, x', s)\, ds,$$

$$g(x, x', s) = (\operatorname{ch} ms - \gamma^0 \operatorname{sh} ms)\, f(x, x', s),$$

$$f(x, x', s) = \frac{\sqrt{2m}}{(4\pi)^2\sqrt{\operatorname{sh} 2ms}} \exp\left[\frac{i\sigma^2}{4s} - \frac{im\alpha^2}{4}\operatorname{th}(ms) - \frac{im\beta^2}{4}\operatorname{cth}(ms)\right], \qquad (127)$$

$$\tilde{G}^{(\pm)}(x, x') = G^{(\pm)}(x, x') \pm G^a(x, x'),$$

$$G^a(x, x') = -\int\limits_{\Gamma_c} g(x, x', s)\, ds - \theta(\alpha)\int\limits_{\Gamma_1} g(x, x', s)\, ds.$$

Здесь $\sigma^2 = (x - x')^2$. Используя равенства (127) в соотношениях (121) для $S^{(\pm)}$, $\tilde{S}^{(\pm)}$, а последние — в равенствах (116), (117), получим

$$S^c(x, x') = (\hat{P}(x) + m\eta)\, G(x, x'), \qquad G(x, x') = \int\limits_0^\infty g(x, x', s)\, ds,$$

$$\tilde{S}^c(x, x') = S^c(x, x') - S^a(x, x'), \quad S^a(x, x') = (\hat{P}(x) + m\eta)\, G^a(x, x'). \qquad (128)$$

При получении равенств (128) использовано, что $\int\limits_{\Gamma} g(x, x', s)\, ds\,|_{\eta=\eta'} = 0$. Соотношения (128) являются окончательными представлениями функций Грина S^c, $\tilde{S}^c$ в виде контурных интегралов. Существенно, что две эти функции отличаются только формами контура. Для функции S^c получается стандартный швингеровский контур Γ_c; для функции $\tilde{S}^c$ контур имеет более сложный вид. Подынтегральные выражения для обеих функций одинаковы.

10. Излучение фотона электроном в конформно-плоском пространстве-времени. Расчеты взаимодействия квантованных полей во внешних гравитационных полях были начаты сравнительно недавно [44—60] и касались главным образом эффектов рождения частиц из вакуума. Из результатов работ [44—59] следует, что, во-первых, эффекты взаимодействия полей могут быть сравнимы и даже доминировать над процессами нулевого порядка по взаимодействию, если лагранжиан взаимодействия содержит параметр размерности длины, больший планковской длины [49, 50]. Во-вторых, процессы взаимодействия не являются, вообще говоря, CPT-инвариантными, что может иметь значение для объяснения существующей в настоящее время асимметрии частиц и античастиц [51]. В работе [53] делается вывод о том, что расчеты процессов взаимодействия в кривом пространстве-времени в рамках теории S-матрицы возможны лишь для узкого класса полей и взаимодействий, а в общем случае дают расходящиеся выражения для полных вероятностей процессов уже в древесном приближении. Изучение эффектов взаимодействия квантованных полей в сильных гравитационных полях представляет большой интерес, как общетеоретический, так и в связи с возможными приложениями в космологии.

В данной работе рассматривается процесс излучения фотона электроном в искривленном пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad R(t) = a\sqrt{t}, \quad a > 0. \tag{129}$$

В плоском пространстве этот процесс запрещен законами сохранения. Согласно стандартной модели Вселенной, метрика (129) описывает пространство-время в эпоху преобладания излучения. Для расчета процесса используется S-матричный подход, который является распространением теории S-матрицы в квантовой электродинамике с внешним электромагнитным полем на случай внешних гравитационных полей. В связи с этим изучение эффектов излучения в сильных гравитационных полях является естественным продолжением исследований эффектов излучения в сильных электромагнитных полях, проведенных рядом авторов (см., напр.: [9—13, 61, 62]).

Рассмотрим спинорную электродинамику в искривленном пространстве-времени с метрикой (112). В выражении (112) t — это синхронное собственное время. Введем вместо времени t конформное время $\eta = (2/a)\sqrt{t}$. Тогда метрика (112) перепишется в виде

$$ds^2 = R^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \quad R = b\eta, \quad b = a^2/2. \tag{130}$$

Конформное время η относится к той же сопутствующей системе координат, что и время t. Перейдем от метрики $g_{\mu\nu}(\eta)$ к метрике плоского пространства $\eta_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu} = R^2(\eta)\,\eta_{\mu\nu}$ и совершим в лагранжиане (1) конформное преобразование спинорного поля ψ, электромагнитного поля A_μ и тетрады e^μ_a:

$$\psi = R^{-3/2}\psi', \; A_\mu = A'_\mu, \; e^\mu_a = R^{-1}e'^\mu_a.$$

Тогда мы получим лагранжиан спинорной электродинамики с внешним полем в плоском пространстве (штрих мы опускаем):

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad \mathcal{L}_1 = \bar\psi(x)\,[i\gamma^\mu\partial_\mu - mR(\eta)]\,\psi, \\ \mathcal{L}_2 = -{}^1/_4 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar\psi(x)\,\gamma^\mu\,\varphi(x)\,A_\mu(x).\end{gathered} \tag{131}$$

Здесь $\mathcal{L}_1$ — лагранжиан электронно-позитронного поля во внешнем поле; γ^μ — матрицы Дирака. В качестве внешнего потенциала, зависящего от времени η, служит слагаемое, пропорциональное $R(\eta)$; $\mathcal{L}_2$ — лагранжиан свободного электромагнитного поля; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $\mathcal{L}_{\text{int}}$ — лагранжиан взаимодействия. Лагранжиан (20) будет служить нам в качестве исходного. При расчете процесса мы будем использовать формализм S-матрицы в квантовой электродинамике с внешним полем, развитый в гл. 1.

Для того чтобы построить фоковские пространства начальных и конечных состояний фермионного поля, нам необходимо иметь полные наборы решений уравнений Дирака

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - mR(\eta)]\,\psi(x) = 0, \tag{132}$$

описывающих одночастичные состояния. Для определения одночастичных состояний мы будем использовать прием, предложенный в работе [63]. Очевидно, что если пространство содержит асимптотические области, в которых гравитационное поле меняется достаточно медленно, то определение частиц не вызывает проблем. Естественный и простой способ получить такую область для начальных частиц — это продолжить аналитически решения уравнения Дирака (132) на значения $\eta < 0$. Тогда можно определить одночастичные состояния при $\eta \to -\infty$ и $\eta \to \infty$, где поле меняется медленно. Ясно, что при этом мы переходим от первоначальной модели к несколько другой, которая, однако, сохраняет в себе такую существенную черту первоначальной модели, как наличие сингулярности, и при $\eta > 0$ совпадает с первоначальной. Наглядно мы можем представить себе, что Вселенная при изменении η от $-\infty$ до 0 сокращается до сингулярности и при $\eta > 0$ вновь расширяется. Физически определению одночастичных состояний при $\eta < -\infty$ соответствует выбор некоторых состояний в сингулярности [63]. Поэтому данный подход позволит нам, хотя бы грубо, исследовать влияние сильного гравитационного поля на процесс излучения фотона электроном.

Полные системы решений уравнения Дирака (132), описывающие состояния с заданным импульсом $\mathbf{p}$ и спиральностью $\lambda = \pm 1$, найдены в работе [46]. Для определения одночастичных решений нами использован метод диагонализации мгновенного гамильтониана в форме, предложенной в работе [23]. Полные наборы решений, описывающих состояния частиц (+) и античастиц (—) соответственно при $\eta \to -\infty$ (нижний знак) и $\eta \to \infty$ (верхний знак), имеют вид [46]:

$$ {}^{\pm}_{\pm}\varphi_{\mathbf{p}\lambda}(x, \eta) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{px}+i\pi\nu/4}\, {}^{\pm}_{\pm}\Phi_{\mathbf{p}\lambda}(z)\, u^{(\lambda)}(\mathbf{p}). \tag{133} $$

Здесь спинор $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$ удовлетворяет уравнению

$$ (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\, u^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = \lambda p u^{(\lambda)}(\mathbf{p}), \quad u^{(\lambda)+}(\mathbf{p})\, u^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 1. $$

Блочные матрицы ${}^{\pm}_{\pm}\Phi_{\mathbf{p}\lambda}(z)$ записываются в виде

$$ {}_{+}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} -\dfrac{e^{3i\pi/4}p}{p_0} D_{\nu-1}(-z)\, I \\ \lambda D_{\nu}(-z)\, I \end{pmatrix}, \qquad {}_{-}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} D_{-\nu}(-iz)\, I \\ -\dfrac{\lambda p}{p_0} e^{i\pi/4} D_{-\nu-1}(-iz)\, I \end{pmatrix}, \tag{134} $$

$$ {}^{+}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} D_{-\nu}(iz)\, I \\ \dfrac{\lambda p}{p_0} e^{i\pi/4} D_{-\nu-1}(iz)\, I \end{pmatrix}, \qquad {}^{-}\Phi_{\mathbf{p}\lambda} = \begin{pmatrix} -\dfrac{p}{p_0} e^{3i\pi/4} D_{\nu-1}(z)\, I \\ -\lambda D_{\nu}(z)\, I \end{pmatrix}, \tag{135} $$

где $D_\nu(z)$ — функции параболического цилиндра [48]; I — единичная матрица 2×2; $p_0 = \sqrt{2bm}$; $\nu = ip^2/p_0^2$; $z = p_0 \eta e^{-i\pi/4}$.

Процесс излучения фотона электроном во внешнем гравитационном поле является эффектом первого порядка по радиационному взаимодействию. Амплитуда вероятности процесса

$$ M_{\text{in}\to\text{out}} = -ie(2\pi)^3 c_v \int d^4x\, {}^{+}\overline{\psi}_{p_2\lambda_2}(x)\, \hat{e}^j(\mathbf{k})\, {}_{+}\psi_{p_1\lambda_1}(x) \frac{e^{i\mathbf{kx}}}{\sqrt{2k_0}}. \tag{136} $$

Здесь $\hat{e}^j(\mathbf{k}) = \gamma^\mu e^j_\mu(\mathbf{k})$; $e^j_\mu(\mathbf{k})$ — 4-вектор поляризации фотона с импульсом $\mathbf{k}$; $k_0 = |\mathbf{k}|$; c_v — амплитуда вероятности фермионному вакууму остаться вакуумом. Функции ${}^{+}\overline{\psi}_{p_2\lambda_2}(x)$ и ${}_{+}\psi_{p_1\lambda_1}(x)$ определяют обобщенные спаривания фермионных операторов (см. разд. 4). В нашем случае они имеют вид

$$ \begin{aligned} {}^{+}\overline{\psi}_{p_2\lambda_2}(x) &= \frac{p_0}{p_2} e^{-i\pi/4} \frac{\Gamma(1+\nu_2)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi\nu_2/2}\, {}_{+}\overline{\varphi}_{p_2\lambda_2}(x), \\ {}_{+}\psi_{p_1\lambda_1}(x) &= \frac{p_0}{p_1} e^{-i\pi/4} \frac{\Gamma(1+\nu_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\pi\nu_1/2}\, {}^{+}\varphi_{p_1\lambda_1}(x). \end{aligned} \tag{137} $$

Интегрирование матричного элемента (136) по $\mathbf{x}$ дает закон сохранения импульса: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}$. Встречающиеся интегралы по η выражаются через вырожденные гипергеометрические функции. Просуммируем квадрат модуля матричного элемента по состояниям поляризации конечного электрона и фотона и усредним по спиновым состояниям начального электрона. В результате дифференциальная вероятность процесса с участием неполяризованных частиц в объеме V за все время имеет вид

$$dW = \frac{e^2}{p_0^2}\frac{V}{(2\pi)^2}\frac{|c_v|^2}{8k_0}\frac{\exp(-i\pi\nu_1)}{\sin\pi\nu_1\sin\pi\nu_2}\Big[3\nu_1\nu_2|\psi_{11}|^2 - 3|\psi_{01}|^2 + + 3\nu_1\frac{p_0^2}{k_0^2}|\psi_{00}|^2 + i\nu_2\frac{k_0^2}{p_0^2}|\psi_{12}|^2 + \frac{i(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)}{p_0^2}(\psi_{11}\psi_{01}^+ - \psi_{11}^+\psi_{01}) + + \frac{i(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)}{p_0^2}(\psi_{00}\psi_{12}^+ - \psi_{00}^-\psi_{12})\Big]d^3k, \tag{138}$$

где

$$\psi_{mn} \equiv \Psi\,(m + \nu_2,\ n - \nu_1 + \nu_2,\ -ik_0^2/p_0^2)\ (m = 0,\ 1;\ n = 0,\ 1,\ 2)$$

— вырожденные гипергеометрические функции [64], а вероятность вакууму остаться вакуумом

$$|c_v| = \exp\left[-\frac{Vp_0^3}{(2\pi)^3}\frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right],$$

$\zeta(z)$ — дзета-функция Римана [64].

Исследует соотношение (138). Чтобы не выписывать каждый раз вероятность вакууму остаться вакуумом, перейдем к относительным вероятностям.

А. Излучение мягких фотонов. Рассмотрим предельный случай, когда излученные фотоны являются мягкими $k_0^2/p_0^2 \ll 1$, $|\nu_1| \gtrless 1$. Разлагая гипергеометрические функции в ряд при малых значениях аргумента, найдем, что с логарифмической точностью дифференциальная вероятность излучения имеет вид

$$dw = \frac{dW}{|c_v|^2} = \frac{e^2}{p_0^2}\frac{V\nu_1}{(2\pi)^3}\frac{\exp(-i\pi\nu_1)}{\sin\pi\nu_1}(1+\cos^2\theta)\ln^2\left(\frac{k_0^2}{p_0^2}\right)k_0^2\,dk_0\,d\Omega. \tag{139}$$

Здесь θ — угол рассеяния; $\cos\theta = \cos\widehat{(p_1k)}$. Интегрируя по телесному углу $d\Omega$, найдем спектральное распределение относительной вероятности излучения:

$$dw = \frac{e^2}{p_0^2}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{\nu_1\exp(-i\pi\nu_1)}{\sin\pi\nu_1}\frac{16}{3}\ln^2\left(\frac{k_0^2}{p_0^2}\right)k_0\,dk_0. \tag{140}$$

При $k_0 = 0$ вероятность излучения обращается в ноль, рассеяние электрона без излучения невозможно. Инфракрасная расходимость в выражении (140) отсутствует.

Б. Рассмотрим другой предельный случай, когда излученные фотоны являются крайне жесткими: $k_0^2/p_0^2 \gg 1$, $p_1/k_0 \ll 1$. Для оценки гипергеометрических функций воспользуемся методом перевала [65]. В результате получим, что относительная дифференциальная вероятность

$$dw = \frac{e^2}{p_0^2}\frac{V}{(2\pi)^2}\frac{\exp(i\pi\nu_1)}{\operatorname{sh}(-i\pi\nu_1)}\exp\left(-\frac{2\pi k_0^2}{p_0^2} + \frac{4\pi p_1k_0}{p_0^2}\cos\theta\right)k_0\,dk_0\,d\theta\,d\varphi. \tag{141}$$

Максимум излучения приходится на область малых углов. Интегрируя выражение (141) по углам θ и φ, получим

$$dw = \frac{e^2}{p_0^2}\frac{V}{2}\frac{\exp(i\pi\nu)}{\operatorname{sh}(-i\pi\nu_1)}\exp\left(-\frac{2\pi k_0^2}{p_0^2}\right)I_0\left(\frac{4\pi p_1k_0}{p_0^2}\right)k_0\,dk_0, \tag{142}$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [48]. Мы видим, что вероятность излучения жесткого фотона очень быстро убывает с ростом его энергии.

В. Наконец, рассмотрим излучение мягких фотонов нерелятивистским электроном, когда электрон тратит на излучение значительную долю своей энергии: $k_0^2/p_0^2 \sim p_1^2/p_0^2 \ll 1$. В этом случае относительная дифференциальная вероятность имеет вид

$$dw = e^2 \frac{V}{8\pi^4} \frac{p_0^2}{p_1^2} \frac{k_0\, dk_0\, d\Omega}{p_0^2 - 2k_0 p_1 \cos\theta + k_0^2}. \tag{143}$$

Мы видим, что при $\theta = 0$ плотность дифференциальной вероятности становится очень большой и при $k_0 \to p_1$ обращается в бесконечность. Подобного рода расходимость имеет место и в плоском пространстве, например при упругом рассеянии на нулевой угол электронов на ядре (формула Резерфорда). В нашем случае расходимость вероятности (143) обусловлена наличием сингулярности в метрике (130). Если вместо $R^2 = b^2\eta^2$ взять функцию $R^2 = R_0^2 + b^2\eta^2$, то амплитуда процесса при $\theta = 0$ и $k_0 = p_1$ не будет расходиться.

Интегрируя выражение (143) по телесному углу $d\Omega$, найдем, что спектральное распределение относительно вероятности имеет вид

$$dw = e^2 \frac{V}{8\pi^3} \ln \frac{(p_1 + k_0)^2}{(p_1 - k_0)^2} \frac{p_0^2\, dk_0}{p_1^3}. \tag{144}$$

Таким образом, анализ показывает, что в исследуемой модели электрон излучает фотоны главным образом под малыми углами и с энергиями $k_0 \sim p_1$.

Из поведения дифференциальной вероятности излучения при малых (139), (140), (143), (144) и больших (141), (142) энергиях k_0 ясно, что расходимость полной вероятности при интегрировании формулы (139) может быть обусловлена только импульсами $k_0 \sim p_1$. Однако детальный анализ показывает, что соответствующий интеграл в области $k_0 \sim p_1$ сходится в смысле главного значения. Следовательно, полная вероятность процесса всегда конечна. Поэтому сделанный в работе [53] вывод о невозможности расчета процессов в искривленном пространстве-времени по теории возмущений, на наш взгляд, неверен.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Производящий функционал в квантовой теории поля с нестабильным вакуумом

Проблема нахождения уравнений для среднего поля является одной из важнейших в квантовой теории поля. Эта проблема связана с вычислением квантовых поправок к классическим уравнениям движения и весьма актуальна в квантовой гравитации.

В работах [10—13] по квантовой электродинамике с внешним электромагнитным полем или током было установлено, что проблема вычисления среднего электромагнитного поля приобретает ряд новых аспектов, если система характеризуется нестабильным вакуумным состоянием. Дальнейшему исследованию проблемы среднего поля в квантовой электродинамике с внешним полем посвящена работа [71]. В работах [6, 72] рассмотрена проблема вычисления среднего электромагнитного поля в искривленном пространстве-времени. Различные аспекты проблемы нахождения уравнений для среднего поля недавно обсуждались в работах [73—76].

Настоящая работа посвящена общему исследованию проблемы среднего поля в достаточно произвольной бозонной модели квантовой теории поля с нестабильным вакуумом. Вводится производящий функционал среднего поля, строится теория возмущений для его вычисления и дается представление этого производящего функционала с помощью функционального интеграла. Приведены примеры теорий с нестабильным вакуумным состоянием.

Производящий функционал среднего поля. В квантовой теории поля имеется целый ряд моделей, для которых характерно наличие нестабильного вакуумного состояния. При вычислениях физических величин в таких теориях возникают специфические особенности, требующие специального рассмотрения [81].

Нестабильность вакуума в квантовой теории поля означает выполнение следующих условий (в шрёдингеровском представлении):

1) в каждый момент времени t система имеет свое вакуумное состояние $|0\rangle_t$, отличное от вакуумных состояний в другие моменты времени;

2) действие оператора эволюции на вакуумное состояние не приводит снова к вакуумному состоянию. Более точно:

$$U(t_2, t_1)\,|0\rangle_{t_1} \neq e^{i\alpha}\,|0\rangle_{t_1},\quad U(t_2, t_1)\,|0\rangle_{t_1} \neq e^{i\beta}\,|0\rangle_{t_1},$$

α, β — вещественные числа.

Мы не будем здесь обсуждать причины, по которым в квантовой теории поля возникает нестабильное вакуумное состояние. Эти причины обусловлены спецификой конкретных теорий. В последних разделах статьи приведены примеры теорий, в которых явно указан механизм, ведущий к нестабильности вакуума. Представим $U(t_2, t_1) = U_0(t_2, t_1)\,S(t_2, t_1)$ и перейдем к представлению взаимодействия. Конкретный вид оператора свободной эволюции $U_0(t_2, t_1)$ и оператора $S(t_2, t_1)$ определяется спецификой теории. Далее все операторы и состояния (в том числе вакуумное состояние) взяты в представлении взаимодействия, если это не оговорено особо. Введем обозначение для векторов состояния в представлении взаимодействия $|\Psi, t_2\rangle_{t_1} \equiv U_0(t_2, t_1)\,|\Psi\rangle_{t_1}$. В частности, вакуумное состояние в представлении взаимодействия будет $|0, t_2\rangle_{t_1}$.

Физические величины, вычисляемые в квантовой теории поля, можно разбить на два типа: а) амплитуды процессов; б) средние значения.

Рассмотрим подробнее структуру амплитуд и средних значений в квантовой теории поля с нестабильным вакуумом. Амплитуды квантовых процессов даются матричными элементами вида

$$_{t_{out}}\langle t_{in}, \Psi_2\,|\,S(t_{out}, t_{in})\,|\,\Psi_1\rangle_{t_{in}}. \qquad (\text{П.1})$$

Здесь $|\Psi_1\rangle_{t_{in}}$ — начальное состояние системы; $|\Psi_2\rangle_{t_{out}}$ — конечное состояние системы. Предположим, как обычно, что при $t_{in} \to -\infty$, $t_{out} \to \infty$ взаимодействие полей эффективно выключается. Тогда матричный элемент (П.1) сводится к выражению

$$\begin{aligned}&_{out}\langle 0, t_{in}\,|\,F_2[\varphi(t_{out})]\,S(t_{out}, t_{in})\,F_1[\varphi(t_{in})]\,|0\rangle_{in} = \\ &= {}_{out}\langle 0, t_{in}\,|\,T(F_2[[\varphi(t_{out})]\,S(t_{out}, t_{in})\,F_1[\varphi(t_{in})]])\,|0\rangle_{in},\end{aligned} \qquad (\text{П.2})$$

где $|0\rangle_{in} \equiv |0\rangle_{t_{in}}$; $|0\rangle_{out} \equiv |0\rangle_{t_{out}}$; $F[\varphi(t)]$ — условно обозначенное произведение некоторого числа полевых операторов, взятых в момент времени t; φ — набор всех полей теории. Соотношение (П.2) показывает, что для расчета амплитуд (П.1) удобно ввести производящий функционал

$$Z(J) = {}_{out}\Big\langle 0, t_{in}\,\Big|\,T\Big(\exp\Big\{i\int d^4x\,\varphi(x)\,J(x)\Big\}\,S(t_{out}, t_{in})\Big)\,\Big|0\Big\rangle_{in}. \qquad (\text{П.3})$$

В этом выражении $J(x)$ — набор всех источников, отвечающих набору полей $\varphi(x)$. Производящий функционал (П.3), по существу, является обычно используемым в квантовой теории поля производящим функционалом.

Средние значения по начальному состоянию записываются в форме

$$\langle A(t)\rangle_{in} = {}_{t_{in}}\langle\Psi\,|\,A(t)\,|\,\Psi\rangle_t. \qquad (\text{П.4})$$

где $A(t)$ — оператор в гейзенберговском представлении. Переходя к представлению взаимодействия, получим ${}_{t_{\rm in}}\langle\Psi\mid S^{-1}(t, t_{\rm in})\,A_0(t)\,S(t, t_{\rm in})\mid\Psi\rangle_{t_{\rm in}}$. Это выражение сводится к вакуумному среднему вида

$$ {}_{\rm in}\langle 0\,|\,F[\varphi(t_{\rm in})]\,S^{-1}(t_{\rm out}, t_{\rm in})\,T\{A_0(t)\,F[\varphi(t_{\rm in})]\,S(t_{\rm out}, t_{\rm in})\}\,|\,0\rangle_{\rm in}. \qquad (\text{П.5}) $$

Члены, стоящие по знаком T-произведения в соотношении (П.5), можно получить, дифференцируя по источнику выражение $T\exp\{i\int d^4x\varphi(x)J(x)\}$ нужное число раз. Однако члены, стоящие вне T-произведения, таким путем получить невозможно. Поэтому задача вычисления средних значений (П.4) требует введения производящего функционала более общего вида, чем производящий функционал (П.3). Такой производящий функционал был введен для целей квантовой электродинамики с внешним электромагнитным полем в работах [10—13]. Он зависит от удвоенного числа источников и имеет вид [4]:

$$ Z(J_1, J_2) = {}_{\rm in}\Big\langle 0\Big|\exp\Big\{-i\int d^4x\varphi(x)J_2(x)\Big\}\,T_{\exp}\Big\{i\int d^4x\varphi(x)J_1(x)\Big\}\Big|\,0\Big\rangle_{\rm in}. \qquad (\text{П.6}) $$

Здесь символ T при действии направо означает хронологическое упорядочение, а при действии налево — антихронологическое. Поля $\varphi(x)$ взяты в гейзенберговском представлении.

Производящий функционал (П.6) непосредственно связан с проблемой вычисления среднего поля

$$ \langle\varphi(x)\rangle_{\rm in} = {}_{t_{\rm in}}\langle\Psi\mid\varphi(x)\mid\Psi\rangle_{t_{\rm in}} $$

и поэтому может быть назван производящим функционалом среднего поля.

Дифференцируя функционал (П.6) по источникам, получим набор матричных функций Грина [5] гейзенберговских операторов:

$$ G_{nn'}(x, x') = {}_{\rm in}\langle 0\mid\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\,T\varphi(x_1')\ldots\varphi(x_{n'}')\mid 0\rangle_{\rm in}, $$

на основе которых можно вычислять средние значения (П.4), используя редукционные формулы, легко выводимые в каждой конкретной теории.

Заметим, что производящий функционал (П.6) возникает и в квантовой теории поля со стабильным вакуумом при вычислении средних значений по многочастичному состоянию. Действительно, согласно общим принципам квантовой теории поля, все состояния, кроме вакуумного и одночастичного, всегда нестабильны. Поэтому, вообще говоря: $S(t_{\rm out}, t_{\rm in})\mid\Psi\rangle_{t_{\rm in}} \neq e^{i\alpha}\mid\Psi\rangle_{t_{\rm in}}$. Следовательно, в соотношении (П.5) мы не можем переставить оператор $S^{-1}(t_{\rm out}, t_{\rm in})$ и операторы $F[\varphi(t_{\rm in})]$ и, значит, для вычисления выражения (П.5) необходимо использовать производящий функционал (П.6).

Производящий функционал среднего поля (П.6) дает возможность получить уравнение для среднего поля со всеми квантовыми поправками. Чтобы показать это, представим

$$ Z(J_1, J_2) = \exp(-iW(J_1, J_2)) $$

и обозначим

$$ \Phi_a(x, J_1, J_2) = \frac{\delta W(J_1, J_2)}{\delta J_a(x)}, \qquad a = 1, 2. \qquad (\text{П.7}) $$

Очевидно, что при $J_1 = J_2 = 0$ выражение (П.7) дает среднее поле $\langle\varphi(x)\rangle_{\rm in} = (-1)^{a-1}\Phi_a(x, 0, 0)$.

Совершим преобразование Лежандра функционала $W(J_1, J_2)$:

---

[4] Производящий функционал, зависящий от двух источников, был введен в статистической механике Швингером [77] и в квантовой теории поля Фрадкиным [36].

[5] Применение матричных функций Грина в статистической механике рассмотрено в работах [78, 79].

$$\Gamma(\Phi_1, \Phi_2) = W(J_1, J_2) - \int d^4x\, [\Phi_1(x, J_1, J_2)\, J_1(x) + \Phi_2(x, J_1, J_2) J_2(x)],$$

где источники J_1, J_2 выражены через поля Φ_1, Φ_2 из уравнений (П.7). Тогда легко показать, что

$$\frac{\delta\Gamma(\Phi_1, \Phi_2)}{\delta\Phi_a(x)} = -J_a(x).$$

Полагая в последнем уравнении $J_1 = J_2 = 0$, мы получим точные уравнения для среднего поля $\langle\varphi(x)\rangle_{\text{in}}$, содержащие в себе все квантовые поправки.

Вычисление производящего функционала по теории возмущений. Рассмотрим вещественное скалярное поле с гамильтонианом

$$H = {}^1/_2\omega\Lambda\omega + V(\omega). \tag{П.8}$$

Здесь $\omega \equiv (\varphi, \pi)$ — набор канонически сопряженных координат и импульсов; $V(\omega)$ — полином степени не ниже третьей по полям ω:

$$\omega\Lambda\omega \equiv \int d^3x d^3y\, \omega(\mathbf{x}, t)\, \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \omega(\mathbf{y}, t),$$

$$[\omega(\mathbf{x}, t), \omega(\mathbf{y}, t)] = -i\varepsilon\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функции Λ, V могут зависеть от внешних полей, внешних источников, различных параметров; явный вид этой зависимости не конкретизируется.

Допустим, что теория с гамильтонианом H (П.8) характеризуется нестабильным вакуумным состоянием. Относительно вакуумного состояния $|0\rangle_{\text{in}}$ и полевых операторов $\omega(x) = \omega(\mathbf{x}, t_{\text{in}})$ предположим, что выполнены следующие свойства:

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega^{(+)}(\mathbf{x}) + \omega^{(-)}(\mathbf{x}) + \omega_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \omega^{(-)}(\mathbf{x})\,|0\rangle_{\text{in}} = 0,$$
$$\omega^{(+)}(\mathbf{x}) = [\omega^{(-)}(\mathbf{x})]^+, \quad \omega_{\text{in}}(\mathbf{x}) = {}_{\text{in}}\langle 0|\,\omega(\mathbf{x})\,|0\rangle_{\text{in}}. \tag{П.9}$$

Видно, что $\omega_{\text{in}}(\mathbf{x})$ представляет собой начальное среднее поле. В некоторых случаях может оказаться, что $\omega_{\text{in}}(\mathbf{x}) = 0$. Свойства (П.9) охватывают достаточно общую ситуацию.

Перейдем к вычислению производящего функционала среднего поля $Z(J_1, J_2)$ (П.6). Для этой цели представим его в форме

$$Z(J_1, J_2) = \exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} dt\omega_{\text{in}}(t)(J_1(t) - J_2(t))\right\} \times$$
$$\times\, {}_{\text{in}}\Big\langle 0\Big|\exp\left\{-i\int\delta\omega(t)\,J_2(t)\,dt\right\} T\exp\left\{i\int\delta\omega(t)\,J_1(t)\,dt\right\}\Big|0\Big\rangle_{\text{in}}. \tag{П.10}$$

Здесь $\delta\omega(t) \equiv \delta\omega(x) = \omega(x) - \omega_{\text{in}}(x)$; $\int\omega(t)\,J(t)\,dt \equiv \int d^4x\omega(x)\,J(x)$; $\omega_{\text{in}}(x)$ — некоторое c-числовое поле. Для удобства мы ввели источники не только к полю $\varphi(x)$, но и к сопряженному импульсу $\pi(x)$. Гамильтониан H запишем в терминах поля $\delta\omega(x)$:

$$H = H_0 + \tilde{V},$$
$$H_0 = {}^1/_2\delta\omega\tilde{\Lambda}(\omega_{\text{in}})\,\delta\omega + \delta\omega\tilde{I}(\omega_{\text{in}}), \quad \tilde{I} = \Lambda + V'(\omega_{\text{in}}),$$
$$\tilde{\Lambda} = \Lambda + V''(\omega_{\text{in}}), \tag{П.11}$$
$$\tilde{V}(\omega_{\text{in}}, \delta\omega) = V(\omega_{\text{in}} + \delta\omega) - V(\omega_{\text{in}}) - \delta\omega V'(\omega_{\text{in}}) - {}^1/_2\delta\omega V''(\omega_{\text{in}})\,\delta\omega.$$

Взаимодействие $\tilde{V}$ содержит степени поля $\delta\omega$ не ниже третьей.

В выражении для производящего функционала (П.10) перейдем к представлению взаимодействия по оператору $\tilde{V}$. Тогда получим

$$Z(J_1, J_2) = \exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} dt\omega_{\text{in}}(t)(J_1(t) - J_2(t))\right\}\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\tilde{V}\left(\omega_{\text{in}}, \frac{\delta}{\delta iJ_1}\right)\right\} \times$$
$$\times\exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} dt\tilde{V}\left(\omega_{\text{in}}, \frac{\delta}{\delta iJ_2}\right)\right\} Z_0(J_1, J_2), \tag{П.12}$$

где

$$Z_0(J_1, J_2) = {}_{\text{in}}\langle 0 | \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\omega_0(t) J_2(t)\right\} T \exp\left\{i \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta\omega_0(t) J_1(t)\right\} | 0\rangle_{\text{in}}. \tag{П.13}$$

Здесь $\delta\omega_0(t)$ — поле в представлении взаимодействия, удовлетворяющее уравнению движения

$$(\varepsilon\partial_t + \widetilde{\Lambda}(\omega_{\text{in}}))\, \delta\omega_0(t) = 0. \tag{П.14}$$

Поле $\omega_{\text{in}}(x)$ выберем из условия $\langle 0 | \delta\omega_0(x) | 0\rangle_{\text{in}} = 0$. Тогда $\omega_{\text{in}}(x) = {}_{\text{in}}\langle 0 | \omega_0(x) | 0\rangle_{\text{in}}$. Отсюда следует уравнение для среднего поля $\omega_{\text{in}}(x)$:

$$(\varepsilon\partial_t + \Lambda)\, \omega_{\text{in}}(t) + V'(\omega_{\text{in}}(t)) = 0. \tag{П.15}$$

Таким образом, поле $\omega_{\text{in}}(x)$ удовлетворяет классическому уравнению движения, отвечающему теории с гамильтонианом (П.8). При $t = t_{\text{in}}$ из определения $\omega_{\text{in}}(x) = {}_{\text{in}}\langle 0 | \omega_0(x) | 0\rangle_{\text{in}}$ в соответствии с равенствами (П.9) имеем $\omega_{\text{in}}(\mathbf{x}, t_{\text{in}}) = \omega_{\text{in}}(\mathbf{x})$. Следовательно, $\omega_{\text{in}}(x)$ — решение классических уравнений движения с начальными условиями $\omega(\mathbf{x}, t_{\text{in}}) = {}_{\text{in}}\langle 0 | \omega(\mathbf{x}) | 0\rangle_{\text{in}}$. Производящий функционал $Z_0(J_1, J_2)$ (П.12), относящийся к теории с гамильтонианом H_0 (П.11), может быть вычислен явно и имеет вид

$$\begin{gathered} Z_0(I_1, J_2) = \exp\left\{-\frac{i}{2} JDJ\right\}, \\ J \equiv (J_1, J_2),\ JDJ \equiv \int d^4x d^4y J(x) D(x, y) J(y), \\ D = \begin{pmatrix} D^c & D^{(+)} \\ -D^{(-)} & D^{\bar{c}} \end{pmatrix}, \\ D^c(x, y) = -i_{\text{in}} \langle 0 | T\delta\omega_0(x)\, \delta\omega_0(y) | 0\rangle_{\text{in}},\quad D^{(+)}(x, y) = \\ = i_{\text{in}} \langle 0 | \delta\omega_0(y)\, \delta\omega_0(x) | 0\rangle_{\text{in}}, \\ D^{\bar{c}}(x, y) = -i_{\text{in}} \langle 0 | \delta\omega_0(x)\, \delta\omega_0(y)\, T | 0\rangle_{\text{in}}, \\ D^{(-)}(x, y) = -i\, {}_{\text{in}}\langle 0 | \delta\omega_0(x)\, \delta\omega_0(y) | 0\rangle_{\text{in}}. \end{gathered} \tag{П.16}$$

Возникшие здесь функции D^c, $D^{\bar{c}}$, $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ удовлетворяют уравнениям которые можно записать в форме

$$FD = 1,\ F = \begin{pmatrix} -\Lambda^H & 0 \\ 0 & \Lambda^H \end{pmatrix},\ \Lambda^H = \varepsilon\partial_t + \widetilde{\Lambda}(\omega_{\text{in}}). \tag{П.17}$$

Соотношения (П.12) (П.16) позволяют развить теорию возмущений для вычисления производящего функционала среднего поля (П.6). Ряд теории возмущений получается, если в выражении (П.12) произвести разложение по степеням взаимодействия.

Представление производящего функционала среднего поля с помощью континуального интеграла. Представление производящего функционала с помощью континуального интеграла очень полезно для решения различных проблем квантовой теории поля. Покажем, что производящий функционал (П.6), (П.12) может быть выражен через континуальный интеграл некоторого вида [13, 71].

Запишем выражение для производящего функционала

$Z(J_1, J_2)$ (П.11), (П.15) в форме

$$\begin{gathered} Z(J_1, J_2) = \exp\{i\omega_{\text{in}}(J_1 - J_2)\} \exp\left\{-i\bar{V}\left(\omega_{\text{in}}, \frac{\delta}{\delta i J_1}\right)\right\} \times \\ \times \exp\left\{i\bar{V}\left(\omega_{\text{in}}, \frac{\delta}{\delta i J_2}\right)\right\} Z_0(J_1, J_2). \end{gathered} \tag{П.18}$$

Представим производящий функционал Z_0 (П.16) с помощью гауссовского континуального интеграла:

$$Z_0(J_1, J_2) = e^{-\frac{i}{2}JDJ} = \frac{1}{N}\int\limits_{M} d\omega \exp\left\{i\left(\frac{1}{2}\omega D^{-1}\omega + \omega J\right)\right\}. \tag{П.19}$$

Здесь N — нормировочный множитель; $\omega \equiv (\omega_1, \omega_2)$; M — класс функций, по которым ведется интегрирование (область интегрирования). Вопрос об области интегрирования в гауссовских континуальных интегралах рассмотрен в книге [80]. Пусть E — класс функций, которому принадлежат источники J. Класс E составляют функции $\eta \equiv (\eta_1, \eta_2)$, для которых выполняется

$$\int d^4x d^4y \eta(x) D(x, y) \eta(y) < \infty.$$

Тогда область интегрирования M в интеграле (П.19) включает все функции ω, имеющие вид

$$\omega = D\eta, \quad \eta \in E,$$

или подробнее:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= D^c\eta_1 + D^{(+)}\eta_2, \\ \omega_2 &= -D^{(-)}\eta_1 + D^{\bar c}\eta_2. \end{aligned} \tag{П.20}$$

В континуальном интеграле (П.19) совершим замену переменных $\omega_2 \to -\omega_2$, а затем подставим получившийся интеграл в равенство (П.18). Тогда получим

$$\begin{aligned} Z(J_1, J_2) = \frac{1}{N}\int\limits_{M} d\omega_1\, d\omega_2 \exp\{i\{[\omega_1\varepsilon\partial_t\omega_1 - \omega_1\widetilde{\Lambda}\omega_1 - \tilde{V}(\omega_{\text{in}}, \omega_1) + \\ + (\omega_1 + \omega_{\text{in}}) J_1] - [\omega_2\varepsilon\partial_t\omega_2 - \omega_2\widetilde{\Lambda}\omega_2 - \tilde{V}(\omega_{\text{in}}, \omega_2) + (\omega_2 + \omega_{\text{in}}) J_2]\}\}, \end{aligned} \tag{П.21}$$

где

$$M\colon\ \omega_1 = D^c\eta_1 + D^{(+)}\eta_2, \quad \omega_2 = D^{(-)}\eta_1 - D^{\bar c}\eta_2. \tag{П.22}$$

В континуальном интеграле (П.21) совершим замену переменных $\omega_1 + \omega_{\text{in}} \to \omega_1$, $\omega_2 + \omega_{\text{in}} \to \omega_2$ и учтем, что поле ω_{in} удовлетворяет классическому уравнению движения (П.15). В результате будем иметь

$$Z(J_1, J_2) = \frac{1}{N}\int\limits_{M} d\omega_1\, d\omega_2 \exp\{i[S(\omega_1) + \omega_1 J_1 - S(\omega_2) - \omega_2 J_2]\}, \tag{П.23}$$

где $S(\omega) = \omega\varepsilon\partial_t\omega - H(\omega)$ — действие в гамильтоновской форме, а область интегрирования задается условиями

$$\text{M}\colon\ \omega_1 = D^c\eta_1 + D^{(+)}\eta_2 + \omega_{\text{in}}, \quad \omega_2 = D^{(-)}\eta_1 - D^{\bar c}\eta_2 + \omega_{\text{in}}. \tag{П.24}$$

Выражение (П.23) в принципе может рассматриваться как окончательное. Однако оно имеет существенный недостаток, поскольку интегрирования по переменным ω_1, ω_2 не являются независимыми. Действительно, из соотношений (П.24), (П.17) следует

$$\eta_1 = -\Lambda^H(\omega_1 - \omega_{\text{in}}), \quad \eta_2 = -\Lambda^H(\omega_2 - \omega_{\text{in}}).$$

Подставляя эти равенства в условия (П.24), получим уравнения связей на функции ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} (1 + D^c\Lambda^H)(\omega_1 - \omega_{\text{in}}) + D^{(+)}\Lambda^H(\omega_2 - \omega_{\text{in}}) &= 0, \\ (1 - D^{\bar c}\Lambda^H)(\omega_2 - \omega_{\text{in}}) + D^{(-)}\Lambda^H(\omega_1 - \omega_{\text{in}}) &= 0. \end{aligned} \tag{П.25}$$

Уравнения (П.25) явно показывают, что интегрирования по переменным ω_1, ω_2 не независимы.

На наш взгляд, более полезной является запись континуального интеграла в форме, где интегрирование ведется по независимым полям. Для этой цели совершим замену переменных

$$\omega = Q\omega' + \omega_{\text{in}},$$
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & D^{(+)}\Lambda^H \\ -D^{(-)}\Lambda^H & -1 \end{pmatrix}. \tag{П.26}$$

Тогда область интегрирования по переменным ω_1', ω_2' задается условиями

$$\omega_1' = D^c\eta_1, \quad \omega_2' = D^{\bar{c}}\eta_2.$$

Якобиан преобразования (П.26) от переменных интегрирования не зависит и может быть включен в нормировочный множитель N. При этом выражение для производящего функционала принимает вид ($\omega' \equiv \omega$):

$$Z(J_1, J_2) = \frac{1}{N}\int d\omega_1\, d\omega_2 \exp\{i[S(\omega_1 + D^{(+)}\Lambda^H\omega_2 + \omega_{\text{in}}) + (\omega_1 + D^{(+)}\Lambda^H\omega_2 + \omega_{\text{in}})J_1 - S(-\omega_2 - D^{(-)}\Lambda^H\omega_1 + \omega_{\text{in}}) - (-\psi_2 - D^{(-)}\Lambda^H\omega_1 + \omega_{\text{in}})J_2]\}. \tag{П.27}$$

Равенство (П.27) является окончательным выражением производящего функционала среднего поля через континуальный интеграл. Интегрирование по переменным ω_1, ω_2 производится независимо.

Представление производящего функционала (П.27) показывает, что вся «память» о начальном вакуумном состоянии оказалась заключенной в функциях $D^{(\pm)}$, D^c, $D^{\bar{c}}$.

Скалярное поле с внешним источником. В качестве примера теории поля, в которой возникает нестабильное вакуумное состояние, рассмотрим скалярное поле, взаимодействующее с внешним нестационарным источником. Гамильтониан модели имеет вид

$$H = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}[\pi^2(x) + (\partial_i\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x)] + \lambda\varphi^4(x) + I(x)\varphi(x)\right\}. \tag{П.28}$$

Здесь $I(\mathbf{x}, t)$ — внешний c-числовой источник. Предположим, что задача рассеяния для системы с гамильтонианом (П.28) ставится так, что при $t_{\text{in}} \to -\infty$, $t_{\text{out}} \to \infty$ взаимодействие с источником в отличие от самодействия не выключается. По этой причине система характеризуется ненулевыми средними значениями полей.

Определим вакуум в момент времени t_{in} (t_{out}) как состояние, сообщающее минимум среднему значению гамильтониана при условии, что средние значения $\varphi(x)$, $\pi(x)$ фиксированы. Таким образом:

$$_{\text{in}}\langle 0 \mid H(t) \mid 0\rangle_{\text{in}} - \min, \quad _{\text{in}}\langle 0 \mid \omega(x) \mid 0\rangle_{\text{in}} = \omega_{\text{in}}(x), \quad t = t_{\text{in}}. \tag{П.29}$$

Задача (П.29) представляет собой задачу на условный экстремум и может быть решена обычным образом с использованием множителей Лагранжа [12]. Представим

$$\omega(\mathbf{x}, t_{\text{in}}) = \sum_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, a_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})\, a_{\mathbf{k}}^+),$$

где $a_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k}}^+$ — бозе-операторы уничтожения и рождения. Тогда, как обычно:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}},$$

$$(\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}'}) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}'}^*) = 0, \quad (\omega_1, \omega_2) = i\int d^3x\, \omega_1(\mathbf{x}) \underset{\sim}{\varepsilon}\, \omega_2(\mathbf{x}).$$

Для решения задачи на условный экстремум введем гамильтониан

$$H' = H_0 + \sum_{\mathbf{k}} (z_{\mathbf{k}}^*(\mathrm{in})\, a_{\mathbf{k}} + z_{\mathbf{k}}(\mathrm{in})\, a_{\mathbf{k}}^+).$$

Здесь функции $z_{\mathbf{k}}^*(\mathrm{in})$, $z_{\mathbf{k}}(\mathrm{in})$ играют роль множителей Лагранжа. Уравнение для определения вакуума $|0\rangle_{\mathrm{in}}$ записывается в форме

$$_{\mathrm{in}}\langle 0 \mid H_0' \mid 0\rangle_{\mathrm{in}} - \min. \tag{П.30}$$

Введем операторы $a_{\mathbf{k}}(\mathrm{in})$, $a_{\mathbf{k}}^+(\mathrm{in})$, диагонализующие гамильтониан H_0',

$$a_{\mathbf{k}}(\mathrm{in}) = a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} z_{\mathbf{k}}(\mathrm{in}), \quad a_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathrm{in}) = a_{\mathbf{k}}^+ + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} z_{\mathbf{k}}^*(\mathrm{in}). \tag{П.31}$$

Тогда уравнение (П.30) примет вид

$$_{\mathrm{in}}\langle 0 | \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+(\mathrm{in})\, a_{\mathbf{k}}(\mathrm{in}) | 0\rangle_{\mathrm{in}} - \sum_{\mathbf{k}} \frac{|z_{\mathbf{k}}(\mathrm{in})|^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} - \min.$$

Отсюда следует, что $|0\rangle_{\mathrm{in}}$ есть решение уравнений:

$$a_{\mathbf{k}}(\mathrm{in})\, |0\rangle_{\mathrm{in}} = 0.$$

Равенства (П.30) позволяют записать

$$a_{\mathbf{k}}(\mathrm{in}) = D(z(\mathrm{in}))\, a_{\mathbf{k}} D^{-1}(z(\mathrm{in})), \quad a_{\mathbf{k}}^+(\mathrm{in}) = D(z(\mathrm{in}))\, a_{\mathbf{k}}^+ D^{-1}(z(\mathrm{in})),$$

где $D(z)$ — оператор образования когерентного состояния:

$$D(z) = \exp \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} (z_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} - z_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+).$$

Тогда

$$|0\rangle_{\mathrm{in}} = D(z(\mathrm{in}))\, |0\rangle, \quad a_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0.$$

Таким образом, вакуумное состояние $|0\rangle_{\mathrm{in}}$ в рассматриваемой модели является когерентным состоянием, параметры которого $z_{\mathbf{k}}(\mathrm{in})$, $z_{\mathbf{k}}^*(\mathrm{in})$ определяются из условия

$$_{\mathrm{in}}\langle 0 | \omega(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}}) | 0\rangle_{\mathrm{in}} = \omega_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}}),$$

ведущего к равенствам

$$z_{\mathbf{k}}(\mathrm{in}) = -\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathrm{in}}), \quad z_{\mathbf{k}}^*(\mathrm{in}) = -\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathrm{in}}, \omega_{\mathbf{k}}).$$

Аналогичное рассмотрение, относящееся к моменту времени t_{out} дает возможность построить вакуумное состояние $|0\rangle_{\mathrm{out}}$. Рассмотрим вероятность вакууму остаться вакуумом в отсутствии взаимодействия. Эта вероятность легко вычисляется:

$$p_v = |_{\mathrm{out}}\langle 0, t_{\mathrm{in}} | 0\rangle_{\mathrm{in}}|^2 = \exp\left\{-\sum_{\mathbf{k}} |z_{\mathbf{k}}(\mathrm{out})\, e^{i\varepsilon_{\mathbf{k}} t_{\mathrm{out}}} - z_{\mathbf{k}}(\mathrm{in})\, e^{i\varepsilon_{\mathbf{k}} t_{\mathrm{in}}}|^2\right\} < 1.$$

Отсюда видно, что $|0\rangle_{\mathrm{out}} \neq e^{i\alpha} |0\rangle_{\mathrm{in}}$. Тогда

$$S(t_{\mathrm{out}}, t_{\mathrm{in}}) | 0\rangle_{\mathrm{in}} \neq e^{i\alpha} | 0\rangle_{\mathrm{in}}, \quad S(t_{\mathrm{out}}, t_{\mathrm{in}}) | 0\rangle_{\mathrm{in}} \neq e^{i\beta} | 0\rangle_{\mathrm{out}}.$$

Рассматриваемая модель представляет собой пример теории с нестабильным вакуумом. Из соотношений (П.31) следует, что

$$\omega(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}}) = \omega^{(+)}(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}}) + \omega^{(-)}(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}}) + \omega_{\mathrm{in}}(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}}),$$

где

$$\omega^{(-)}(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}}) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}(x)\, a_{\mathbf{k}}(\mathrm{in}), \quad \omega^+(x, t_{\mathrm{in}}) = [\omega^{(-)}(\mathbf{x}, t_{\mathrm{in}})]^+,$$

т. е. представление (П.9) в данной модели имеет место.

Квантовая электродинамика с внешним электромагнитным полем. Гамильтониан модели имеет вид

$$H = H_e + H_{ph} + V,$$

$$H_e = \int d^3x \overline{\psi}(x) [-i\gamma\nabla + e\gamma^\mu A_\mu^{\text{ext}}(x) + m] \psi(x),$$

$$H_{ph} = -\sum_{\mathbf{k}, \lambda} g_{\lambda\lambda} \mathbf{k} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda},$$

$$V = \int d^3x j^\mu(x) A_\mu(x), \quad j^\mu(x) = \frac{e}{2} [\overline{\psi}(x) \gamma^\mu, \psi(x)].$$

Здесь $A_\mu^{\text{ext}}(x)$ — потенциал внешнего электромагнитного поля. Предположим, что при $t_{\text{in}} \to -\infty$, $t_{\text{out}} \to \infty$ радиационное взаимодействие V исчезает, на внешнее поле $A_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t)$ не включается. Определим вакуумное состояние системы в моменты времени t_{in}, t_{out} как состояния, сообщающие минимум гамильтониану в эти моменты времени [10—13]:

$$_{\text{in}}\langle 0 \mid H \mid 0\rangle_{\text{in}} - \min, \quad t = i_{\text{in}},$$

$$_{\text{out}}\langle 0 \mid H \mid 0\rangle_{\text{out}} - \min, \quad t = t_{\text{out}}.$$

В силу того что взаимодействие V выключено $(\mid 0\rangle_{\text{in}} = \mid 0\rangle_{\text{in}}^e \mid 0\rangle_{\text{in}}^{ph}$ $\mid 0\rangle_{\text{out}} = \mid 0\rangle_{\text{out}}^e \mid 0\rangle_{\text{out}}^{ph})$, вакуумные состояния электромагнитного поля в рассматриваемой теории не требуют специального рассмотрения:

$$\mid 0\rangle_{\text{out}}^{ph} = \mid 0\rangle_{\text{out}}^{ph} = \mid 0\rangle^{ph}, \quad c_{\mathbf{k}\lambda} \mid 0\rangle^{ph} = 0.$$

Вакуумные состояния спинорного поля $\mid 0\rangle_{\text{in}}^e$, $\mid 0\rangle_{\text{out}}^{ph}$ должны определяться из уравнений

$$\begin{aligned} &{}_{\text{in}}^{e}\langle 0 \mid H_e(t_{\text{in}}) \mid 0\rangle_{\text{in}}^e - \min, \\ &{}_{\text{out}}^{e}\langle 0 \mid H_e(t_{\text{out}}) \mid 0\rangle_{\text{out}}^e - \min. \end{aligned} \tag{П.32}$$

Для решения задачи (П.31) достаточно решить задачи на собственные значения для одночастичного дираковского гамильтониана

$$\mathcal{H}_D(t_{\text{in}})_\pm \varphi_n(x) = {}_\pm\varepsilon_n {}_\pm\varphi_n(x), \; {}_\pm\varepsilon_n \gtrless 0,$$

$$\mathcal{H}_D(t_{\text{out}})^\pm \varphi_m(x) = {}^\pm\varepsilon_m {}^\pm\varphi_m(x), \; {}^\pm\varepsilon_m \gtrless 0,$$

$$\mathcal{H}_D(t) = \gamma^0(-i\gamma\nabla + e\gamma^\mu A_\mu^{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) + m).$$

Спиноры ${}_\pm\varphi_n$, ${}^\pm\varphi_m$ образуют полные, ортонормированные наборы, поэтому полевые операторы спинорного поля можно записать в форме

$$\psi(\mathbf{x}, t_{\text{in}}) = \sum_n \{a_n(\text{in})\, {}_+\varphi_n(\mathbf{x}) + b_n^+(\text{in})\, {}_-\varphi_n(\mathbf{x})\},$$

$$\overline{\psi}(\mathbf{x}, t_{\text{in}}) = \sum_n \{a_n^+(\text{in})\, {}_+\overline{\varphi}_n(\mathbf{x}) + b_n(\text{in})\, {}_-\overline{\varphi}_n(\mathbf{x})\},$$

$$\psi(\mathbf{x}, t_{\text{out}}) = \sum_m \{a_m(\text{out})\, {}^+\varphi_m(\mathbf{x}) + b_m^+(\text{out})\, {}^-\varphi_m(\mathbf{x})\},$$

$$\overline{\psi}(\mathbf{x}, t_{\text{out}}) = \sum_m \{a_m^+(\text{out})\, {}^+\varphi_m(\mathbf{x}) + b_m(\text{out})\, {}^-\overline{\varphi}_m(\mathbf{x})\}.$$

Операторы $\{a(\text{in}), a^+(\text{in}), b(\text{in}), b^+(\text{in})\}$ и $\{a(\text{out}), a^+(\text{out}), b(\text{out}), b^+(\text{out})\}$ являются ферми-операторами рождения и уничтожения. При этом гамильтониан H_e диагонализуется:

$$H_e(t_{\text{in}}) = \sum_n \{{}_+\varepsilon_n a_n^+(\text{in}) a_n(\text{in}) - {}_-\varepsilon_n b_n^+(\text{in}) b_n(\text{in})\},$$

$$H_e(t_{\text{out}}) = \sum_m \{{}^+\varepsilon_m a_m^+(\text{out}) a_m(\text{out}) - {}^-\varepsilon_m b_m^+(\text{out}) b_m(\text{out})\}.$$

Вакуумные векторы $\mid 0\rangle_{\text{in}}^e$, $\mid 0\rangle_{\text{out}}^e$ удовлетворяют уравнениям

$$a_n(\text{in}) \mid 0\rangle_{\text{in}}^e = b_n(\text{in}) \mid 0\rangle_{\text{in}}^e = 0, \quad a_m(\text{out}) \mid 0\rangle_{\text{out}}^e = b_m(\text{out}) \mid 0\rangle_{\text{out}}^e = 0. \tag{П.33}$$

Условия разрешимости уравнений (П.33) детально обсуждались в работе [9]. Критерием нестабильности вакуума может служить вероятность вакууму остаться вакуумом: $p_v = |_{\text{out}}\langle 0, t_{\text{in}} \mid S(t_{\text{out}}, t_{\text{in}}) \mid 0\rangle_{\text{in}}|^2$. Если $p_v < 1$, то это указывает на наличие нестабильного вакуумного состояния. В теориях с внешним полем условие $p_v < 1$ может выполняться уже в нулевом порядке по радиационному взаимодействию. Расчеты показывают, например, что в постоянном магнитном поле и поле плоской электромагнитной волны вакуум стабилен, в то время как в постоянном электрическом поле вакуум нестабилен даже в отсутствии радиационного взаимодействия.

Скалярное поле в искривленном пространстве-времени. Рассмотрим теорию скалярного поля с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left\{ \frac{\pi^2(x)}{\sqrt{-g}\, g^{00}} - 2\frac{g^{0j}}{g^{00}}\pi(x)\,\partial_j\varphi(x) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{-g}\left[\left(\frac{g^{0i}g^{0j}}{g^{00}} - g^{ij}\right)\partial_i\varphi\partial_j\varphi + (m^2 - \xi R)\,\varphi^2(x) + \lambda\varphi^4(x)\right]\right\}. \qquad (\text{П.34})$$

Здесь $g^{\mu\nu}(x)$ — контравариантные компоненты матричного тензора, описывающего внешнее гравитационное поле. Предположим, что t — глобальная временна́я координата. Допустим, что при $t_{\text{in}} \to -\infty$, $t_{\text{out}} \to \infty$ самодействие исчезает, но гравитационное поле не выключается. Определим вакуумные состояния системы $|0\rangle_{\text{in}}$, $|0\rangle_{\text{out}}$ в моменты времени t_{in}, t_{out} как состояния, сообщающие минимум гамильтониану (П.34) [23]:

$${}_{\text{in}}\langle 0 \mid H(t_{\text{in}}) \mid 0\rangle_{\text{out}} - \min, \quad {}_{\text{out}}\langle 0 \mid H(t_{\text{out}}) \mid 0\rangle_{\text{out}} - \min. \qquad (\text{П.35})$$

Гамильтониан (П.34) без взаимодействия можно представить в виде

$$H_0 = \frac{i}{2}\int d^3x\,\omega(x)\,\varepsilon\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)\,\omega(x),$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} i\partial_j\sqrt{-g}\left(\frac{g^{0j}g^{0k}}{g^{00}} - g^{jk}\right)\partial_k - i(m^2 - \xi R) & -\frac{i}{2}\left(\partial_j\frac{g^{0j}}{g^{00}}\right) - i\frac{g^{0j}}{g^{00}}\partial_j \\ i\frac{g^{0j}}{g^{00}}\partial_j - \frac{i}{2}\left(\partial_j\frac{g^{0j}}{g^{00}}\right) & -\frac{i}{\sqrt{-g}\,g^{00}} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.36})$$

Оператор $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$ играет роль одночастичного гамильтониана. Для решения задачи (П.35) достаточно решить задачу на собственные значения для одночастичного гамильтониана $\mathcal{H}$ (П.35)

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t_{\text{in}})\,\omega_n(\mathbf{x}) = \varepsilon_n\omega_n(\mathbf{x}), \quad \varepsilon_n > 0,$$
$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t_{\text{out}})\,\omega_m(\mathbf{x}) = \varepsilon_m\omega_m(\mathbf{x}), \quad \varepsilon_m > 0.$$

Функции $\omega_n(\mathbf{x})$, $\omega_m(\mathbf{x})$ образуют полные ортонормированные наборы, что позволяет записать для полевых операторов разложения

$$\omega(\mathbf{x}, t_{\text{in}}) = \sum_n \left(a_n(\text{in})\,\omega_n(\mathbf{x}) + a_n^+(\text{in})\,\omega_n^*(\mathbf{x})\right),$$
$$\omega(\mathbf{x}, t_{\text{out}}) = \sum_m \left(a_m(\text{out})\,\omega_m(\mathbf{x}) + a_m^+(\text{out})\,\omega_m^*(\mathbf{x})\right).$$

Операторы $\{a(\text{in}),\ a^+(\text{in})\}$, $\{a(\text{out}),\ a^+(\text{out})\}$ являются бозе-операторами уничтожения и рождения. Гамильтониан (П.34) диагонализуется:

$$H(t_{\text{in}}) = \sum_n \varepsilon_n a_n^+(\text{in})\,a_n(\text{in}),$$
$$H(t_{\text{out}}) = \sum_m \varepsilon_m a_m^+(\text{out})\,a_m(\text{out}),$$

а вакуумные векторы $|0\rangle_{\text{in}}$, $|0\rangle_{\text{out}}$ находятся из уравнений

$$a_n(\text{in}) \mid 0\rangle_{\text{in}} = 0, \quad a_m(\text{out}) \mid 0\rangle_{\text{out}} = 0. \qquad (\text{П.37})$$

Здесь также можно использовать критерий неустойчивости вакуума $p_v < 1$. В отсутствии взаимодействия это сводится к условию $\det w\ (m \mid n) < 1$, где $w\ (w \mid n)$ — амплитуда рассеяния во внешнем гравитационном поле.

Заметим, что в теориях с внешним гравитационным полем используются и другие определения вакуумного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Witt B. S.* Quantum field theory in curved space-time // Phys. Rep. 1975. Vol. 19. P. 295—357.
2. *Parker L.* The production of elementary particles by strong gravitational field // Proc. symp. on asymp. prop. space-time. N. Y.: Plenum press, 1976. P. 127—235.
3. *Parker L.* Aspects of quantum field theory in curved space-time: Effective action and energy momentum tensor // Proceedings advances study institue. Gravitation. N. Y.: Plenum press, 1978. P. 1—52.
4. *Buchbinder I. L., Fradkin E. S., Gitman D. M.* Quantum electrodynamics in curved space-time // Fortschr. Phys. 1981. Bd. 29. S. 187—218.
5. *De Witt B. S.* The space-time approach to quantum field theory // Relativity, groups and topology / Ed. B. S. de Witt, R. Stora. Amsterdam: North-Holland, 1984. Pt. 2. P. 383—738.
6. *Buchbinder I. L.* Renormalization of quantum field theory in curved space-time and renormalization group equations // Fortschr. Phys. 1986. Bd. 34. S. 605—628.
7. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980. 296 с.
8. *Биррелл Н., Девис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984. 356 с.
9. *Gitman D. M.* Processes of orbitry order in quantum electrodynamics with a pair-creating external field // J. Phys. A. 1977. Vol. 10. P. 2007—2020.
10. *Fradkin E. S., Gitman D. M.* Quantum electrodynamics with intense external field. Cambridge (Mass.), 1978. 58 p. (Prepr. / MIT; N HUTMP-77).
Fradkin E. S., Gitman D. M. Problems of quantum electrodynamics with intensive field. Moscow, 1979. 62 p. (Prepr. / PhIAH; N 106).
11. *Fradkin E. S., Gitman D. M.* Problems of quantum electrodynamics with intense field: (App.). Moscow, 1979. 40 p. (Prepr. / PhIAH; N 107).
12. *Fradkin E. S., Gitman D. M.* Problems of quantum electrodynamics with external field creating pairs. Budapest, 1979. 105 p. (Prepr. / Centr. Res. Inst. Phys.; N KFKI-1979-83).
13. *Fradkin E. S., Gitman D. M.* Furry picture for quantum electrodynamics with pair-creating external field // Fortschr. Phys. 1981. Bd. 29. S. 381—411.
14. *De Witt B. S.* Dynamical theory of groups and firlds. N. Y.: Gordon and Preach, 1965. 245 p.
15. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977. 431 с.
16. *Hawking S. W.* Particle creation by black holes // Commun. Math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199—220.
17. *Волович И. В., Загребнов В. А., Фролов В. П.* Квантовая теория поля в асимптотически плоском пространстве-времени // Элементарные частицы и атомное ядро. 1978. Т. 9. С. 147—208.
18. *Parker L.* Quantized fields and particle creation in expanding universes. 1 // Phys. Rev. 1969. Vol. 183. P. 1057—1068.
19. *Chitre D. H., Hartle L. B.* Path-integral quantization and cosmological. particle production: An example // Phys. Rev. D — Pat. and Fields. 1977. Vol. 16. P. 251—260.
20. *Rumpf H.* Covariant description of particle creation in curved spaces // Nuovo cim. B 1976. Vol. 35. P. 321—332.
21. *Candelas P., Raine D. Y.* Feynman propagator in curved space-time // Phys. Rev. D — Part. and Fields. 1977. Vol. 15. P. 1494—1500.
22. *Менский М. Б.* Фейнмановское квантование и S-матрица для спиновых частиц в римановом пространстве-времени / ТМФ. 1974. Т. 18. С. 180—202.
23. *Бухбиндер И. Л., Гитман Д. М.* Об определении вакуума в искривленном пространстве-времени // Изв. вузов. Физика. 1979. № 7. С. 16—21.
24. *Карманов О. Ю., Менский М. Б.* Пропагаторы и рождение паг в однородной изотропной Вселенной // ТМФ. 1979. Т. 41. С. 245—255.
25. *Карманов О. Ю., Менский М. Б.* О рождении частиц вблизи космологической сингулярности // ТМФ. 1980. Т. 42. С. 24—36.
26. *Mensky M. B., Karmanov O. Yu.* Application of the propagator method to pair production in the Robertson—Walker metric // General relativity and gravitation. 1980. Vol. 12. P. 267—277.
27. *Castagnino M. A., Harari D. D.* Hadamar renormalization in curved space-time // Ann. Phys. (US). 1984. Vol. 152. P. 85—104.
28. *Гитман Д. М.* Квантовые процессы в интенсивном электромагнитном поле. II // Изв. вузов. Физика. 1976. № 10. С. 86—120.

29. *Березин О. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965. 235 с.
30. *Wald R.* Existence of the S-matrix in quantum field theory in curved space-time // Ann. Phys. (US). 1979. Vol. 118. P. 490—510.
31. *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 842 с.
32. *Бухбиндер И. Л., Гитман Д. М.* Метод расчета амплитуд квантовых процессов во внешних гравитационных полях. 1 // Изв. вузов. Физика. 1979. № 3. С. 90—95.
33. *Бухбиндер И. Л., Гитман Д. М.* Метод расчета амплитуд квантовых процессов во внешних гравитационных полях. 2 // Там же. С. 55—61.
34. *Фрадкин Е. С.* К теории квантованных полей // ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 121—134.
35. *Фрадкин Е. С.* Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике // Квантовая теория поля и гидродинамика. М.: Наука, 1965. С. 7—138. (Тр. ФИАН; Т. 29).
36. *Фрадкин Е. С.* О функциональном методе в квантовой теории поля // Международная зимняя школа теоретической физики. Дубна, 1964. Т. 2. С. 5—38.
37. *Dowker J. S.* Propagators for arbitrary spin in an Einstein Universe // Ann. Phys. (US). 1972. Vol. 71. P. 577—602.
38. *Nariai H., Tanabe K.* Propagators for a scalar field in homogeneous expanding universe. 1 // Progr. Theor. Phys. 1976. Vol. 55. P. 1116—1132.
39. *Nariai H.* On a quantization scalar field in sceme Bianchi-type I Universe // Ibid. 1977. Vol. 58. P. 560—574.
40. *Hartle J. B., Hawking S. W.* Path-integral derivation of black-hole radiance // Phys. D — Pat. and Fields, Rev. 1976. Vol. 13. P. 2188—2203.
41. *Nariai H., Azuma T.* Propagators for a quantized scalar field in some isotropic universe // Progr. Theor. Phys. 1978. Vol. 59. P. 1522—1531.
42. *Dullemond C., Van Beveren E.* Scalar field propagators in anti-De Sitter space-time / J. Math. Phys. 1985. Vol. 26. P. 2050—2058.
43. *Avis S. J., Isham C. J., Storey D.* Quantum field theory in anti-De Sitter space-time // Phys. Rev D — Pat. and Fields. 1978. Vol. 180. P. 3565—3576.
44. *Бухбиндер И. Л., Одинцов С. Д.* Рождение частиц и эффективный лагранжиан в квазиевклидовой модели Вселенной с электромагнитным полем // Изв. вузов. Физика. 1982. № 5. С. 12—16.
45. *Charach Ch.* Feynman propagators and particle creation in linearly expanding Bianchi type-I Universes // Phys. Rev D — Part. and Fields. 1982. Vol. 26. P. 3367—3383.
46. *Бухбиндер И. Л., Царегородцев Л. И.* О функциях Грина спинорного поля в конформно-плоском пространстве-времени // Изв. вузов. Физика. 1985. № 4. С. 35—40.
47. *Бухбиндер И. Л., Кириллова Е. Н.* Функции Грина в пространствах типа Бианки I. Взаимосвязь минковского и евклидовского подходов. Томск, 1986. 23 с. / (Препр. Том. фил. СО АН СССР; № 26).
48. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2. 295 с.
49. *Birrell N. D., Ford L. N.* Self-interacting quantized fields and particle creation in Robertson—Walker Universe // Ann. Phys. (US). 1979. Vol. 122. P. 1—25.
50. *Birrel И. D., Davies P. S., Ford L. N.* Effects of field interactions upon particle creation in Robertson—Walker Universe // J. Phys. A. 1980. Vol. 13. P. 961—968.
51. *Ford L. N.* Particle decay and CTP non-invariance in cosmology // Nucl. Phys. B. 1982. Vol. 204. P. 35—44.
52. *Hawking S. W.* Interacting quantum fields around a black hole // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 80. P. 421—442.
53. *Kuroda Y.* On the creation of particles through their interaction in an expanding Universe // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 842—856.
54. *Leahy D. A., Uhruh W. G.* Effects of a $\lambda\varphi^4$-interaction on black-hole evaporation in two-dimentions // Phys. Rev. D — Pat. and Fields. 1983. Vol. 28. P. 694—702.
55. *Myhrvold N. P.* Runway particle production in De Sitter space // Ibid. P. 2439—2444.
56. *Audretsch J., Spandel P.* Mutually interacting quantum fields in an expanding Universe: Decay of a massive particle // Class. Quant. Gravit. 1985. Vol. 2. P. 733—753.
57. *Ford L. H.* Scalar electrodynamics in Robertson—Walker Universes // Phys. Rev D — Pat. and Fields. 1985. Vol. 31. P. 704—709.
58. *Lotze K. H.* Effects of the electromagnetic interaction upon particle creation in Robertson—Walker Universes. 1. A general framework for the calculation of particle creation // Class. Quant. Gravit. 1985. Vol. 2. P. 351—362.
59. *Lotze K. H.* Effects of the electromagnetic interaction upon particle creation in Robertson—Walker Universes. 2. A soluble example // Ibid. P. 363—372.
60. *Бухбиндер И. Л., Царегородцев Л. И.* Излучение фотона электроном в радиационно-доминированной Вселенной // Изв. вузов. Физика. 1986. № 9. С. 96—100.
61. *Ритус В. И.* Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем // Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. М.: Наука, 1979. С. 5—151. (Тр. ФИАН; Т. 111).
62. *Никишов А. И.* Проблемы интенсивного внешнего поля в квантовой электродинамике // Там же. С. 152—271.
63. *Audretsch J., Schäfer G.* Thermal particle production in a radiative dominated Robertson—Walker Universe // J. Phys. A. 1978. Vol. 11. P. 1583—1602.

64. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т. 1. 294 с.
65. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
66. *Гаврилов С. П., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М.* Соотношение унитарности в квантовой электродинамике с внешним полем, порождающим пары // Изв. вузов. Физика. 1980. № 3. С. 93—96.
67. *Вольфенгаут Ю. Ю., Гаврилов С. П., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М.* Радиационные процессы во внешнем электромагнитном поле, порождающем пары // ЯФ. 1981. Т. 33. С. 743—757.
68. *Гитман Д. М., Фрадкин Е. С., Шварцман Ш. М.* Оптическая теорема в квантовой электродинамике с нестабильным вакуумом. М., 1986. 43 с. (Препр. / ФИАН; № 161).
69. *Багров В. Г., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М.* К вопросу о рождении электрон-позитронных пар из вакуума // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 392—399.
70. *Багров В. Г., Гитман Д. М., Шварцман Ш. М.* Рождение электрон-позитронных пар из вакуума в формализме нулевой плоскости // ЯФ. 1976. Т. 23. С. 394—400.
71. *Гитман Д. М., Кучин В. А.* Производящий функционал среднего поля в квантовой электродинамике с нестабильным вакуумом // Изв. вузов. Физика. 1981. № 10. С. 80—84.
72. *Бухбиндер И. Л.* Производящий функционал среднего поля в квантовой электродинамике с внешним гравитационным полем // ЯФ. 1981. Т. 34. С. 1136—1141.
73. *Hajicek P.* Time-loop formalism in quantum field theory // Proc. Second Marcel Grossman meet. on gen. relat / Ed. R. Rufini. N. Y., 1982. P. 483—491.
74. *Jordan R. D.* Effective field equations for expectation values // Phys. Rev. D — Part. and Fields. 1986. Vol. 33. P. 444—454.
75. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* Beyond the Schwinger—De Witt technique: Converting loops into trees and in-in currents / Nucl. Phys. B. 1987. Vol. 282. P. 163—188.
76. *Buchbinder I. L., Fradkin E. S.* On the mean field equations of motion in the theories with unstable vacuum // Fortschr. Phys. 1988. Bd. 36. S. 97—105.
77. *Schwinger J.* Brownian motion of quantum oscillator // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 407—439.
78. *Келдыш Л. В.* Диаграммная техника для неравновесных процессов // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1515—1527.
79. *Chon Kuang Chao, Su Zhao Lin, Hao Bai Lin, Yu Lu.* Closed time path Green's functions and critical dynamics // Phys. Rev. B — Solid State. 1981. Vol. 22. P. 3385—3407.
80. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 294 с.
81. *Buchbinder I. L., Fradkin E. S., Gitman D. M.* Generating functional in quantum field theory with unstable vacuum. Moscow, 1981. 24 p. (Prepr./PhIAN; N 138).
82. Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом. М.: Наука, 1989. 222 с. (Тр. ФИАН; Т. 193).