АКАДЕМИЯ НАУК СССР

1986 ТРУДЫ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ Том 165
ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА

УДК 530. 145

И. А. БАТАЛИН, Е. С. ФРАДКИН

# ОПЕРАТОРНОЕ КВАНТОВАНИЕ И АБЕЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ ПЕРВОГО РОДА

## ВВЕДЕНИЕ

Любое калибровочное или суперкалибровочное поле характеризуется с точки зрения гамильтонова формализма наличием связей первого рода, которые и являются каноническими генераторами калибровочных преобразований. Таким образом, естественной основой для квантования калибровочных теорий должна служить квантовая механика релятивистских динамических систем со связями.

Как правило, квантование динамических систем со связями осуществляется на основе формального интеграла по путям в фазовом пространстве. В этом подходе были достигнуты значительные успехи и получен ряд важных для калибровочной теории поля результатов. Отнюдь не преследуя цели сколько-нибудь полного литературного обзора, мы упомянем здесь только работы, результаты которых имеют наиболее непосредственное отношение к содержанию данного исследования.

Каноническая $S$-матрица для бозонных динамических систем со связями первого рода была получена в унитарных (нерелятивистских) калибровках в работе [1]. В работе [2] было получено решение для $S$-матрицы динамических бозе—ферми-систем со связями второго рода. Как следствие этого результата была получена каноническая $S$-матрица для динамических бозе—ферми-систем со связями первого и второго рода в унитарных калибровках.

В работе [3] канонический формализм был распространен на релятивистские калибровки. Показано, что построение $S$-матрицы в релятивистских калибровках сводится к нахождению унитаризующего гамильтониана в релятивистском фазовом пространстве. Явная форма этого гамильтониана была получена в [3] для случая бозонных динамических систем со связями первого рода, генерирующими калибровочную алгебру ранга один. Одновременно в этой работе было сделано важное наблюдение, что калибровочная часть унитаризующего гамильтониана может быть представлена в виде скобки Пуассона фермионной функции, зависящей от выбора калибровки, и другой фермионной функции, построенной из связей и структурных коэффициентов их инволюции. Это был первый шаг к пониманию универсальной связи между структурой унитаризующего гамильтониана и процессом генерации калибровочной алгебры.

Основная формула для классического унитаризующего гамильтониана и классические производящие уравнения гамильтоновой калибровочной алгебры были сформулированы в работе [4]. Их явное решение было получено в этой работе для случая динамических бозе—ферми-систем со связями первого рода, генерирующими калибровочную алгебру ранга один.

Авторы работы [5] распространили определение унитаризующего гамильтониана и форму производящих уравнений на случай наличия связей второго рода и получили решение для канонической $S$-матрицы в релятивистских калибровках для динамических бозе—ферми-систем со связями обоих родов в общем случае неприводимой калибровочной алгебры любого ранга.

Обобщенный канонический формализм, развитый в работах [3—5], дал возможность получить существенные результаты применительно к конкретным динамическим системам. Наиболее важными из этих результатов являются последовательное каноническое квантование и построение $S$-матрицы для эйнштейновской гравитации [6] и супергравитации [7].

В работе [8] впервые был последовательно развит обобщенный канонический формализм для систем с линейно зависимыми связями первого рода. Это позволило получить решение для канонической $S$-матрицы динамических бозе—ферми-систем со связями первого рода, генерирующими открытую (любого ранга) и приводимую (любой стадии) гамильтонову калибровочную алгебру, при наличии также (линейно независимых) связей второго рода. В следующей работе [9] этот результат был распространен для наиболее общего случая, когда связи второго рода также могут быть линейно зависимы и иметь любую стадию приводимости.

Все упомянутые выше результаты относятся, как уже было сказано, к квантованию систем со связями с помощью формального интеграла по путям в фазовом пространстве. Однако с точки зрения первопринципов квантовой механики как алгебраической конструкции наиболее последовательным для любых динамических систем является операторное квантование.

Ключевая идея операторного квантования релятивистских калибровочных систем высказана в работе [10]. Она состоит в том, чтобы подчинить каноническим коммутационным соотношениям операторы релятивистского фазового пространства, включающего в неприводимом случае исходные динамические переменные, лагранжевы множители к релятивистским калибровкам и связям первого рода, а также соответствующие госты. В рамках этой основной идеи операторное квантование теории Янга—Миллса в релятивистской калибровке рассматривалось в работах [11, 12].

В работе [13], являющейся дальнейшим развитием той же идеи, было проведено операторное каноническое квантование динамических бозе—ферми-систем со связями первого рода, генерирующими открытую (любого ранга) неприводимую калибровочную алгебру. В этой работе впервые сформулирована операторная версия универсального определения унитаризующего гамильтониана и производящих уравнений калибровочной алгебры. Эти результаты представлены в более явном виде в работе [14], где также получено соответствующее решение для канонической $S$-матрицы в виде корректного (неформального) интеграла по путям в фазовом пространстве. Таким образом, в этой работе впервые показано, что на виртуальных фазовых траекториях действует квантовая калибровочная алгебра, генерируемая символами операторов связей первого рода.

В следующей работе [15] для неприводимого случая сформулирована процедура замыкания и абелизации операторной калибровочной алгебры. Классический аналог этого результата хорошо известен: связи первого рода всегда, по крайней мере локально, могут быть сделаны абелевыми путем «вращения» (линейного комбинирования), производимого обратимой матрицей, вообще говоря зависящей от фазовых переменных. В работе [15] определено зависящее от операторов гостов унитарное преобразование, приводящее фермионный производящий оператор калибровочной алгебры к виду, соответствующему новым операторам связей, коммутирующим между собой. Это же преобразование, но сопровождаемое некоторым эффективным формизменением оператора калибровочного фермиона, будучи применено к бозонному производящему оператору, приводит его к виду, который соответствует новому гамильтониану, коммутирующему с новыми связями. Разумеется, если речь идет о теории поля, новые операторы связей и гамильтониана, вообще говоря, нелокальны и не обладают правильной релятивистской вариантностью, однако управляемая ими динамика новых операторов фазовых переменных физически эквивалентна исходной.

Целью предлагаемой работы является синтез результатов [8, 13—15], а именно: во-первых, последовательное решение проблемы канонического операторного квантования динамических бозе—ферми-систем со связями первого рода, генерирующими открытую (любого ранга) и приводимую (любой стадии) калибровочную алгебру; во-вторых, формулировка для общего случая приводимости любой стадии, регулярной процедуры замыкания и абелизации операторной калибровочной алгебры. Статья построена следующим образом.

Раздел 1 носит вспомогательный характер и имеет целью напомнить некоторые элементарные факты и соотношения, касающиеся соответствия «символ $\leftrightarrow$ оператор».

В разделе 2 детально рассматривается процесс генерации калибровочной алгебры любой стадии приводимости. Здесь формулируются производящие уравнения для фермионного и бозонного производящих операторов калибровочной алгебры, зависящих от канонических пар операторов так называемого минимального сектора. Решение этих уравнений ищется в виде рядов по степеням операторов гостов алгебраического сектора, причем все гостовские импульсы располагаются слева от гостовских координат. Коэффициенты этих рядов зависят только от канонических пар операторов исходных динамических переменных и представляют собой структурные операторы калибровочной алгебры.

В разделе 3 дается операторная версия унитаризующего гамильтониана, который построен из трех основных ингредиентов: фермионного и бозонного производящих операторов калибровочной алгебры и оператора калибровочного фермиона. Этот унитаризующий гамильтониан является основой операторного динамического описания систем со связями первого рода.

Раздел 4 содержит явную формулировку операторной динамики. Эволюция во времени операторов релятивистского фазового пространства задается гейзенберговскими уравнениями движения, содержащими унитаризующий гамильтониан теории. Обычным образом вводя внешние источники, определяем производящий оператор $T$-произведений гейзенберговских динамических переменных. Одновременно этот производящий оператор задает каноническое преобразование, сопоставляющее каждому гейзенберговскому оператору оператор в новом представлении, зависящем от внешних источников. Важнейшим следствием уравнений движения в новом представлении являются операторные соотношения Уорда.

В разделе 5 из операторных уравнений движения в представлении, зависящем от внешних источников, обычной процедурой [16—19] выводятся уравнения в вариационных производных для производящего функционала квантовых функций Грина. Решение этих уравнений имеет вид функционального интеграла по путям в релятивистском фазовом пространстве. Эффективное действие в этом интеграле по путям содержит «раздвинутый» по времени символ унитаризующего гамильтониана. Тем самым полностью учитывается информация о порядке следования операторных множителей [19].

В разделе 6 сформулирована процедура замыкания и абелизации операторной калибровочной алгебры. Здесь формулируется уравнение для унитарного оператора канонического преобразования в минимальном секторе, приводящего фермионный производящий оператор калибровочной алгебры к виду, линейному по гостовским импульсам, что соответствует замыканию коммутационных соотношений новых операторов связей первого рода друг с другом. Чтобы замкнуть также коммутационные соотношения новых связей с новым гамильтонианом, необходимо устранить остающиеся после канонического преобразования нелинейные по гостовским импульсам члены в бозонном производящем операторе калибровочной алгебры. Это достигается специальным формизменением оператора калибровочного фермиона. В результате мы имеем новый оператор унитаризующего гамильтониана, описывающий эквивалентную систему с замкнутой или даже абелевой калибровочной алгеброй.

**Некоторые соглашения.** Каждая из величин, с которыми мы будем иметь дело, принадлежит одной из двух совокупностей однородных элементов — бозонов или фермионов. Если $n$ — число каких-либо объектов, то $n_+$ $(n_-)$ есть число бозонов (фермионов) среди них, $n=n_++n_-$. В соответствии со сказанным каждая величина $A$ характеризуется функцией статистики — так называемой грассмановой четностью $\varepsilon(A)$:

$$\varepsilon(A)\equiv\begin{cases}\bar{0}, & \text{если } A \text{ — бозон,}\\ \bar{1}, & \text{если } A \text{ — фермион,}\end{cases}$$

где $(\bar{0},\ \bar{1})$ суть элементы поля вычетов по модулю 2. Мы имеем, очевидно, $\varepsilon(AB)=\varepsilon(A)+\varepsilon(B)$.

Кроме того, каждая величина $A$ несет внутреннюю характеристику, называемую гостовским числом: $\mathrm{gh}\,(A)$. После того как значения гостовского числа приписаны элементарным динамическим переменным, мы имеем по определению $\mathrm{gh}\,(AB)=\mathrm{gh}\,(A)+\mathrm{gh}\,(B)$.

В дальнейшем через $\mathrm{rank}_\pm\|M\|$ обозначается совокупность рангов бозе—бозе (+)- и ферми—ферми(—)-блоков четной прямоугольной матрицы $\|M_{ab}\|$, $\varepsilon(M_{ab})=\varepsilon_a+\varepsilon_b$. Правые и левые производные обозначаются, как обычно, через $\partial_r$ и $\partial_l$ соответственно.

## 1. ОПЕРАТОРЫ И СИМВОЛЫ

Квантовый оператор, соответствующий классической величине $A$, обозначается как $\hat{A}$. Их грассманова четность обозначается через $\varepsilon(\hat{A})=\varepsilon(A)$, а гостовское число — через $\mathrm{gh}\,(\hat{A})=\mathrm{gh}\,(A)$. Суперкоммутатор любых двух операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определен как

$$[\hat{A},\ \hat{B}]\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}(-1)^{\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})} \tag{1.1}$$

и обладает следующими стандартными алгебраическими свойствами:

$$[\hat{A},\ \hat{B}]=-[\hat{B},\ \hat{A}](-1)^{\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})}, \tag{1.2}$$

$$[\hat{A},\ \hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\ \hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\ \hat{C}](-1)^{\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})}, \tag{1.3}$$

$$[\hat{A},\ [\hat{B},\ \hat{C}]](-1)^{\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{C})}+\text{cycl. perm. }(\hat{C},\ \hat{B},\ \hat{A})=0. \tag{1.4}$$

Символ оператора $\hat{A}$ обозначается через $\tilde{A}$, причем

$$\varepsilon(\tilde{A})=\varepsilon(\hat{A}),\qquad \mathrm{gh}(\tilde{A})=\mathrm{gh}(\hat{A}),\qquad [\tilde{A},\ \tilde{B}]=[A,\ B]=0. \tag{1.5}$$

Соответствие (символ) $\leftrightarrow$ (оператор) является взаимно однозначным

$$\tilde{A}\leftrightarrow\hat{A} \tag{1.6}$$

и задает ассоциативный закон $*$-умножения символов:

$$\tilde{A}*\tilde{B}\leftrightarrow\hat{A}\hat{B}, \tag{1.7}$$

так что коммутатору (1. 1) операторов ставится в соответствие $*$-коммутатор символов

$$[\tilde{A},\ \tilde{B}]_*\leftrightarrow[\hat{A},\ \hat{B}], \tag{1.8}$$

где

$$[\tilde{A},\ \tilde{B}]_*\equiv\tilde{A}*\tilde{B}-\tilde{B}*\tilde{A}(-1)^{\varepsilon(\tilde{A})\varepsilon(\tilde{B})}. \tag{1.9}$$

Коммутатор (1. 8) обладает относительно $*$-умножения теми же алгебраическими свойствами (1. 2)—(1. 4), что и коммутатор (1. 1) относительно операторного умножения.

Явный вид закона $*$-умножения символов зависит от конкретного выбора нормальной формы, т. е. стандартного закона упорядочения операторных образующих $\hat{P}_M$, $\hat{Q}^M$, $\hat{1}$ супералгебры Гейзенберга:

$$[\hat{P}_M,\ \hat{P}_{M'}]=0,\qquad [\hat{Q}^M,\ \hat{P}_M]=i\hbar\delta^M_{M'}\hat{1},\qquad [\hat{Q}^M,\ \hat{Q}^{M'}]=0. \tag{1.10}$$

Мы будем использовать $\hat{P}\hat{Q}$-символы, соответствующие $\hat{P}\hat{Q}$-нормальной форме (все $\hat{P}$ слева от всех $\hat{Q}$):

$$\hat{A}(\hat{P},\ \hat{Q}) = \exp\left\{\hat{P}_M \frac{\partial_l}{\partial P_M}\right\} \exp\left\{\hat{Q}^M \frac{\partial_l}{\partial Q^M}\right\} \tilde{A}(P,\ Q)\Big|_{\substack{P=0,\\ Q=0}}. \tag{1.11}$$

Для $\hat{P}\hat{Q}$-символов закон $*$-умножения имеет вид

$$\tilde{A}*\tilde{B} \equiv \tilde{A}\left(P,\ Q + i\hbar \frac{\partial_l}{\partial P'}\right)\tilde{B}(P+P',\ Q)\Big|_{P'=0}. \tag{1.12}$$

Если $\hat{P}\hat{Q}$-символы операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ разложимы в ряды по степеням $\hbar$:

$$\tilde{A} = A + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \tilde{A}_n, \qquad \tilde{B} = B + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \tilde{B}_n; \tag{1.13}$$

$$A = \lim_{\hbar\to 0} \tilde{A}, \qquad B = \lim_{\hbar\to 0} \tilde{B}, \tag{1.14}$$

то для их $*$-произведения (1.12) имеем:

$$\tilde{A}*\tilde{B} = AB + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \frac{i^n}{n!}(A,\ B)_n + \sum_{n=2}^{\infty} \hbar^n \sum_{m=1}^{n-1} \frac{i^m}{m!}[(A,\ \tilde{B}_{n-m})_m + (\tilde{A}_{n-m},\ B)_m] +$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \hbar^n \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{i^l}{l!}(\tilde{A}_{m-l},\ \tilde{B}_{n-m})_l, \tag{1.15}$$

где использовано сокращенное обозначение

$$(A,\ B)_n \equiv \frac{\partial_r^n A}{\partial Q^{M_1}\cdot \ldots \cdot\partial Q^{M_n}} \frac{\partial_l^n B}{\partial P_{M_1}\cdot \ldots \cdot\partial P_{M_n}}. \tag{1.16}$$

Соответствующее разложение $*$-коммутатора (1. 9) по степеням $\hbar$ имеет вид

$$[\tilde{A},\ \tilde{B}]_* = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \frac{i^n}{n!}\{A,\ B\}_n + \sum_{n=2}^{\infty} \hbar^n \sum_{m=1}^{n-1} \frac{i^m}{m!}(\{A,\ \tilde{B}_{n-m}\}_m + \{\tilde{A}_{n-m},\ B\}_m) +$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \hbar^n \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{i^l}{2l!}(\{\tilde{A}_{m-l},\ \tilde{B}_{n-m}\}_l + \{\tilde{A}_{n-m},\ \tilde{B}_{m-l}\}_l), \tag{1.17}$$

где обозначено

$$\{A,\ B\}_n \equiv (A,\ B)_n - (B,\ A)_n(-1)^{\varepsilon(A)\varepsilon(B)}. \tag{1.18}$$

Таким образом, в классическом пределе (1. 14):

$$\lim_{\hbar\to 0}(i\hbar)^{-1}[\tilde{A},\ \tilde{B}]_* = \{A,\ B\}, \tag{1.19}$$

где

$$\{A, B\} \equiv \{A, B\}_1 = \frac{\partial_r A}{\partial Q^M}\frac{\partial_l B}{\partial P_M} - \frac{\partial_r B}{\partial Q^M}\frac{\partial_l A}{\partial P_M}(-1)^{\varepsilon(A)\varepsilon(B)} \tag{1.20}$$

есть классическая скобка Пуассона.

Пусть теперь $\mathcal{T}_{\mathfrak{D}}$ есть оператор хронологического упорядочения Дайсона; тогда для любого оператора $\hat{A}(\hat{P}(t),\ \hat{Q}(t))$ имеем

$$\hat{A} = \lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{T}_{\mathfrak{D}}\tilde{A}(\hat{P}(t+\varepsilon),\ \hat{Q}(t)); \tag{1.21}$$

$$[\hat{Q}^M,\ \hat{A}] = i\hbar \lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{T}_{\mathfrak{D}} \frac{\partial_l \tilde{A}(\hat{P}(t+\varepsilon),\ \hat{Q}(t))}{\partial \hat{P}_M}; \tag{1.22}$$

$$[\hat{A},\ \hat{P}_M] = i\hbar \lim_{\varepsilon\to+0} \mathcal{T}_{\mathfrak{D}} \frac{\partial_r \tilde{A}(\hat{P}(t+\varepsilon),\ \hat{Q}(t))}{\partial \hat{Q}^M}. \tag{1.23}$$

## 2. ГЕНЕРАЦИЯ ОПЕРАТОРНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Пусть

$$(\hat{p}_i,\ \hat{q}^i),\quad i=1,\ldots,n, \tag{2.1}$$

суть операторы исходных динамических переменных, среди которых имеется $n_+$ бозонных и $n_-$ фермионных пар,

$$n=n_+ + n_-, \tag{2.2}$$

так что операторы (2. 1) скоррелированы по статистике

$$\varepsilon(\hat{p}_i)=\varepsilon(\hat{q}^i). \tag{2.3}$$

Исходным операторам (2. 1) приписывается нулевое значение гостовского числа

$$\mathrm{gh}(\hat{p}_i)=-\mathrm{gh}(\hat{q}^i)=0. \tag{2.4}$$

Одновременные коммутационные соотношения для операторов (2. 1) предполагаются каноническими в смысле (1. 10), так что отличен от нуля только коммутатор

$$[\hat{q}^j,\ \hat{p}_k]=i\hbar\delta^j_k\hat{1}. \tag{2.5}$$

Пусть далее при каждом $s=0,\ldots,L$ задано распределение грассмановой четности

$$\varepsilon_{s\alpha_s},\qquad \alpha_s=1,\ldots,m_s, \tag{2.6}$$

и пусть $(m_s)_+$ и $(m_s)_-$ суть соответственно числа бозонов и фермионов среди объектов с распределением статистики (2. 6),

$$m_s=(m_s)_+ + (m_s)_-. \tag{2.7}$$

Определим последовательность

$$\gamma_s(L)_\pm \equiv \sum_{s'=s}^{L}(m_{s'})_\pm(-1)^{(s-s')}, \tag{2.8}$$

и подчиним числа $(m_s)_\pm$ условиям

$$n_\pm \geqslant \gamma_0(L)_\pm,\qquad \gamma_s(L)_\pm \geqslant 0,\qquad s=0,\ldots,L. \tag{2.9}$$

Введем теперь следующие операторы, образующие алгебраический сектор гостов:

$$(\hat{\mathcal{P}}_{s\alpha_s},\ \hat{C}^{\alpha_s}_s),\qquad \alpha_s=1,\ldots,m_s;\ s=0,\ldots,L. \tag{2.10}$$

Эти операторы имеют статистику

$$\varepsilon(\hat{\mathcal{P}}_{s\alpha_s})=\varepsilon(\hat{C}^{\alpha_s}_s)=\varepsilon_{s\alpha_s}+s+1 \tag{2.11}$$

и гостовское число

$$\mathrm{gh}(\hat{\mathcal{P}}_{s\alpha_s})=-\mathrm{gh}(\hat{C}^{\alpha_s}_s)=-(s+1). \tag{2.12}$$

Одновременные коммутационные соотношения для операторов (2. 10) также предполагаются каноническими в смысле (1. 10), так что для них отличен от нуля только коммутатор

$$[\hat{C}^{\alpha_s}_s,\ \hat{\mathcal{P}}_{r\beta_r}]=i\hbar\delta_{sr}\delta^{\alpha_s}_{\beta_r}\hat{1}. \tag{2.13}$$

Кроме того, мы постулируем для операторов (2. 10) следующие совместимые с (2. 13) свойства относительно эрмитова сопряжения:

$$(\hat{\mathscr{P}}_{s\alpha_s})^+ = \hat{\mathscr{P}}_{s\alpha_s}(-1)^{\varepsilon(\mathscr{P}_{s\alpha_s})}, \quad (\hat{C}^{\alpha_s}_s)^+ = \hat{C}^{\alpha_s}_s. \tag{2.14}$$

Исходные операторы (2. 1) вместе с операторами (2. 10) гостов алгебраического сектора образуют так называемый минимальный сектор, который в дальнейшем обозначается как $\hat{\Gamma}_{\min}$. Для операторов алгебраического сектора (2. 10) мы будем в дальнейшем систематически использовать следующее коллективное обозначение:

$$(\hat{\mathscr{P}}_A, \hat{C}^A) \equiv (\hat{\mathscr{P}}_{s\alpha_s}, \hat{C}^{\alpha_s}_s), \tag{2.15}$$

где $A \equiv (s, \alpha_s)$ есть коллективный индекс, принимающий множество значений, соответствующее $\alpha_s = 1, \ldots, m_s$; $s = 0, \ldots, L$. Итак,

$$\hat{\Gamma}_{\min} \equiv (\hat{p}_i, \hat{\mathscr{P}}_A; \hat{q}^i, \hat{C}^A). \tag{2.16}$$

Определим фермионный $\hat{\Omega}_{\min}$ и бозонный $\hat{H}_{\min}$ производящие операторы калибровочной алгебры как решения уравнений

$$[\hat{\Omega}_{\min}, \hat{\Omega}_{\min}] = 0, \quad \mathrm{gh}(\hat{\Omega}_{\min}) = 1; \tag{2.17}$$

$$[\hat{H}_{\min}, \hat{\Omega}_{\min}] = 0, \quad \mathrm{gh}(\hat{H}_{\min}) = 0, \tag{2.18}$$

в минимальном секторе (2. 16). Мы требуем также, чтобы производящие операторы удовлетворяли условию формальной эрмитовости:

$$(\hat{\Omega}_{\min})^+ = \hat{\Omega}_{\min}, \tag{2.19}$$

$$(\hat{H}_{\min})^+ = \hat{H}_{\min}. \tag{2.20}$$

В силу тождества Якоби (1. 4) имеем

$$[[\hat{\Omega}_{\min}, \hat{\Omega}_{\min}], \hat{\Omega}_{\min}] \equiv 0; \tag{2.21}$$

$$[[\hat{H}_{\min}, \hat{\Omega}_{\min}], \hat{\Omega}_{\min}] \equiv {}^1/_2 [\hat{H}_{\min}, [\hat{\Omega}_{\min}, \hat{\Omega}_{\min}]] = 0. \tag{2.22}$$

Циклическое операторное тождество (2. 21) обеспечивает выполнение необходимых условий разрешимости уравнения (2. 17). С другой стороны, исчезновение в силу (2. 17) правой части (2. 22) обеспечивает выполнение необходимых условий разрешимости уравнения (2. 18). Решение уравнений (2. 17), (2. 18) ищется в виде рядов [1] по степеням операторов (2. 15), взятых в $\hat{\mathscr{P}}\hat{C}$-нормальной форме (все $\hat{\mathscr{P}}$ слева от всех $\hat{C}$):

$$\hat{\Omega}_{\min} = \hat{U}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathscr{P}}_{A_n} \ldots \hat{\mathscr{P}}_{A_1} \hat{U}^{A_1 \ldots A_n}; \tag{2.23}$$

$$\hat{H}_{\min} = \hat{V}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathscr{P}}_{A_n} \ldots \hat{\mathscr{P}}_{A_1} \hat{V}^{A_1 \ldots A_n}. \tag{2.24}$$

Коэффициенты этих рядов

$$\hat{U}_0, \quad \hat{U}^{A_1 \ldots A_n}, \quad n = 1, \ldots; \tag{2.25}$$

$$\hat{V}_0, \quad \hat{V}^{A_1 \ldots A_n}, \quad n = 1, \ldots, \tag{2.26}$$

имеют следующие статистику и гостовское число:

$$\varepsilon(\hat{U}_0) = 1, \quad \varepsilon(\hat{U}^{A_1 \ldots A_n}) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(\hat{C}^{A_j}) + 1; \tag{2.27}$$

[1] Если ряды (2.23), (2.24) обрываются на членах максимальной степени $(r, r')$ по гостовским импульсам $\mathscr{P}_A$, мы говорим о калибровочной алгебре (или теории) ранга $(r, r')$. В частности, замкнутая калибровочная алгебра имеет ранг $r = r' = 1$.

$$\varepsilon(\hat{V}_0)=0, \quad \varepsilon\left(\hat{V}^{A_1\dots A_n}\right)=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon\left(\hat{C}^{A_j}\right); \tag{2.28}$$

$$\mathrm{gh}(\hat{U}_0)=1, \quad \mathrm{gh}\left(\hat{U}^{A_1\dots A_n}\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{gh}\left(\hat{C}^{A_j}\right)+1; \tag{2.29}$$

$$\mathrm{gh}(\hat{V}_0)=0, \quad \mathrm{gh}\left(\hat{V}^{A_1\dots A_n}\right)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{gh}\left(\hat{C}^{A_j}\right), \tag{2.30}$$

а также обладают следующим свойством обобщенной симметрии:

$$\hat{U}^{A_1\dots A_n}=(\hat{U}_{\mathrm{sym}})^{A_1\dots A_n}; \tag{2.31}$$

$$\hat{V}^{A_1\dots A_n}=(\hat{V}_{\mathrm{sym}})^{A_1\dots A_n}, \tag{2.32}$$

где для любого $\hat{K}^{A_1\dots A_n}$ обобщенная симметризация определена как

$$(\hat{K}_{\mathrm{sym}})^{A_1\dots A_n}\equiv S^{A_1\dots A_n}_{B_1\dots B_n}\hat{K}^{B_1\dots B_n}; \tag{2.33}$$

$$n!\,S^{A_1\dots A_n}_{B_1\dots B_n}\equiv\left(\frac{\partial_l}{\partial\mathscr{P}_{A_1}}\dots\frac{\partial_l}{\partial\mathscr{P}_{A_n}}\mathscr{P}_{B_n}\dots\mathscr{P}_{B_1}\right). \tag{2.34}$$

Подставляя разложение (2. 23) в уравнение (2. 17) и приводя левую часть к $\mathscr{P}\hat{C}$-нормальной форме, получим следующие соотношения для коэффициентных операторов (2. 25):

$$\frac{1}{2}[\hat{U}_0,\ \hat{U}_0]=-i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}_0}{\partial\hat{C}^A}\hat{U}^A, \tag{2.35}$$

$$[\hat{U}^{A_1\dots A_n},\ \hat{U}_0]+\sum_{k=1}^{\infty}(i\hbar)^k\frac{\partial_r^k\hat{U}^{A_1\dots A_n}}{\partial\hat{C}^{B_1}\dots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{U}^{B_1\dots B_k}+(\hat{X}_{\mathrm{sym}})^{A_1\dots A_n}=$$
$$=-i\hbar(n+1)\frac{\partial_r\hat{U}_0}{\partial\hat{C}^A}\hat{U}^{AA_1\dots A_n}(-1)^{\varepsilon_0^n}, \tag{2.36}$$

где

$$\hat{X}^{A_1}\equiv 0, \quad \hat{X}^{A_1\dots A_n}\equiv\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{\varepsilon_m^n}\left(\frac{1}{2}[\hat{U}^{A_1\dots A_m},\ \hat{U}^{A_{m+1}\dots A_n}]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n-m+k)!}{k!\,(n-m)!}\cdot(i\hbar)^k\frac{\partial_r^k\hat{U}^{A_1\dots A_m}}{\partial\hat{C}^{B_1}\dots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{U}^{B_1\dots B_kA_{m+1}\dots A_n}\right); \tag{2.37}$$

$$\varepsilon_m^n\equiv\sum_{j=m+1}^{n}\varepsilon\left(\hat{C}^{A_j}\right). \tag{2.38}$$

Аналогично, подставляя разложения (2. 23), (2. 24) в уравнение (2. 18) и приводя левую часть к $\mathscr{P}\hat{C}$-нормальной форме, получим следующие соотношения для коэффициентных операторов (2. 26):

$$[\hat{V}_0,\ \hat{U}_0]=i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}_0}{\partial\hat{C}^A}\hat{V}^A; \tag{2.39}$$

$$[\hat{V}^{A_1\dots A_n},\ \hat{U}_0]-[\hat{U}^{A_1\dots A_n},\ \hat{V}_0]+\sum_{k=1}^{\infty}(i\hbar)^k\left(\frac{\partial_r^k\hat{V}^{A_1\dots A_n}}{\partial\hat{C}^{B_1}\dots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{U}^{B_1\dots B_k}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial_r^k\hat{U}^{A_1\dots A_n}}{\partial\hat{C}^{B_1}\dots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{V}^{B_1\dots B_k}\right)+(\hat{Y}_{\mathrm{sym}})^{A_1\dots A_n}=$$
$$=i\hbar(n+1)\frac{\partial_r\hat{U}_0}{\partial\hat{C}^A}\hat{V}^{AA_1\dots A_n}(-1)^{\varepsilon_0^n}, \tag{2.40}$$

$$\text{где } \hat{Y}^{A_1}\equiv 0, \qquad \hat{Y}^{A_1\ldots A_n}\equiv\sum_{m=1}^{n-1}\Bigg(\left[\hat{V}^{A_1\ldots A_m},\ \hat{U}^{A_{m+1}\ldots A_n}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n-m+k)\,!}{k\,!\,(n-m)\,!}\cdot$$

$$\cdot(i\hbar)^k\left(\frac{\partial_r^k\hat{V}^{A_1\ldots A_m}}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}\,\hat{U}^{B_1\ldots B_kA_{m+1}\ldots A_n}-\right.$$

$$\left.\left.-(-1)^{\varepsilon_m^n}\frac{\partial_r^k\hat{U}^{A_1\ldots A_m}}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}\,\hat{V}^{B_1\ldots B_kA_{m+1}\ldots A_n}\right)\right). \tag{2.41}$$

Условия (2. 19), (2. 20) формальной эрмитовости операторов (2. 23), (2. 24) влекут за собой следующие свойства коэффициентных операторов (2. 25), (2. 26) относительно эрмитова сопряжения:

$$\hat{U}_0=(\hat{U}_0)^+ +\sum_{k=1}^{\infty}(i\hbar)^k\frac{\partial_l^k(\hat{U}^{B_1\ldots B_k})^+}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}, \tag{2.42}$$

$$(-1)^{\varepsilon_0^n}\hat{U}^{A_1\ldots A_n}=\left(\hat{U}^{A_n\ldots A_1}\right)^+ +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k)\,!}{n\,!\,k\,!}(i\hbar)^k\frac{\partial_l^k\left(\hat{U}^{A_n\ldots A_1B_1\ldots B_k}\right)^+}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}, \tag{2.43}$$

$$\hat{V}_0=(\hat{V}_0)^+ +\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\varepsilon_0^k}(i\hbar)^k\frac{\partial_l^k(\hat{V}^{B_1\ldots B_k})^+}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}, \tag{2.44}$$

$$\hat{V}^{A_1\ldots A_n}=\left(\hat{V}^{A_n\ldots A_1}\right)^+ +\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k)\,!}{n\,!\,k\,!}(-1)^{\varepsilon_0^k}(i\hbar)^k\frac{\partial_l^k\left(\hat{V}^{A_n\ldots A_1B_1\ldots B_k}\right)^+}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}. \tag{2.45}$$

Коэффициентные операторы (2. 25), (2. 26) являются полиномами по степеням операторов $\hat{C}^A$:

$$\hat{U}_0=\hat{T}_{0\alpha_0}(\hat{p},\ \hat{q})\,\hat{C}_0^{\alpha_0}, \tag{2.46}$$

$$\hat{U}^{A_1\ldots A_n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\{B\}=\mu_m^n}\frac{(-1)^{E_{B_1\ldots B_m}^{A_1\ldots A_n}}}{n\,!\,m\,!}\cdot\hat{U}_{B_m\ldots B_1}^{A_1\ldots A_n}(\hat{p},\ \hat{q})\,\hat{C}^{B_1}\ldots\hat{C}^{B_m}, \tag{2.47}$$

$$\hat{V}_0=\hat{H}_0(\hat{p},\ \hat{q}), \tag{2.48}$$

$$\hat{V}^{A_1\ldots A_n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\{B\}=\nu_m^n}\frac{(-1)^{E_{B_1\ldots B_m}^{A_1\ldots A_n}}}{n\,!\,m\,!}\cdot\hat{V}_{B_m\ldots B_1}^{A_1\ldots A_n}(\hat{p},\ \hat{q})\,\hat{C}^{B_1}\ldots\hat{C}^{B_m}, \tag{2.49}$$

где $\mu_m^n$, $\nu_m^n$ суть множества значений индексов $B_1, \ldots, B_m$, определяемые условиями

$$\mu_m^n\colon\ \sum_{j=1}^{m}\mathrm{gh}\left(\hat{C}^{B_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{gh}\left(\hat{C}^{A_i}\right)+1, \tag{2.50}$$

$$\nu_m^n\colon\ \sum_{j=1}^{m}\mathrm{gh}\left(\hat{C}^{B_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{gh}\left(\hat{C}^{A_i}\right); \tag{2.51}$$

показатель знаковых факторов в (2. 47), (2. 49) определен как

$$E_{B_1\ldots B_m}^{A_1\ldots A_n}=E^{A_1\ldots A_n}+E_{B_1\ldots B_m}, \tag{2.52}$$

причем при $n=1$ или $m=1$

$$E^{A_1}\equiv 0, \qquad E_{B_1}\equiv 0, \tag{2.53}$$

а при $n \geqslant 2,\ m \geqslant 2$

$$E^{A_1 \ldots A_n} \equiv \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=k}^{n} \left(\varepsilon\left(\hat{C}^{A_j}\right)+1\right), \tag{2.54}$$

$$E_{B_1 \ldots B_m} \equiv \sum_{k=2}^{m} \sum_{j=k}^{m} \left(\varepsilon\left(\hat{C}^{B_j}\right)+1\right). \tag{2.55}$$

Операторы

$$\hat{T}_{0\alpha_0},\ \hat{U}^{A_1 \ldots A_n}_{B_m \ldots B_1} \tag{2.56}$$

из (2. 46), (2. 47), а также

$$\hat{H}_0,\ \hat{V}^{A_1 \ldots A_n}_{B_m \ldots B_1} \tag{2.57}$$

из (2. 48), (2. 49) являются функциями только исходных операторов (2. 1) и образуют совокупность структурных операторов (базис) калибровочной алгебры. В силу (2. 4) все операторы (2. 56), (2. 57) имеют нулевое гостовское число, а их статистика следует из (2. 27), (2. 28):

$$\varepsilon\left(\hat{T}_{0\alpha_0}\right)=\varepsilon_{0\alpha_0}, \qquad \varepsilon\left(\hat{U}^{A_1 \ldots A_n}_{B_m \ldots B_1}\right)=\sum_{j=1}^{n} \varepsilon\left(\hat{C}^{A_j}\right)+\sum_{j=1}^{m} \varepsilon\left(\hat{C}^{B_j}\right)+1, \tag{2.58}$$

$$\varepsilon\left(\hat{H}_0\right)=0, \qquad \varepsilon\left(\hat{V}^{A_1 \ldots A_n}_{B_m \ldots B_1}\right)=\sum_{j=1}^{n} \varepsilon\left(\hat{C}^{A_j}\right)+\sum_{j=1}^{m} \varepsilon\left(\hat{C}^{B_j}\right). \tag{2.59}$$

При перестановке двух любых соседних индексов, верхних $A_{i-1}$, $A_i$ или нижних $B_i$, $B_{i-1}$, операторы (2. 56), (2. 57) приобретают соответствующие знаковые факторы

$$-(-1)^{\left[\varepsilon\left(\hat{C}^{A_{i-1}}\right)+1\right]\left[\varepsilon\left(\hat{C}^{A_i}\right)+1\right]} \tag{2.60}$$

или

$$-(-1)^{\left[\varepsilon\left(\hat{C}^{B_i}\right)+1\right]\left[\varepsilon\left(\hat{C}^{B_{i-1}}\right)+1\right]}. \tag{2.61}$$

Введем теперь следующее обозначение для полностью раскрытой записи любой величины:

$$\hat{K}^{A_1 \ldots A_n}_{B_m \ldots B_1} \equiv \hat{K}^{s_1 \ldots s_n \,|\, \alpha^1_{s_1} \ldots \alpha^n_{s_n}}_{r_m \ldots r_1 \,|\, \beta^m_{r_m} \ldots \beta^1_{r_1}}, \tag{2.62}$$

несущей конденсированные в смысле (2. 15) верхние индексы

$$A_i=\left(s_i,\ \alpha^i_{s_i}\right), \qquad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{2.63}$$

и нижние индексы

$$B_j=\left(r_j,\ \beta^j_{r_j}\right), \qquad j=1,\ \ldots,\ m, \tag{2.64}$$

где $0 \leqslant s_i \leqslant L, \quad 0 \leqslant r_j \leqslant L,$ (2. 65)

$$1 \leqslant \alpha^i_{s_i} \leqslant m_{s_i}, \qquad 1 \leqslant \beta^j_{r_j} \leqslant m_{r_j}.$$

В этих обозначениях операторы (2. 15) записываются в виде

$$\hat{\mathscr{P}}_A=\hat{\mathscr{P}}_{s\,|\,\alpha_s} \equiv \hat{\mathscr{P}}_{s\alpha_s}, \qquad \hat{C}^A=\hat{C}^{s\,|\,\alpha_s} \equiv \hat{C}^{\alpha_s}_s. \tag{2.66}$$

Определения (2. 50), (2. 51) множеств $\mu^n_m$, $\nu^n_m$ записываются в виде

$$\mu^n_m\colon\ \sum_{j=1}^{m}\left(r_j+1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(s_i+1\right)+1, \tag{2.67}$$

$$\nu^n_m\colon\ \sum_{j=1}^{m}\left(r_j+1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(s_i+1\right). \tag{2.68}$$

Если в качестве величин (2. 62) взяты операторы (2. 56), (2. 57) с наборами нижних индексов из множеств $\mu^n_m$, $\nu^n_m$ соответственно, то грассманова четность этих операторов согласно (2. 58), (2. 59) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{s_i\alpha^i_{s_i}} + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{r_j\beta^j_{r_j}} \tag{2.69}$$

как для (2. 56), так и для (2. 57), причем $\varepsilon_{s\sigma_s}$ суть грассмановы четности из распределения (2. 6).

Показатели (2. 54), (2. 55) записываются как

$$E^{s_1 \ldots s_n \mid \alpha^1_{s_1} \ldots \alpha^n_{s_n}} = \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=k}^{n} \left(\varepsilon_{s_j\alpha^j_{s_j}} + s_j\right), \tag{2.70}$$

$$E_{r_1 \ldots r_m \mid \beta^1_{r_1} \ldots \beta^m_{r_m}} = \sum_{k=2}^{m} \sum_{j=k}^{m} \left(\varepsilon_{r_j\beta^j_{r_j}} + r_j\right). \tag{2.71}$$

Введем специальное обозначение

$$\hat{Z}^{\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s} \equiv \hat{U}^{s-1 \mid \alpha_{s-1}}_{s \mid \alpha_s}(\hat{p},\ \hat{q}) \tag{2.72}$$

для операторов (2. 56) при $n=m=1$ в секторах

$$A_1 = (s-1,\ \alpha_{s-1}), \qquad B_1 = (s,\ \alpha_s).$$

Явная форма разложений (2. 48), (2. 49) при $n=1$ в нулевом секторе $A_1=(0,\ \alpha_0)$ имеет вид

$$\hat{U}^{0\mid\alpha_0} = \frac{1}{2}\hat{U}^{0 \mid \alpha_0}_{00 \mid \beta_0\gamma_0}(\hat{p},\ \hat{q})\,\hat{C}^{\gamma_0}_0\hat{C}^{\beta_0}_0(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}} + \hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}(\hat{p},\ \hat{q})\,\hat{C}^{\alpha_1}_1, \tag{2.73}$$

$$\hat{V}^{0\mid\alpha_0} = \hat{V}^{0 \mid \alpha_0}_{0 \mid \beta_0}(\hat{p},\ \hat{q})\,\hat{C}^{\beta_0}_0. \tag{2.74}$$

Подставляя (2. 46), (2. 73) в низшее уравнение (2. 35), получим

$$[\hat{T}_{0\alpha_0},\ \hat{T}_{0\beta_0}] = i\hbar\hat{T}_{0\gamma_0}\hat{U}^{\gamma_0}_{\alpha_0\beta_0}, \tag{2.75}$$

$$\hat{T}_{0\alpha_0}\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1} = 0, \tag{2.76}$$

где введено сокращенное обозначение

$$\hat{U}^{\gamma_0}_{\alpha_0\beta_0} \equiv \hat{U}^{0 \mid \gamma_0}_{00 \mid \alpha_0\beta_0}(\hat{p},\ \hat{q}), \tag{2.77}$$

причем эти операторы антисимметричны по нижним индексам

$$\hat{U}^{\gamma_0}_{\alpha_0\beta_0} = -\hat{U}^{\gamma_0}_{\beta_0\alpha_0}(-1)^{\varepsilon_{0\alpha_0}\varepsilon_{0\beta_0}}. \tag{2.78}$$

Подставляя (2. 46), (2. 48), (2. 74) в низшее уравнение (2. 39), получим

$$[\hat{H}_0,\ \hat{T}_{0\beta_0}] = i\hbar\hat{T}_{0\gamma_0}\hat{V}^{\gamma_0}_{\beta_0}, \tag{2.79}$$

где обозначено

$$\hat{V}^{\gamma_0}_{\beta_0} \equiv \hat{V}^{0 \mid \gamma_0}_{0 \mid \beta_0}(\hat{p},\ \hat{q}). \tag{2.80}$$

Уравнения (2. 75), (2. 79) суть не что иное, как соотношения инволюции операторов связей первого рода $\hat{T}_{0\alpha_0}(\hat{p},\ \hat{q})$ между собой и исходным гамильтонианом $\hat{H}_0(\hat{p},\ \hat{q})$. Уравнение (2. 76) показывает, что $\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}(\hat{p},\ \hat{q})$ суть правые операторные нуль-векторы операторов связей первого рода.

Рассмотрим теперь уравнение (2. 36) при $n=1$ в секторе $A_1=(0,\ \alpha_0)$

$$[\hat{U}^{0|\alpha_0},\ \hat{U}_0]+i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}_0^{\beta_0}}\hat{U}^{0|\beta_0}+i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}_1^{\beta_1}}\hat{U}^{1|\beta_1}+$$
$$+(i\hbar)^2\frac{\partial_r^2\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}_0^{\beta_0}\partial\hat{C}_0^{\gamma_0}}\hat{U}^{00|\beta_0\gamma_0}=2i\hbar\hat{T}_{0\beta_0}\hat{U}^{00|\beta_0\alpha_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}}, \qquad (2.81)$$

где
$$\hat{U}^{1|\alpha_1}=1/_6\hat{U}^{1|\alpha_1}_{000|\alpha_0\beta_0\gamma_0}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_0^{\gamma_0}\hat{C}_0^{\beta_0}\hat{C}_0^{\alpha_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}}+$$
$$+1/_2\left(\hat{U}^{1|\alpha_1}_{01|\beta_0\beta_1}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_1^{\beta_1}\hat{C}_0^{\beta_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}}-\hat{U}^{1|\alpha_1}_{10|\beta_1\beta_0}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_0^{\beta_0}\hat{C}_1^{\beta_1}(-1)^{\varepsilon_{1\beta_1}}\right)+$$
$$+\hat{Z}^{\alpha_1}_{2\alpha_2}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_2^{\alpha_2}, \qquad (2.82)$$

$$(-1)^{\varepsilon_{0\nu_0}}\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}=1/_{12}\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}_{000|\alpha_0\beta_0\gamma_0}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_0^{\gamma_0}\hat{C}_0^{\beta_0}\hat{C}_0^{\alpha_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}}+$$
$$+1/_4\left(\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}_{01|\beta_0\beta_1}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_1^{\beta_1}\hat{C}_0^{\beta_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}}-\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}_{10|\beta_1\beta_0}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_0^{\beta_0}\hat{C}_1^{\beta_1}(-1)^{\varepsilon_{1\beta_1}}\right)+$$
$$+1/_2\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}_{2|\alpha_2}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}_2^{\alpha_2}. \qquad (2.83)$$

Из (2. 81) получим следующие соотношения для коэффициентов при каждой степени гостов $\hat{C}_0$, $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ в операторных полиномах (2. 73), (2. 82), (2. 83):

$\hat{C}_0^3$-члены дают

$$\left(\left[\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0},\ \hat{T}_{0\delta_0}\right]-i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\mu_0}\hat{U}^{\mu_0}_{\gamma_0\delta_0}\right)(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\delta_0}}+\text{cycl. perm.}(\beta_0,\ \gamma_0,\ \delta_0)=$$
$$=1/_2 i\hbar\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}\hat{U}^{\nu_0\mu_0}_{\beta_0\gamma_0\delta_0}-i\hbar\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}\hat{U}^{\alpha_1}_{\beta_0\gamma_0\delta_0}, \qquad (2.84)$$

где использованы сокращенные обозначения:

$$\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}\equiv\delta^{\alpha_0}_{\mu_0}\hat{T}_{0\nu_0}-\delta^{\alpha_0}_{\nu_0}\hat{T}_{0\mu_0}(-1)^{\varepsilon_{0\mu_0}\varepsilon_{0\nu_0}}-i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}, \qquad \hat{T}_{0\alpha_0}\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}\equiv 0, \qquad (2.85)$$

$$\hat{U}^{\mu_0\nu_0}_{\beta_0\gamma_0\delta_0}\equiv\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}_{000|\beta_0\gamma_0\delta_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\delta_0}}, \qquad (2.86)$$

$$\hat{U}^{\alpha_1}_{\beta_0\gamma_0\delta_0}\equiv\hat{U}^{1|\alpha_1}_{000|\beta_0\gamma_0\delta_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\delta_0}}; \qquad (2.87)$$

$\hat{C}_0\hat{C}_1$-члены дают

$$\left[\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1},\ \hat{T}_{0\beta_0}\right]-i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\hat{Z}^{\gamma_0}_{1\alpha_1}(-1)^{\varepsilon_{1\alpha_1}\varepsilon_{0\beta_0}}=-1/_2 i\hbar\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}\hat{U}^{\nu_0\mu_0}_{\alpha_1\beta_0}+i\hbar\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\beta_1}\hat{U}^{\beta_1}_{\alpha_1\beta_0}, \qquad (2.88)$$

где обозначено:

$$\hat{U}^{\mu_0\nu_0}_{\alpha_1\beta_0}\equiv\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}_{10|\alpha_1\beta_0}, \qquad (2.89)$$

$$\hat{U}^{\beta_1}_{\alpha_1\beta_0}\equiv\hat{U}^{1|\beta_1}_{10|\alpha_1\beta_0}; \qquad (2.90)$$

$\hat{C}_2$-члены дают

$$\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}\hat{Z}^{\alpha_1}_{2\alpha_2}=1/_2\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}\hat{U}^{\nu_0\mu_0}_{\alpha_2}, \qquad (2.91)$$

где $\hat{U}^{\mu_0\nu_0}_{\alpha_2}\equiv\hat{U}^{00|\mu_0\nu_0}_{2|\alpha_2}$. (2.92)

Умножим уравнение (2. 84) слева на $\hat{T}_{0\alpha_0}$. При этом в силу (2. 76), (2. 85) правая часть (2. 84) не даст вклада, и мы имеем

$$\hat{T}_{0\alpha_0}\left\{\left(\left[\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0},\ \hat{T}_{0\delta_0}\right]-i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\mu_0}\hat{U}^{\mu_0}_{\gamma_0\delta_0}\right)(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\delta_0}}+\right.$$
$$\left.+\text{cycl. perm.}(\beta_0,\ \gamma_0,\ \delta_0)\right\}=0. \qquad (2.93)$$

Соотношение (2. 93) есть не что иное, как необходимое условие совместности инволюции (2. 75), являющееся следствием циклического тождества Якоби (1. 4) для операторов связей:

$$[[\hat{T}_{0\beta_0}, \hat{T}_{0\gamma_0}], \hat{T}_{0\delta_0}](-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\delta_0}} + \text{cycl. perm. } (\beta_0, \gamma_0, \delta_0) \equiv 0. \tag{2.94}$$

Таким образом, уравнение (2. 84), которое мы назовем низшим соотношением Якоби, обеспечивает формальное выполнение необходимых условий совместности соотношений инволюции (2. 75) для связей.

Теперь умножим (2. 88) слева на $\hat{T}_{0\alpha_0}$. Правая часть (2. 88) также не даст вклада в силу (2. 76), (2. 85), и мы имеем

$$\hat{T}_{0\alpha_0}[\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}, \hat{T}_{0\beta_0}] - i\hbar\hat{T}_{0\alpha_0}\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\hat{Z}^{\gamma_0}_{1\alpha_1}(-1)^{\varepsilon_{1\alpha_1}\varepsilon_{0\beta_0}} = 0. \tag{2.95}$$

Это соотношение является необходимым условием совместности инволюции (2. 75) и уравнения (2. 76). В самом деле, из (2. 76) мы имеем

$$[\hat{T}_{0\alpha_0}\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}, \hat{T}_{0\beta_0}] = 0, \tag{2.96}$$

откуда в силу (2. 75) получим (2. 95). Таким образом, уравнение (2. 88) обеспечивает формальное выполнение необходимых условий совместности инволюции (2. 75) и уравнения (2. 76).

Наконец, уравнение (2. 91) показывает, что $\hat{Z}^{\alpha_1}_{2\alpha_2}$ являются «слабыми» правыми операторными нуль-векторами операторов $\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}$. Здесь имеется в виду следствие (2. 91) в классическом пределе:

$$Z^{\alpha_0}_{1\alpha_1}Z^{\alpha_1}_{2\alpha_2}\big|_{T_0=0} = 0. \tag{2.97}$$

Необходимые в силу (2. 76) условия совместности уравнений (2. 91) формально выполнены в силу (2. 85). Уравнения (2. 84), (2. 88), (2. 91) исчерпывают содержание (2. 81).

Обратимся теперь к уравнению (2. 40) при $n=1$ в секторе $A_1=(0, \alpha_0)$:

$$\begin{aligned}&[\hat{V}^{0|\alpha_0}, \hat{U}_0] - [\hat{U}^{0|\alpha_0}, \hat{H}_0] + i\hbar\frac{\partial_r\hat{V}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}^{\beta_0}_0}\hat{U}^{0|\beta_0} - i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}^{\beta_0}_0}\hat{V}^{0|\beta_0} - \\ &\quad - i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}^{\beta_1}_1}\hat{V}^{1|\beta_1} - (i\hbar)^2\frac{\partial^2_r\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}^{\beta_0}_0\partial\hat{C}^{\gamma_0}_0}\hat{V}^{00|\beta_0\gamma_0} = \\ &\quad = -2i\hbar\hat{T}_{0\beta_0}\hat{V}^{00|\beta_0\alpha_0}(-1)^{\varepsilon_{0\alpha_0}},\end{aligned} \tag{2.98}$$

где $\hat{V}^{1|\alpha_1} = {}^1/_2\hat{V}^{1|\alpha_1}_{00|\beta_0\gamma_0}(\hat{p}, \hat{q})\hat{C}^{\gamma_0}_0\hat{C}^{\beta_0}_0(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}} + \hat{V}^{1|\alpha_1}_{1|\beta_1}(\hat{p}, \hat{q})\hat{C}^{\beta_1}_1,$ (2. 99)

$$\begin{aligned}(-1)^{\varepsilon_{0\nu_0}}\hat{V}^{00|\mu_0\nu_0} &= {}^1/_4\hat{V}^{00|\mu_0\nu_0}_{00|\alpha_0\beta_0}(\hat{p}, \hat{q})\hat{C}^{\beta_0}_0\hat{C}^{\alpha_0}_0(-1)^{\varepsilon_{0\alpha_0}} + \\ &+ {}^1/_2\hat{V}^{00|\mu_0\nu_0}_{1|\alpha_1}(\hat{p}, \hat{q})\hat{C}^{\alpha_1}_1.\end{aligned} \tag{2.100}$$

$\hat{C}^2_0$-члены в (2. 98) дают

$$\begin{aligned}&[\hat{V}^{\alpha_0}_{\beta_0}, \hat{T}_{0\gamma_0}] - [\hat{V}^{\alpha_0}_{\gamma_0}, \hat{T}_{0\beta_0}](-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\gamma_0}} + [\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}, \hat{H}_0] - i\hbar\hat{V}^{\alpha_0}_{\mu_0}\hat{U}^{\mu_0}_{\beta_0\gamma_0} + \\ &\quad + i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\mu_0}\hat{V}^{\mu_0}_{\gamma_0} - i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\gamma_0\mu_0}\hat{V}^{\mu_0}_{\beta_0}(-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\gamma_0}} = \\ &\quad = {}^1/_2 i\hbar\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}\hat{V}^{\nu_0\mu_0}_{\beta_0\gamma_0} - i\hbar\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}\hat{V}^{\alpha_1}_{\beta_0\gamma_0},\end{aligned} \tag{2.101}$$

где $\hat{V}^{\mu_0\nu_0}_{\alpha_0\beta_0} \equiv \hat{V}^{00|\mu_0\nu_0}_{00|\alpha_0\beta_0},$ (2. 102)

$$\hat{V}^{\alpha_1}_{\alpha_0\beta_0} \equiv \hat{V}^{1|\alpha_1}_{00|\alpha_0\beta_0}. \tag{2.103}$$

$\hat{C}_1$-члены в (2. 98) дают

$$\left[\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1},\ \hat{H}_0\right] - i\hbar \hat{V}^{\alpha_0}_{\beta_0} \hat{Z}^{\beta_0}_{1\alpha_1} = i\hbar \cdot {}^1/_2 \hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0} \hat{V}^{\nu_0\mu_0}_{\alpha_1} - i\hbar \hat{Z}^{\alpha_0}_{1\beta_1} \hat{V}^{\beta_1}_{\alpha_1}, \tag{2.104}$$

где $\hat{V}^{\mu_0\nu_0}_{\alpha_1} \equiv \hat{V}^{00\,|\,\mu_0\nu_0}_{1\,|\,\alpha_1}$, (2.105)

$$\hat{V}^{\beta_1}_{\alpha_1} \equiv \hat{V}^{1\,|\,\beta_1}_{1\,|\,\alpha_1}. \tag{2.106}$$

Умножая (2. 101), (2. 104) слева на $\hat{T}_{0\alpha_0}$, получим соотношения, обеспечивающие формальное выполнение необходимых условий совместности (2. 79) и (2. 75), (2. 76). Для (2. 79) и (2. 75) указанные условия совместности суть

$$[[\hat{T}_{0\beta_0},\ \hat{T}_{0\gamma_0}],\ \hat{H}_0] \equiv -[[\hat{H}_0,\ \hat{T}_{0\beta_0}],\ \hat{T}_{0\gamma_0}] + [[\hat{H}_0,\ \hat{T}_{0\gamma_0}],\ \hat{T}_{0\beta_0}](-1)^{\varepsilon_{0\beta_0}\varepsilon_{0\gamma_0}} =$$
$$= i\hbar\left[\hat{T}_{0\alpha_0}\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0},\ \hat{H}_0\right] \equiv i\hbar \hat{T}_{0\alpha_0}\left[\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0},\ \hat{H}_0\right] - i\hbar\left[\hat{H}_0,\ \hat{T}_{0\alpha_0}\right]\hat{U}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}. \tag{2.107}$$

Условия совместности (2. 79) и (2. 76) имеют вид

$$\left[\hat{T}_{0\alpha_0}\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1},\ \hat{H}_0\right] \equiv \hat{T}_{0\alpha_0}\left[\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1},\ \hat{H}_0\right] - \left[\hat{H}_0,\ \hat{T}_{0\alpha_0}\right]\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1} = 0. \tag{2.108}$$

Уравнения (2. 101), (2. 104) исчерпывают содержание (2. 98).

Итак, мы полностью выяснили смысл низших уравнений из (2. 36), (2. 40), соответствующих $n=1$ в секторе $A_1=(0,\ \alpha_0)$. Эти уравнения содержат информацию двоякого рода. Во-первых, в них содержатся низшие соотношения Якоби (2. 84), (2. 101), обеспечивающие формальную совместность в инволюции (2. 75) для связей и в инволюции (2. 79) для связей и гамильтониана, а также низшие соотношения Якоби (2. 88) и (2. 104), обеспечивающие формальную совместность уравнения (2. 76) для нуль-векторов (2. 72) при $s=1$ с инволюциями (2. 75), (2. 79). Во-вторых, они содержат уравнение (2. 91) для следующих «слабых» в смысле (2. 97) нуль-векторов (2. 72) при $s=2$.

Информация, содержащаяся в высших уравнениях (2. 36), (2. 40), имеет те же два аспекта, а именно: 1) необходимые условия совместности предыдущих уравнений, т. е. высшие соотношения Якоби и 2) уравнения для следующих «слабых» нуль-векторов (2. 72) при $s=3,\ \ldots,\ L$. Все уравнения для «слабых» нуль-векторов содержатся в (2. 36) при $n=1$, но в высших секторах $A_1=(s,\ \alpha_s)$, где $s=1,\ \ldots,\ L-2$, эти уравнения имеют вид

$$\hat{Z}^{\alpha_{s-2}}_{s-1\alpha_{s-1}}\hat{Z}^{\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s} = \hat{T}_{0\alpha_0}\hat{U}^{\alpha_0\alpha_{s-2}}_{\alpha_s} + O(\hbar), \qquad s=3,\ \ldots,\ L, \tag{2.109}$$

$$\varepsilon\left(\hat{Z}^{\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}\right) = \varepsilon_{s-1\alpha_{s-1}} + \varepsilon_{s\alpha_s}, \tag{2.110}$$

и в классическом пределе правые части (2. 109) исчезают на гиперповерхности связей $T_0=0$.

Итак, уравнения (2. 36), (2. 40) образуют, вообще говоря, бесконечную систему структурных соотношений операторной калибровочной алгебры, генерируемой связями первого рода $\hat{T}_{0\alpha_0}$ и гамильтонианом $\hat{H}_0$. Совокупность структурных операторов (2. 56), (2. 57) образует базис операторной калибровочной алгебры, соответствующий выбранной $\hat{\mathcal{P}}\hat{C}$-нормальной форме для гостов.

В общем случае калибровочная алгебра, генерируемая связями первого рода, является открытой и приводимой. Открытость (незамкнутость) алгебры проявляется в наличии в правых частях низших соотношений Якоби (2. 84), (2. 101) ненулевых членов, содержащих операторы (2. 86), (2. 102). Приводимость калибровочной алгебры проявляется в наличии нетривиальных (см. ниже) операторных нуль-векторов (2. 72).

Мы говорим, что калибровочная алгебра имеет $L$-ю стадию приводимости, если в классическом пределе (в смысле (1. 14)) имеет место следующее:

$$T_{0\alpha_0}Z^{\alpha_0}_{1\alpha_1}=0, \tag{2.111}$$

$$Z^{\alpha_{s-2}}_{s-1\,\alpha_{s-1}}Z^{\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}\Big|_{T_0=0}=0, \qquad s=2,\ \ldots,\ L, \tag{2.112}$$

$$\varepsilon\left(Z^{\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}\right)=\varepsilon_{s-1\,\alpha_{s-1}}+\varepsilon_{s\alpha_s}, \tag{2.113}$$

$$\operatorname{rank}_\pm\left\|\frac{\partial_l T_{0\alpha_0}}{\partial\varphi^a}\right\|\Bigg|_{T_0=0}=\gamma_0(L)_\pm, \qquad \varphi^a\equiv(p_i,\ q^i), \tag{2.114}$$

$$\operatorname{rank}_\pm\left\|Z^{\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}\right\|\Big|_{T_0=0}=\gamma_s(L)_\pm, \qquad s=1,\ \ldots,\ L, \tag{2.115}$$

где $\gamma_s(L)_\pm$, $s=0,\ \ldots,\ L$, определено (2. 6)—(2. 8).

Уравнения (2. 111), (2. 112) — это просто классический аналог (2. 76), (2. 91), (2. 109). Поэтому содержательный аспект определения $L$-й стадии приводимости выражается фиксацией значений рангов (2. 114), (2. 115) на гиперповерхности связей. Ранг (2. 114) фиксирует истинное число

$$n^*_\pm(L)=n_\pm-\gamma_0(L)_\pm \tag{2.116}$$

физических степеней свободы теории. Ранги (2. 114), (2. 115) показывают также, что объекты

$$\frac{\partial_l T_{0\alpha_0}}{\partial\varphi^a}, \qquad Z^{\alpha_0}_{1\alpha_1},\ \ldots,\ Z^{\alpha_{L-1}}_{L\alpha_L} \tag{2.117}$$

образуют на гиперповерхности связей точную последовательность.

Рассмотрим теперь в рамках низших уравнений (2. 35), (2. 39), (2. 81), (2. 98) начальные этапы процесса последовательного определения структурных операторов калибровочной алгебры. Пусть «изначально данными» являются операторы исходного гамильтониана $\hat H_0$ и связей $\hat T_{0\alpha_0}$. Предположим, что эти операторы действительно генерируют калибровочную алгебру. Тогда структурные соотношения последовательно решаются следующим образом. Инволюция (2. 75) определяет операторы (2. 77), а уравнение (2. 76) — операторы (2. 72) при $s=1$. Далее из уравнения (2. 84) определяются операторы (2. 86), (2. 87). Затем уравнение (2. 88) определяет операторы (2. 89), (2. 90), а уравнение (2. 91) — операторы (2. 92). Аналогично инволюция (2. 79) определяет операторы (2. 80). Затем из уравнения (2. 101) определяются операторы (2. 102), (2. 103), а из уравнения (2. 104) — операторы (2. 105), (2. 106). Далее этот процесс продолжается в рамках высших уравнений (2. 36), (2. 40). Разумеется, структурные операторы (2. 56), (2. 57) определяются из соответствующих уравнений (2. 36), (2. 40) не единственным образом. Естественный произвол в их определении отвечает возможности канонических преобразований

$$\hat\Omega_{\min}\to\hat{\mathfrak{A}}^{-1}\hat\Omega_{\min}\hat{\mathfrak{A}}, \qquad \hat H_{\min}\to\hat{\mathfrak{A}}^{-1}\hat H_{\min}\hat{\mathfrak{A}}, \tag{2.118}$$

где $\hat{\mathfrak{A}}$ есть унитарный оператор

$$\hat{\mathfrak{A}}^{-1}=\hat{\mathfrak{A}}^{+}, \tag{2.119}$$

зависящий от (2. 16).

Кроме того, в определении оператора $\hat H_{\min}$ существует произвол, обусловленный именно уравнением (2. 17):

$$\hat H_{\min}\to\hat H_{\min}+(i\hbar)^{-1}[\hat\Lambda,\ \hat\Omega_{\min}], \tag{2.120}$$

где $\hat\Lambda$ есть оператор, зависящий от (2. 16), со свойствами

$$\varepsilon(\hat\Lambda)=1, \qquad \mathrm{gh}(\hat\Lambda)=-1, \qquad \hat\Lambda^{+}=-\hat\Lambda. \tag{2.121}$$

## 3. УНИТАРИЗУЮЩИЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Введем теперь в рассмотрение новые операторы

$$\text{i)}\ \left(\hat{\pi}_{s\alpha_s},\ \hat{\lambda}_s^{\alpha_s}\right),\qquad \text{ii)}\ \left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s},\ \hat{\mathcal{P}}_s^{\alpha_s}\right),\qquad \alpha_s=1,\ \ldots,\ m_s;\qquad s=0,\ \ldots,\ L; \tag{3.1}$$

а также

$$\text{i)}\ \left(\hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'},\ \hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s}\right),\qquad \text{ii)}\ \left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}^{s'},\ \hat{\mathcal{P}}_s^{s'\alpha_s}\right), \tag{3.2}$$
$$\alpha_s=1,\ \ldots,\ m_s;\qquad s'=1,\ \ldots,\ L;\qquad s=s',\ \ldots,\ L.$$

Операторы i) и ii) из (3. 1) суть соответственно лагранжевы множители и госты вспомогательного сектора; операторы (3. 2) образуют сектор экстрагостов. Операторы (3. 1), (3. 2) имеют следующую статистику:

$$\varepsilon\left(\hat{\pi}_{s\alpha_s}\right)=\varepsilon\left(\hat{\lambda}_s^{\alpha_s}\right)=\varepsilon_{s\alpha_s}+s, \tag{3.3}$$

$$\varepsilon\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}\right)=\varepsilon\left(\hat{\mathcal{P}}_s^{\alpha_s}\right)=\varepsilon_{s\alpha_s}+s+1, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon\left(\hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'}\right)=\varepsilon\left(\hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s}\right)=\varepsilon_{s\alpha_s}+s-s', \tag{3.5}$$

$$\varepsilon\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}^{s'}\right)=\varepsilon\left(\hat{\mathcal{P}}_s^{s'\alpha_s}\right)=\varepsilon_{s\alpha_s}+s-s'+1; \tag{3.6}$$

и гостовское число:

$$\mathrm{gh}\left(\hat{\pi}_{s\alpha_s}\right)=-\mathrm{gh}\left(\hat{\lambda}_s^{\alpha_s}\right)=-s, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{gh}\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}\right)=-\mathrm{gh}\left(\hat{\mathcal{P}}_s^{\alpha_s}\right)=-(s+1), \tag{3.8}$$

$$\mathrm{gh}\left(\hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'}\right)=-\mathrm{gh}\left(\hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s}\right)=-(s-s'), \tag{3.9}$$

$$\mathrm{gh}\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}^{s'}\right)=-\mathrm{gh}\left(\hat{\mathcal{P}}_s^{s'\alpha_s}\right)=-(s-s'+1). \tag{3.10}$$

Операторы каждой пары i) и ii) в (3. 1), (3. 2) подчинены каноническим одновременным коммутационным соотношениям, так что для них отличны от нуля только коммутаторы

$$\left[\hat{\lambda}_s^{\alpha_s},\ \hat{\pi}_{r\beta_r}\right]=i\hbar\delta_{sr}\delta_{\beta_r}^{\alpha_s}\hat{1}, \tag{3.11}$$

$$\left[\hat{\mathcal{P}}_s^{\alpha_s},\ \hat{\mathcal{C}}_{r\beta_r}\right]=i\hbar\delta_{sr}\delta_{\beta_r}^{\alpha_s}\hat{1}, \tag{3.12}$$

$$\left[\hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s},\ \hat{\pi}_{r\beta_r}^{r'}\right]=i\hbar\delta_{sr}\delta^{s'r'}\delta_{\beta_r}^{\alpha_s}\hat{1}, \tag{3.13}$$

$$\left[\hat{\mathcal{P}}_s^{s'\alpha_s},\ \hat{\mathcal{C}}_{r\beta_r}^{r'}\right]=i\hbar\delta_{sr}\delta^{s'r'}\delta_{\beta_r}^{\alpha_s}\hat{1}. \tag{3.14}$$

Наконец, операторы (3. 1), (3. 2) обладают следующими совместимыми с (3. 11)—(3. 14) свойствами относительно эрмитова сопряжения:

$$\left(\hat{\pi}_{s\alpha_s}\right)^{+}=\hat{\pi}_{s\alpha_s},\qquad \left(\hat{\lambda}_s^{\alpha_s}\right)^{+}=\hat{\lambda}_s^{\alpha_s}(-1)^{\varepsilon\left(\hat{\lambda}_s^{\alpha_s}\right)}, \tag{3.15}$$

$$\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}\right)^{+}=\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}(-1)^{\varepsilon\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}\right)},\qquad \left(\hat{\mathcal{P}}_s^{\alpha_s}\right)^{+}=\hat{\mathcal{P}}_s^{\alpha_s}, \tag{3.16}$$

$$\left(\hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'}\right)^{+}=\hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'},\qquad \left(\hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s}\right)^{+}=\hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s}(-1)^{\varepsilon\left(\hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s}\right)}, \tag{3.17}$$

$$\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}^{s'}\right)^{+}=\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}^{s'}(-1)^{\varepsilon\left(\hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}^{s'}\right)},\qquad \left(\hat{\mathcal{P}}_s^{s'\alpha_s}\right)^{+}=\hat{\mathcal{P}}_s^{s'\alpha_s}. \tag{3.18}$$

Вместе с (2. 16) операторы (3. 1), (3. 2) образуют полный набор $\hat{\Gamma}$ операторов расширенного (релятивистского) фазового пространства

$$\hat{\Gamma}\equiv\left(\hat{P}_M,\ \hat{Q}^M\right), \tag{3.19}$$

где
$$\hat{P}_M\equiv\left(\hat{p}_i,\ \hat{\mathcal{P}}_{s\alpha_s},\ \hat{\pi}_{s\alpha_s},\ \hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s},\ \hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'},\ \hat{\mathcal{C}}_{s\alpha_s}^{s'}\right), \tag{3.20}$$

$$\hat{Q}^M\equiv\left(\hat{q}^i,\ \hat{\mathcal{C}}_s^{\alpha_s},\ \hat{\lambda}_s^{\alpha_s},\ \hat{\mathcal{P}}_s^{\alpha_s},\ \hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s},\ \hat{\mathcal{P}}_s^{s'\alpha_1}\right). \tag{3.21}$$

Операторы (3. 20), (3. 21) очевидным образом удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям (1. 10).

В предыдущем разделе мы подробно рассмотрели построение фермионного $\hat{\Omega}_{\min}$ и бозонного $\hat{H}_{\min}$ производящих операторов калибровочной алгебры. Теперь эти операторы в свою очередь послужат основой для построения операторной версии унитаризующего гамильтониана. В качестве предварительного шага определим расширение оператора $\hat{\Omega}_{\max}$ из (2. 17), (2. 19), (2. 23):

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_{\min} + \sum_{s=0}^{L} \hat{\pi}_{s\alpha_s} \hat{\mathscr{P}}_s^{\alpha_s} + \sum_{s'=1}^{L} \sum_{s=s'}^{L} \hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'} \hat{\mathscr{P}}_s^{s'\alpha_s}. \tag{3.22}$$

Мы имеем для (3. 22)

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = 0, \qquad \varepsilon(\hat{\Omega}) = 1, \qquad \mathrm{gh}(\hat{\Omega}) = 1, \tag{3.23}$$

$$\hat{\Omega}^+ = \hat{\Omega}. \tag{3.24}$$

Далее обозначим через $\hat{\Psi}$ оператор калибровочного фермиона [2],

$$\varepsilon(\hat{\Psi}) = -1, \qquad \mathrm{gh}(\hat{\Psi}) = -1, \qquad \hat{\Psi}^+ = -\hat{\Psi}, \tag{3.25}$$

зависящий, как и (3. 22), от операторов полного набора (3. 19).

Унитаризующий гамильтониан теории определяется следующей основной формулой:

$$\hat{H}_{\hat{\Psi}} = \hat{H}_{\min} + (i\hbar)^{-1} [\hat{\Psi}, \hat{\Omega}], \tag{3.26}$$

где $\hat{\Omega}$ определено (3. 22), $\hat{H}_{\min}$ есть производящий оператор из (2. 18), (2. 20), (2. 24). Из определения (3. 26) следует, что

$$[\hat{H}_{\hat{\Psi}}, \hat{\Omega}] = 0, \qquad \varepsilon(\hat{H}_{\hat{\Psi}}) = 0, \qquad \mathrm{gh}(\hat{H}_{\hat{\Psi}}) = 0, \tag{3.27}$$

$$(\hat{H}_{\hat{\Psi}})^+ = \hat{H}_{\hat{\Psi}}. \tag{3.28}$$

Унитаризующий гамильтониан (3. 26) служит основой операторного описания динамических систем со связями первого рода.

Назначением оператора $\hat{\Psi}$ калибровочного фермиона является генерация совокупности допустимых калибровочных условий, снимающих вырождение динамики. «Минимальная» версия калибровочного фермиона, генерирующего линейные калибровки, имеет вид

$$\hat{\Psi}_1 = \sum_{s=0}^{L} \left( \hat{\mathscr{P}}_{s\alpha_s} \hat{\lambda}_s^{\alpha_s} + \hat{\bar{C}}_{s\alpha_s} \hat{\chi}_s^{\alpha_s} \right) + \sum_{s'=1}^{L} \sum_{s=s'}^{L} \left( \hat{\bar{C}}_{s\alpha_s}^{s'} \hat{\Phi}_s^{s'\alpha_s} + \hat{\bar{\chi}}_{s\alpha_s}^{s'} \hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s} \right), \tag{3.29}$$

где $\hat{\chi}_0^{\alpha_0} = \omega_{0i}^{\alpha_0} \hat{q}^i + \hat{p}_i \omega_0^{i\alpha_0}$, (3.30)

$$\hat{\chi}_s^{\alpha_s} = \omega_{s\alpha_{s-1}}^{\alpha_s} \hat{C}_{s-1}^{\alpha_{s-1}}, \qquad s = 1, \ldots, L, \tag{3.31}$$

$$\hat{\Phi}_s^{s'\alpha_s} = \sigma_{s\alpha_{s-1}}^{s'\alpha_s} \hat{\lambda}_{s-1}^{s'-1\,\alpha_{s-1}}, \qquad \hat{\lambda}_s^{0\alpha_s} \equiv \hat{\lambda}_s^{\alpha_s}, \tag{3.32}$$

$$\hat{\bar{\chi}}_{s\alpha_s}^{s'} = \hat{\bar{C}}_{s-1\,\alpha_{s-1}}^{s'-1} \bar{\omega}_{s\alpha_s}^{s'\alpha_{s-1}}, \qquad \hat{\bar{C}}_{s\alpha_s}^{0} \equiv \hat{\bar{C}}_{s\alpha_s}, \tag{3.33}$$

суть линейные калибровочные операторы.

Минимальный калибровочный фермион (3. 29) генерирует так называемые сингулярные калибровочные условия, соответствующие $\delta$-функционалам в интеграле по путям. Чтобы включить несингулярные калибровки гауссова типа, следует добавить к (3. 29) члены

$$\hat{\Psi}_2 = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{L} \hat{\bar{C}}_{s\alpha_s}^{s} \varkappa_s^{\alpha_s\beta_s} \hat{\pi}_{s\beta_s}^{s} + \frac{1}{2} \sum_{s'=1}^{L} \sum_{s=s'}^{L} \left( \hat{\bar{C}}_{s\alpha_s}^{s'-1} \tau_{s\beta_s}^{s'\alpha_s} \hat{\mathscr{P}}_s^{s'\beta_s} + \hat{\pi}_{s\alpha_s}^{s'-1} \rho_{s\beta_s}^{s'\alpha_s} \hat{\lambda}_s^{s'\beta_s} \right). \tag{3.34}$$

[2] Условия допустимости для классического предела символа оператора калибровочного фермиона сформулированы в Приложении.

Используя (3. 22), (3. 29), (3. 34), получим следующее выражение для унитаризующего гамильтониана (3. 26), соответствующее линейным несингулярным калибровкам ($\hat{\Psi}=\hat{\Psi}_1+\hat{\Psi}_2$):

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\hat{\Psi}_1+\hat{\Psi}_2} = \hat{H}_{\min} + \sum_{s=0}^{L}\Big((i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}_{\min},\ \hat{\bar{\mathscr{P}}}_{s\alpha_s}]\hat{\lambda}_s^{\alpha_s} + \hat{\bar{\mathscr{P}}}_{s\alpha_s}\hat{\mathscr{P}}_s^{\alpha_s} + \\ + \hat{C}_{s\alpha_s}(i\hbar)^{-1}[\hat{\chi}_s^{\alpha_s},\ \hat{\Omega}_{\min}] + \hat{\pi}_{s\alpha_s}\hat{\chi}_s^{\alpha_s} + {}^1/_2\hat{\pi}^s_{s\alpha_s}\varkappa_s^{\alpha_s\beta_s}\hat{\pi}^s_{s\beta_s}\Big) + \\ + \sum_{s'=1}^{L}\sum_{s=s'}^{L}\Big(\hat{\pi}^{s'}_{s\alpha_s}\hat{\Phi}_s^{s'\alpha_s} + \hat{\chi}^{s'}_{s\alpha_s}\hat{\mathscr{P}}_s^{s'\alpha_s} + \hat{C}^{s'}_{s\alpha_s}(i\hbar)^{-1}\big[\hat{\Phi}_s^{s'\alpha_s},\ \hat{\pi}^{s'-1}_{s-1\alpha_{s-1}}\big]\hat{\mathscr{P}}_{s-1}^{s'-1\alpha_{s-1}} + \\ + \hat{\pi}^{s'-1}_{s-1\alpha_{s-1}}\big[\hat{\mathscr{P}}_{s-1}^{s'-1\alpha_{s-1}},\ \hat{\chi}^{s'}_{s\alpha_s}\big](i\hbar)^{-1}\hat{\lambda}_s^{s'\alpha_s} + \\ + {}^1/_2\hat{\pi}^{s'-1}_{s\alpha_s}\big(\tau_s^{s'} + \rho_s^{s'}\big)^{\alpha_s}_{\beta_s}\hat{\mathscr{P}}_s^{s'\beta_s}\Big).\end{aligned} \tag{3.35}$$

## 4. ОПЕРАТОРНАЯ ДИНАМИКА

Предположим теперь, что мы располагаем унитаризующим гамильтонианом (3. 26), соответствующим допустимому калибровочному фермиону. Временна́я эволюция операторов (3. 20), (3. 21) задается гейзенберговскими уравнениями движения с гамильтонианом (3. 26)

$$i\hbar\partial_t\hat{P}_M = [\hat{P}_M,\ \hat{H}_{\hat{\Psi}}],\qquad i\hbar\partial_t\hat{Q}^M = [\hat{Q}^M,\ \hat{H}_{\hat{\Psi}}]. \tag{4.1}$$

В силу (3. 27) мы имеем отсюда

$$i\hbar\partial_t\hat{\Omega} = [\hat{\Omega},\ \hat{H}_{\hat{\Psi}}] = 0, \tag{4.2}$$

т. е. оператор (3. 22) есть интеграл движения.

Обозначим через $(\hat{P}_M,\ \hat{Q}^M)_{\hat{\Psi}}$ решение операторных уравнений движения (4.1) с калибровочным фермионом $\hat{\Psi}$. Пусть $\Delta\hat{\Psi}$ есть допустимая (конечная) формвариация калибровочного фермиона. Решение уравнений (4.1) с теми же начальными данными, но с гамильтонианом $\hat{H}_{\hat{\Psi}+\Delta\hat{\Psi}}$, соответствующим измененной калибровке, будет

$$(\hat{P}_M,\ \hat{Q}^M)_{\hat{\Psi}+\Delta\hat{\Psi}} = \hat{G}^{-1}_{\Delta\hat{\Psi}}(\hat{P}_M,\ \hat{Q}^M)_{\hat{\Psi}}\hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}}, \tag{4.3}$$

$$i\hbar\partial_t\hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}} = (i\hbar)^{-1}[(\hat{\Omega})_{\hat{\Psi}},\quad (\Delta\hat{\Psi})_{\hat{\Psi}}]\hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}} \tag{4.4}$$

и в начальный момент совпадает с единичным оператором $\hat{1}$. Здесь обозначение $(\hat{F})_{\hat{\Psi}}$ показывает, что оператор $\hat{F}$ взят как функция операторов $(\hat{P}_M,\ \hat{Q}^M)_{\hat{\Psi}}$.

Уравнение (4. 3) утверждает, что вариация калибровки $\hat{\Psi}\to\hat{\Psi}+\Delta\hat{\Psi}$ индуцируется каноническим преобразованием с производящим оператором $\hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}}$. Так как в начальный момент $\hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}}$ есть $\hat{1}$, из (3. 27), (4. 4) следует, что

$$[(\hat{\Omega})_{\hat{\Psi}},\ \hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}}] = 0 \tag{4.5}$$

и, следовательно, в силу (4.3)

$$(\hat{\Omega})_{\hat{\Psi}+\Delta\hat{\Psi}} = \hat{G}^{-1}_{\Delta\hat{\Psi}}(\hat{\Omega})_{\hat{\Psi}}\hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}} = (\hat{\Omega})_{\hat{\Psi}}. \tag{4.6}$$

Определим класс операторов $\hat{E}_{\hat{\Psi}}$, коммутирующих с $\hat{\Omega}$,

$$[\hat{E}_{\Psi},\ \hat{\Omega}] = 0, \tag{4.7}$$

зависящих от калибровочного фермиона $\hat{\Psi}$ по закону, аналогичному (4.3):

$$\hat{E}_{\hat{\Psi}+\Delta\hat{\Psi}} = \hat{G}^{-1}_{\Delta\hat{\Psi}}\hat{E}_{\hat{\Psi}}\hat{G}_{\Delta\hat{\Psi}}. \tag{4.8}$$

В силу (4. 5) из (4. 8) следует, что

$$[\hat{E}_{\hat{\Psi}+\Delta\hat{\Psi}},\ \hat{\Omega}] = 0. \tag{4.9}$$

где учтено (4. 7). Инфинитезимальная форма закона (4. 8) есть

$$\hat{E}_{\hat{\Psi}+\delta\hat{\Psi}} - \hat{E}_{\hat{\Psi}} = = -(i\hbar)^{-1}\left[\hat{\Omega},\ (i\hbar)^{-1}\left[\int\limits_{t_0}^{t}(\delta\hat{\Psi}(t'))_{\hat{\Psi}}\,dt',\ \hat{E}_{\hat{\Psi}}\right]\right]. \qquad (4.10)$$

Физические состояния теории

$$|\,\mathrm{Phys}\rangle,\ \langle\mathrm{Phys}\,| = (|\,\mathrm{Phys}\rangle)^{+} \qquad (4.11)$$

подчинены условиям

$$\hat{\Omega}\,|\,\mathrm{Phys}\rangle = 0 = \langle\mathrm{Phys}\,|\,\hat{\Omega}. \qquad (4.12)$$

Теперь из (4. 10), (4. 12) следует, что

$$\delta_{\Psi}\langle\alpha,\ \mathrm{Phys}\,|\,\hat{E}_{\hat{\Psi}}\,|\,\mathrm{Phys},\ \beta\rangle = 0, \qquad (4.13)$$

т. е. физические матричные элементы операторов из (4. 7), (4. 8) не зависят от калибровки.

Далее, как обычно, каждому оператору $\hat{F}$ в исходном представлении (3. 20), (3. 21), (4. 1) поставим в соответствие оператор $\hat{F}'$ в представлении, зависящем от внешних источников $J_M(t)$, $K^M(t)$:

$$\hat{F}'(t) = \hat{\mathscr{X}}^{-1}(t,\ -\infty)\,\hat{F}(t)\,\hat{\mathscr{X}}(t,\ -\infty), \qquad (4.14)$$

где производящий оператор $\hat{\mathscr{X}}(t,\ -\infty)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\partial_t\hat{\mathscr{X}} = -(J_M\hat{Q}^M + \hat{P}_M K^M)\,\hat{\mathscr{X}},\ \ \hat{\mathscr{X}}\,|_{t=-\infty} = \hat{1}. \qquad (4.15)$$

Операторы $\hat{P}'_M$, $\hat{Q}'^M$ в новом представлении удовлетворяют уравнениям, получающимся из (4. 1) заменой

$$\hat{H}_{\hat{\Psi}} \to \hat{H}'_{\hat{\Psi}'} - J_M\hat{Q}'^M - \hat{P}'_M K^M. \qquad (4.16)$$

Для оператора $\hat{\Omega}'$ в новом представлении мы имеем вместо (4. 2)

$$i\hbar\partial_t\hat{\Omega}' = [(J_M\hat{Q}'^M + \hat{P}'_M K^M),\ \hat{\Omega}']. \qquad (4.17)$$

Уравнение (4. 17) есть не что иное, как операторное соотношение Уорда.

Операторы $\hat{P}'_M$, $\hat{Q}'^M$ зависят от калибровки по закону

$$(\hat{P}'_M,\ \hat{Q}'^M)_{\hat{\Psi}'+\Delta\hat{\Psi}'} = \hat{G}'^{-1}_{\Delta\hat{\Psi}'}(\hat{P}'_M,\ \hat{Q}'^M)_{\hat{\Psi}'}\hat{G}'_{\Delta\hat{\Psi}'}, \qquad (4.18)$$

где $\hat{G}'_{\Delta\hat{\Psi}'}$ задается уравнением

$$i\hbar\partial_t\hat{G}'_{\Delta\hat{\Psi}'} = (i\hbar)^{-1}\left[(\hat{\Omega}')_{\hat{\Psi}'},\ (\Delta\hat{\Psi}')_{\hat{\Psi}'}\right]\hat{G}'_{\Delta\hat{\Psi}'}. \qquad (4.19)$$

Вместо (4. 5) мы имеем в новом представлении

$$\left(i\hbar\partial_t\hat{1} - (i\hbar)^{-1}\left[(\hat{\Omega}')_{\hat{\Psi}'},\ (\Delta\hat{\Psi}')_{\hat{\Psi}'}\right]\right)\left[(\hat{\Omega}')_{\hat{\Psi}'},\ \hat{G}'_{\Delta\hat{\Psi}'}\right] = = \left[\left[(J_M\hat{Q}'^M + \hat{P}'_M K^M)_{\hat{\Psi}'},\ (\hat{\Omega}')_{\hat{\Psi}'}\right],\ \hat{G}'_{\Delta\hat{\Psi}'}\right]. \qquad (4.20)$$

## 5. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ФУНКЦИОНАЛ. ИНТЕГРАЛ ПО ПУТЯМ

Производящий функционал определяется обычным образом как

$$\mathscr{X}(J,\ K) = \langle 0,\ \mathrm{Phys}\,|\,\hat{\mathscr{X}}(+\infty,\ -\infty)\,|\,\mathrm{Phys},\ 0\rangle, \qquad (5.1)$$

где $|\,\mathrm{Phys},\ 0\rangle$ есть основное состояние унитаризующего гамильтониана (3. 26), одновременно удовлетворяющее (4. 12).

Исходя из уравнений движения для операторов $\hat{P}'_M$ $\hat{Q}'^M$ в представлении (4. 14), зависящем от внешних источников, используя (1. 21)—(1. 23) и действуя стандартным методом, получим следующие уравнения в вариационных производных для производящего функционала (5. 1):

$$\left\{\partial_t Q^M - \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\partial_l \tilde{H}_{\Psi}(P(t+\varepsilon),\ Q(t))}{\partial P_M} + K^M(t)\right\}\Bigg|_{P=\frac{\hbar}{i}\frac{\delta_r}{\delta K},\ Q=\frac{\hbar}{i}\frac{\delta_l}{\delta J}} \mathcal{Z}(J,\ K)=0, \tag{5.2}$$

$$\left\{\partial_t P_M + \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\partial_r \tilde{H}_{\Psi}(P(t+\varepsilon),\ Q(t))}{\partial Q^M} + J_M(t)\right\}\Bigg|_{P=\frac{\hbar}{i}\frac{\delta_r}{\delta K},\ Q=\frac{\hbar}{i}\frac{\delta_l}{\delta J}} \mathcal{Z}(J,\ K)=0, \tag{5.3}$$

где $\tilde{H}_{\Psi}(P, Q)$ есть $\hat{P}\hat{Q}$-символ (в смысле (1. 11)) унитаризующего гамильтониана (3. 26) как функции операторов (3. 20), (3. 21).

Решение уравнений (5. 2), (5. 3), получаемое функциональным фурье-преобразованием, имеет вид следующего интеграла по путям:

$$\mathcal{Z} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S^{(\varepsilon)}\right\} d\Gamma, \tag{5.4}$$

где $S^{(\varepsilon)}$ есть «действие»,

$$S^{(\varepsilon)} = \int \left(P_M \dot{Q}^M - \tilde{H}_{\Psi}(P(t+\varepsilon),\ Q(t)) + J_M Q^M + P_M K^M\right) dt, \tag{5.5}$$

$d\Gamma$ есть элемент объема фазового пространства,

$$d\Gamma = (\mathrm{const}) \prod_t \prod_M \frac{dP_M(t)\, dQ^M(t)}{2\pi\hbar}, \tag{5.6}$$

нормировочный фактор (const) определяется условием

$$\mathcal{Z}(J=0,\ K=0)=1. \tag{5.7}$$

Обращение оператора квадратичной части «действия» (5. 5) определено как причинный пропагатор.

Так как в (5. 5) фазовые переменные $P$ и $Q$ входят в $\tilde{H}_{\Psi}$ в несовпадающие моменты времени $t+\varepsilon$ и $t$, функциональный интеграл (5. 4) содержит полную информацию о порядке операторов в гамильтониане (3. 26). Корректность ответа обеспечивается здесь именно благодаря согласованности способа $\varepsilon$-регуляризации в (5. 2), (5. 3), (5. 5) и типа символа.

Итак, мы видим, что уравнения (5. 2), (5. 3) для производящего функционала и эффективное «действие» в интеграле по путям содержит $\varepsilon$-регуляризованный $\hat{P}\hat{Q}$-символ оператора унитаризующего гамильтониана (3. 26). Если мы фактически располагаем явным выражением для оператора (3. 26), то, разумеется, его символ немедленно определяется. Однако с точки зрения соответствия (1. 6)—(1. 8) очевидно, что весь процесс генерации калибровочной алгебры и построения унитаризующего гамильтониана может быть реализован непосредственно в терминах символов. Аналог формулы (3. 26) записывается для соответствующих символов в виде

$$\tilde{H}_{\tilde{\Psi}} = \tilde{H}_{\min} + (i\hbar)^{-1} [\tilde{\Psi},\ \tilde{\Omega}]_*, \tag{5.8}$$

где

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{\min} + \sum_{s=0}^{L} \pi_{s\alpha_s} \mathcal{P}_s^{\alpha_s} + \sum_{s'=1}^{L} \sum_{s=s'}^{L} \pi_{s\alpha_s}^{s'} \mathcal{P}_s^{s'\alpha_s}, \tag{5.9}$$

Символы $\tilde{\Omega}_{\min}$, $\tilde{H}_{\min}$ операторов (2. 23), (2. 24) из (2. 17), (2. 18) удовлетворяют уравнениям

$$[\tilde{\Omega}_{\min},\ \tilde{\Omega}_{\min}]_* = 0, \qquad \mathrm{gh}(\tilde{\Omega}_{\min}) = 1, \tag{5.10}$$

$$[\tilde{H}_{\min},\ \tilde{\Omega}_{\min}]_* = 0, \qquad \mathrm{gh}(\tilde{H}_{\min}) = 0, \tag{5.11}$$

в минимальном секторе $\Gamma_{\min}$.

Уравнения (5. 10), (5. 11) для фермиона $\tilde{\Omega}_{\min}$ и бозона $\tilde{H}_{\min}$ можно непосредственно решать в виде рядов, получающихся из (2. 23), (2. 24) заменой всех операторов их символами. Это дает для символов всех структурных операторов уравнения, получающиеся из (2. 35)—(2. 41) заменой всех операторных произведений и коммутаторов соответствующими $*$-произведениями и $*$-коммутаторами из (1. 12), (1. 8) при неизменном порядке следования множителей. Например, мы имеем следующие соотношения инволюции для символов операторов связей и исходного гамильтониана:

$$[\tilde{T}_{0\alpha_0}, \tilde{T}_{0\beta_0}]_* = i\hbar\tilde{T}_{0\gamma_0} * \tilde{U}^{\gamma_0}_{\alpha_0\beta_0}, \tag{5.12}$$

$$[\tilde{H}_0, \tilde{T}_{0\beta_0}]_* = i\hbar\tilde{T}_{0\gamma_0} * \tilde{V}^{\gamma_0}_{\beta_0}, \tag{5.13}$$

а также следующие уравнения для символов операторов сильных нуль-векторов:

$$\tilde{T}_{0\alpha_0} * \tilde{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1} = 0. \tag{5.14}$$

Исходя из принципа соответствия, мы ограничиваем класс решений операторных уравнений (2. 17), (2. 18) требованием, чтобы символы этих решений допускали разложение в ряды по степеням $\hbar$:

$$\tilde{\Omega}_{\min} = \Omega_{\min} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \tilde{\Omega}^{(n)}_{\min}, \tag{5.15}$$

$$\tilde{H}_{\min} = H_{\min} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \tilde{H}^{(n)}_{\min}. \tag{5.16}$$

Подставляя эти разложения в (5. 10), (5. 11) и используя (1. 17), получим для коэффициентов

$$\{\Omega_{\min}, \Omega_{\min}\} = 0, \tag{5.17}$$

$$\frac{i^2}{2}\{\Omega_{\min}, \Omega_{\min}\}_2 + 2i\{\Omega_{\min}, \tilde{\Omega}^{(1)}_{\min}\} = 0, \tag{5.18}$$

$$\frac{i^n}{n!}\{\Omega_{\min}, \Omega_{\min}\}_n + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{i^m}{m!}2\{\Omega_{\min}, \tilde{\Omega}^{(m)}_{\min}\}_m + \\ + \sum_{m=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{i^l}{l!}\{\tilde{\Omega}^{(m-l)}_{\min}, \tilde{\Omega}^{(n-m)}_{\min}\}_l = 0, \quad n \geqslant 3, \tag{5.19}$$

а также

$$\{H_{\min}, \Omega_{\min}\} = 0, \tag{5.20}$$

$$\frac{i^2}{2}\{H_{\min}, \Omega_{\min}\}_2 + i(\{H_{\min}, \tilde{\Omega}^{(1)}_{\min}\} + \{\tilde{H}^{(1)}_{\min}, \Omega_{\min}\}) = 0, \tag{5.21}$$

$$\frac{i^n}{n!}\{H_{\min}, \Omega_{\min}\}_n + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{i^m}{m!}(\{H_{\min}, \tilde{\Omega}^{(n-m)}_{\min}\}_m + \{\tilde{H}^{(n-m)}_{\min}, \Omega_{\min}\}_m) + \\ + \sum_{m=2}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{i^l}{2l!}(\{\tilde{H}^{(m-l)}_{\min}, \tilde{\Omega}^{(n-m)}_{\min}\}_l + \\ + \{\tilde{H}^{(n-m)}_{\min}, \tilde{\Omega}^{(m-l)}_{\min}\}_l) = 0, \quad n \geqslant 3. \tag{5.22}$$

В этих уравнениях $\{A, B\} \equiv \{A, B\}_1$ — суперскобка Пуассона (1. 20); $\{A, B\}_n$ — бинарная операция, определяемая (1. 18), (1. 16).

Рассмотрим подробнее низшие уравнения (5. 17), (5. 20), генерирующие классическую калибровочную алгебру. Подставляя в (5. 17) разложение

$$\Omega_{\min}=U_0+\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}_{A_n}\ldots\mathscr{P}_{A_1}U^{A_1\ldots A_n}, \tag{5.23}$$

получим классический аналог (2. 35)—(2. 37):

$$\frac{1}{2}\{U_0,\ U_0\}=-\frac{\partial_r U_0}{\partial C^A}U^A, \tag{5.24}$$

$$\{U^{A_1\ldots A_n},\ U_0\}+\frac{\partial_r U^{A_1\ldots A_n}}{\partial C^A}U^A+(X_{\rm sym})^{A_1\ldots A_n}=$$
$$=-(n+1)\frac{\partial_r U_0}{\partial C^A}U^{AA_1\ldots A_n}(-1)^{\varepsilon_0^n}, \tag{5.25}$$

где $X^{A_1}\equiv 0,\qquad X^{A_1\ldots A_n}\equiv\sum\limits_{m=1}^{n-1}(-1)^{\varepsilon_m^n}\Big(\frac{1}{2}\{U^{A_1\ldots A_m},\ U^{A_{m+1}\ldots A_n}\}+$

$$+(n-m+1)\frac{\partial_r U^{A_1\ldots A_m}}{\partial C^A}U^{AA_{m+1}\ldots A_n}\Big). \tag{5.26}$$

Точно так же, подставляя разложение

$$H_{\min}=V_0+\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}_{A_n}\ldots\mathscr{P}_{A_1}V^{A_1\ldots A_n} \tag{5.27}$$

в (5. 20), получим классический аналог (2. 39)—(2. 41):

$$\{V_0,\ U_0\}=\frac{\partial_r U_0}{\partial C^A}V^A, \tag{5.28}$$

$$\{V^{A_1\ldots A_n},\ U_0\}-\{U^{A_1\ldots A_n},\ V_0\}+$$
$$+\frac{\partial_r V^{A_1\ldots A_n}}{\partial C^A}U^A-\frac{\partial_r U^{A_1\ldots A_n}}{\partial C^A}V^A+(Y_{\rm sym})^{A_1\ldots A_n}=$$
$$=(n+1)\frac{\partial_r U_0}{\partial C^A}V^{AA_1\ldots A_n}(-1)^{\varepsilon_0^n}, \tag{5.29}$$

где $Y^{A_1}\equiv 0,\quad Y^{A_1\ldots A_n}\equiv\sum\limits_{m=1}^{n-1}\Big(\{V^{A_1\ldots A_m},\ U^{A_{m+1}\ldots A_n}\}+$

$$+(n-m+1)\Big(\frac{\partial_r V^{A_1\ldots A_m}}{\partial C^A}U^{AA_{m+1}\ldots A_n}-$$
$$-(-1)^{\varepsilon_m^n}\frac{\partial_r U^{A_1\ldots A_m}}{\partial C^A}V^{AA_{m+1}\ldots A_n}\Big)\Big). \tag{5.30}$$

Используя в низших уравнениях (5. 24), (5. 28) классические аналоги (2. 46), (2. 48), (2. 73), (2. 74), получим соотношения

$$\{T_{0\alpha_0},\ T_{0\beta_0}\}=T_{0\gamma_0}U^{\gamma_0}_{\alpha_0\beta_0}, \tag{5.31}$$

$$\{H_0,\ T_{0\beta_0}\}=T_{0\gamma_0}V^{\gamma_0}_{\beta_0}, \tag{5.32}$$

$$T_{0\alpha_0}Z^{\alpha_0}_{1\alpha_1}=0, \tag{5.33}$$

являющиеся классическим пределом (5. 12)—(5. 14).

Рассмотрим классический предел «действия» (5. 5) при $\varepsilon=0$:

$$S^{(0)}_{\rm classical}=\int(P_M\dot{Q}^M-H_\Psi+J_MQ^M+P_MK^M)\,dt, \tag{5.34}$$

$$H_\Psi=H_{\min}+\{\Psi,\ \Omega\} \tag{5.35}$$

есть классический унитаризующий гамильтониан, причем

$$\Omega = \Omega_{\min} + \sum_{s=0}^{L} \pi_{s\alpha_s} \mathscr{P}_s^{\alpha_s} + \sum_{s'=1}^{L} \sum_{s=s'}^{L} \pi_{s\alpha_s}^{s'} \mathscr{P}_s^{s'\alpha_s}, \tag{5.36}$$

так что в силу (5. 17), (5. 20)

$$\{\Omega,\ \Omega\} = 0, \quad \{H_\Psi,\ \Omega\} = 0. \tag{5.37}$$

В силу (5. 37) не зависящая от внешних источников часть действия (5. 34) инвариантна относительно канонических BRS-преобразований:

$$\delta P_M = \{P_M,\ \Omega\}\,\mu, \qquad \delta Q^M = \{Q^M,\ \Omega\}\,\mu, \tag{5.38}$$

где $\mu$ — фермионный параметр.

Если использовать действие (5. 34) для определения формального аналога (5. 4)

$$\mathscr{K}_{\text{Formal}} \equiv \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S^{(0)}_{\text{classical}}\right\} d\Gamma, \tag{5.39}$$

то, выбирая в (5. 38)

$$\mu = \left(\frac{i}{\hbar}\right) \int \delta\Psi\, dt, \tag{5.40}$$

покажем, что соответствующая (5. 39) формальная $S$-матрица не зависит (на массовой оболочке) от выбора калибровочного фермиона в (5. 35).

Формальное выражение (5. 39) для производящего функционала ($S$-матрицы) реализует концепцию «наивного» квантования с помощью интеграла по путям в фазовом пространстве. Первым шагом при таком квантовании является построение классического действия (5. 34) в предположении, что на виртуальных фазовых траекториях действует классическая калибровочная алгебра, генерируемая классическими связями $T_{0\alpha_0}$ и гамильтонианом $H_0$ в рамках уравнений (5. 17), (5. 20), или, что то же самое, (5. 24)—(5. 26), (5. 28)—(5. 30). Затем по классическому действию строится формальное выражение (5. 39).

Функциональный интеграл (5. 39), вообще говоря, существенно зависит от способа вычисления (выбора конечномерной аппроксимации виртуальных фазовых траекторий). Возникающие здесь неопределенности обусловлены утратой информации, касающейся упорядочения операторов в гамильтониане (формальный предел $\varepsilon=0$ непосредственно в действии).

Последовательное операторное квантование приводит, как показано выше, к корректному выражению (5. 4) для производящего функционала ($S$-матрицы). Структура «действия» (5. 5) в модифицированном функциональном интеграле в (5. 4) показывает, что на виртуальных фазовых траекториях фактически действует не классическая, а квантовая калибровочная алгебра, генерируемая символами операторов связей первого рода и исходного гамильтониана. При $\varepsilon > 0$ функциональный интеграл в (5. 5) не зависит от способа вычисления, причем, как уже указывалось выше, именно согласованность способа $\varepsilon$-регуляризации и типа символов обеспечивает корректный учет информации, касающейся упорядочения операторов в гамильтониане.

Для систем с *конечным* числом степеней свободы формальное выражение (5. 39) фактически неприменимо из-за неопределенностей, которые оно содержит. Однако в релятивистской теории поля вклады, обусловленные некоммутативностью одновременных операторов в гамильтониане, представляют собой нековариантные степенные расходимости типа трехмерной дельта-функции или ее производных в совпадающих точках. Считается, что такие вклады несущественны, если используется лоренц-ковариантная ультрафиолетовая регуляризация. Что же касается калибровочно-инвариантной размерной регуляризации, то она вообще автоматически обращает в нуль любые степенные расходимости. Таким образом, считается, что, по крайней мере в некотором классе ультрафиолетовых регуляризаций, «наивное» квантование с помощью формального фазового интеграла по путям (5. 39) является законным применительно к релятивистской теории поля. Следует, однако, иметь в виду, что само по себе формальное выражение (5. 39) не имеет никакого последовательного обоснования с точки зрения стандартных первопринципов квантовой механики. В отсутствие адекватной операторной формулировки, изложенной выше, это выражение могло быть принято всерьез лишь постольку, поскольку существовала вера в возможность такой формулировки. С другой стороны, корректное выражение (5. 5) является прямым следствием стандартных первопринципов квантовой механики, а именно операторных уравнений движения с эрмитовым унитаризующим гамильтонианом и канонических одновременных коммутационных соотношений.

## 6. ЗАМЫКАНИЕ И АБЕЛИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ АЛГЕБРЫ

В классической механике известно, что поворотом базиса (линейным комбинированием с обратимой матрицей, вообще говоря зависящей от фазовых переменных) связи первого рода могут быть локально абелизованы, т. е. сделаны коммутирующими между собой. С более общей точки зрения естественно рассматривать замену исходных связей их линейными комбинациями с обратимыми переменными коэффициентами как один из эффектов канонических преобразований в минимальном секторе, сохраняющих форму производящих уравнений (5. 17), (5. 20) классической калибровочной алгебры. При этом эффективный поворот базиса связей обусловлен именно зависимостью производящей функции канонического преобразования от гостовских переменных. Таким образом, можно сказать, что замыкание и абелизация калибровочной алгебры, генерируемой классическими связями первого рода, достигается зависящим от гостов каноническим преобразованием соответствующих производящих уравнений.

В квантовой механике следует ожидать аналогичной ситуации. Здесь мы имеем производящие уравнения (2. 17), (2. 18) операторной калибровочной алгебры. Мы будем искать унитарное преобразование в минимальном секторе (2. 16), приводящее фермионный производящий оператор $\hat{\Omega}_{\min}$ из (2. 17) к виду, линейному по гостовским импульсам, что соответствует замыканию или абелизации коммутационных соотношений для операторов связей. Это же преобразование, но сопровождаемое некоторым формизменением калибровочного фермиона, линеаризует по гостовским импульсам также и бозонный производящий оператор $\hat{H}_{\min}$ из (2. 18), что соответствует замыканию или абелизации коммутационных соотношений для новых операторов связей и «исходного» гамильтониана.

Итак, пусть $\hat{\mathfrak{A}}$,

$$\varepsilon(\hat{\mathfrak{A}})=0, \quad \mathrm{gh}(\hat{\mathfrak{A}})=0, \tag{6.1}$$

есть унитарный оператор

$$\hat{\mathfrak{A}}^{+}\hat{\mathfrak{A}}=\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{A}}^{+}=\hat{1}, \tag{6.2}$$

удовлетворяющий уравнению

$$\hat{\Omega}_{\min}\hat{\mathfrak{A}}=\hat{\mathfrak{A}}\hat{\Omega}^{*}_{\min}, \tag{6.3}$$

где $\hat{\Omega}^{*}_{\min}=\hat{U}^{*}_{0}+\hat{\mathcal{P}}_{A}\hat{U}^{*A}$, $\qquad (6.4)$

причем здесь и в дальнейшем в этом разделе звездочкой отмечены операторы в новом представлении.

В силу (2. 17) из (6. 3) следует, что фермионный оператор (6. 4) удовлетворяет уравнению

$$[\hat{\Omega}^{*}_{\min}, \hat{\Omega}^{*}_{\min}]=0, \quad \mathrm{gh}(\hat{\Omega}^{*}_{\min})=1, \tag{6.5}$$

так что коэффициентные операторы в (6. 4) удовлетворяют структурным соотношениям

$$\frac{1}{2}[\hat{U}_0^*, \hat{U}_0^*] = -i\hbar \frac{\partial_r \hat{U}_0^*}{\partial \hat{C}^A} \hat{U}^{*A}, \tag{6.6}$$

$$[\hat{U}^{*A}, \hat{U}_0^*] = -i\hbar \frac{\partial_r \hat{U}^{*A}}{\partial \hat{C}^B} \hat{U}^{*B}, \tag{6.7}$$

$$[\hat{U}^{*A}, \hat{U}^{*B}] = 0. \tag{6.8}$$

С другой стороны, в силу (2. 19), (6. 2) из (6. 3) следует

$$(\hat{\Omega}^*_{\min})^+ = \Omega^*_{\min}, \tag{6.9}$$

откуда

$$\hat{U}_0^* = (\hat{U}_0^*)^+ + i\hbar \frac{\partial_l (\hat{U}^{*A})^+}{\partial \hat{C}^A}, \tag{6.10}$$

$$(-1)^{\varepsilon(\hat{C}^A)} \hat{U}^{*A} = (\hat{U}^{*A})^+. \tag{6.11}$$

Для коэффициентных операторов в (6. 4) имеют место следующие полиномиальные разложения по степеням гостов:

$$\hat{U}_0^* = \hat{T}^*_{0\alpha_0}(\hat{p}, \hat{q}) \hat{C}_0^{\alpha_0}, \tag{6.12}$$

$$\hat{U}^{*A} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\{B\}=\mu_m^1} \frac{(-1)^{E_{B_1 \ldots B_m}}}{m!} \hat{U}^{*A}_{B_m \ldots B_1}(\hat{p}, \hat{q}) \hat{C}^{B_1} \ldots \hat{C}^{B_m}, \tag{6.13}$$

где множество $\mu_m^1$ определено (2. 50) при $n=1$, $A_1=A$; показатель знакового фактора дается (2. 55); структурные операторы приобретают знаковый фактор (2. 61) при перестановке любых соседних нижних индексов $B_{i-1}$, $B_i$. Мы также используем для операторов нуль-векторов в новом представлении соответствующее обозначение

$$\hat{Z}^{*\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s} \equiv \hat{U}^{*s-1|\alpha_{s-1}}_{s|\alpha_s}(\hat{p}, \hat{q}). \tag{6.14}$$

Итак, линейный по гостовским импульсам оператор (6. 4) является по определению фермионным производящим оператором замкнутой калибровочной алгебры. Мы предположим, что эта калибровочная алгебра имеет $L$-ю стадию приводимости в смысле определения (2. 111)—(2. 115), сформулированного применительно к связям из (6. 12) и нуль-векторам (6. 14).

Таким образом, уравнения (6. 2), (6. 3) задают унитарное преобразование, связывающее фермионные производящие операторы открытого и замкнутого базисов калибровочной алгебры.

Разложим оператор преобразования в $\hat{\mathscr{P}}\hat{C}$-нормальную форму ряда по степеням гостов (2. 15)

$$\hat{\mathfrak{A}} = \hat{F}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathscr{P}}_{A_n} \ldots \hat{\mathscr{P}}_{A_1} \hat{F}^{A_1 \ldots A_n}, \tag{6.15}$$

где коэффициенты

$$\hat{F}_0, \; \hat{F}^{A_1 \ldots A_n}, \quad n = 1, \ldots, \tag{6.16}$$

имеют те же статистику, гостовское число и свойства обобщенной симметрии по верхним индексам, что и операторы (2. 26) при тех же $n$.

Подставляя разложение (6. 15) в уравнение (6. 3), получим следующие соотношения для операторов (6. 16):

$$\hat{U}_0 \hat{F}_0 + i\hbar \frac{\partial_r \hat{U}_0}{\partial \hat{C}^A} \hat{F}^A = \hat{F}_0 \hat{U}_0^*, \tag{6.17}$$

$$\hat{U}^{A_1\ldots A_n}\hat{F}_0+\hat{U}_0\hat{F}^{A_1\ldots A_n}(-1)^{\varepsilon_0^n}+(n+1)\,i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}_0}{\partial\hat{C}^A}\hat{F}^{AA_1\ldots A_n}(-1)^{\varepsilon_0^n}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(i\hbar)^k\frac{\partial_r^k\hat{U}^{A_1\ldots A_n}}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{F}^{B_1\ldots B_k}+(\hat{M}_{\mathrm{sym}})^{A_1\ldots A_n}=$$

$$=\hat{F}^{A_1\ldots A_n}\hat{U}_0^*+i\hbar\frac{\partial_r\hat{F}^{A_1\ldots A_n}}{\partial\hat{C}^A}\hat{U}^{*A}+(\hat{M}^*_{\mathrm{sym}})^{A_1\ldots A_n}, \tag{6.18}$$

где $\hat{M}^{A_1}\equiv 0,\qquad \hat{M}^{*A_1}\equiv\hat{F}_0\hat{U}^{*A_1},$ (6.19)

$$\hat{M}^{A_1\ldots A_n}\equiv\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{\varepsilon_m^n}\left(\hat{U}^{A_1\ldots A_m}\hat{F}^{A_{m+1}\ldots A_n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n-m+k)!}{k!\,(n-m)!}\times\right.$$

$$\left.\times(i\hbar)^k\frac{\partial_r^k\hat{U}^{A_1\ldots A_m}}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{F}^{B_1\ldots B_kA_{m+1}\ldots A_n}\right), \tag{6.20}$$

$$\hat{M}^{*A_1\ldots A_n}\equiv\hat{F}^{A_1\ldots A_{n-1}}\hat{U}^{*A_n} \tag{6.21}$$

(см. также (2. 33), (2. 34), (2. 38)).

В силу (6. 2) для операторов (6. 16) должны быть выполнены условия:

$$\hat{F}_0\hat{\hat{F}}_0=\hat{1}, \tag{6.22}$$

$$\hat{F}_0\hat{\hat{F}}^{A_1\ldots A_n}+\hat{F}^{A_1\ldots A_n}\hat{\hat{F}}_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(i\hbar)^k\frac{\partial_r^k\hat{F}^{A_1\ldots A_n}}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{\hat{F}}^{B_1\ldots B_k}+(\hat{\mathcal{N}}_{\mathrm{sym}})^{A_1\ldots A_n}=0, \tag{6.23}$$

где $\hat{\hat{F}}_0\equiv(\hat{F}_0)^++\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\varepsilon_0^k}(i\hbar)^k\frac{\partial_l^k(\hat{F}^{B_1\ldots B_k})^+}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}},$ (6.24)

$$\hat{\hat{F}}^{A_1\ldots A_n}\equiv(\hat{F}^{A_n\ldots A_1})^++$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!\,k!}(-1)^{\varepsilon_0^k}(i\hbar)^k\frac{\partial_l^k(\hat{F}^{A_n\ldots A_1B_1\ldots B_k})^+}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}, \tag{6.25}$$

$$\hat{\mathcal{N}}^{A_1}\equiv 0,\quad \hat{\mathcal{N}}^{A_1\ldots A_n}\equiv\sum_{m=1}^{n-1}\left(\hat{F}^{A_1\ldots A_m}\hat{\hat{F}}^{A_{m+1}\ldots A_n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n-m+k)!}{k!\,(n-m)!}\times\right.$$

$$\left.\times(i\hbar)^k\frac{\partial_r^k\hat{F}^{A_1\ldots A_m}}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{\hat{F}}^{B_1\ldots B_kA_{m+1}\ldots A_n}\right) \tag{6.26}$$

(см. также (2. 33), (2. 34), (2. 38)).

Кроме того, также в силу (6. 2) должны выполняться условия, получающиеся из (6. 22), (6. 23), (6. 26) заменами

$$\hat{F}_0\leftrightarrow\hat{\hat{F}}_0,\quad \hat{F}^{A_1\ldots A_n}\leftrightarrow\hat{\hat{F}}^{A_1\ldots A_n}. \tag{6.27}$$

Для операторов (6. 16) имеют место следующие полиномиальные разложения по степеням гостов:

$$\hat{F}_0=\hat{F}_0(\hat{p},\,\hat{q}), \tag{6.28}$$

$$\hat{F}^{A_1\ldots A_n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\{B\}=\nu_m^n}\frac{(-1)^{E^{A_1\ldots A_n}_{B_1\ldots B_m}}}{n!\,m!}F^{A_1\ldots A_n}_{B_m\ldots B_1}(\hat{p},\,\hat{q})\,\hat{C}^{B_1}\ldots\hat{C}^{B_m}, \tag{6.29}$$

см. (2. 51)—(2. 55). Структурные операторы в (6. 29) имеют ту же статистику и те же свойства обобщенной антисимметрии по верхним и нижним индексам, что и операторы (2. 57) при тех же $n$, $m$.

Разрешимость уравнений (6. 17), (6. 18) при условиях (6. 22), (6. 23), (6. 27) обеспечивается (2. 35), (2. 36), (2. 42), (2. 43), (6. 6)—(6. 8), (6. 10), (6. 11).

Рассмотрим подробнее содержание низших уравнений из (6. 17), (6. 18). Уравнение (6. 17) дает

$$\hat{T}_{0\alpha_0}\hat{F}_0 + i\hbar\hat{T}_{0\beta_0}\hat{F}^{\beta_0}_{\alpha_0} = \hat{F}_0\hat{T}^*_{0\alpha_0}, \tag{6.30}$$

где $\hat{F}^{\beta_0}_{\alpha_0} \equiv \hat{F}^{0|\beta_0}_{0|\alpha_0}$. (6.31)

Обратимся теперь к низшему уравнению (6. 18) при $n=1$ в низшем секторе $A_1=(0,\ \alpha_0)$:

$$\hat{U}^{0|\alpha_0}\hat{F}_0 - \hat{U}_0\hat{F}^{0|\alpha_0}(-1)^{\varepsilon_{0\alpha_0}} - 2i\hbar\hat{T}_{0\beta_0}\hat{F}^{00|\beta_0\alpha_0}(-1)^{\varepsilon_{0\alpha_0}} + i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}_0^{\beta_0}}\hat{F}^{0|\beta_0} +$$
$$+ i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}_1^{\beta_1}}\hat{F}^{1|\beta_1} + (i\hbar)^2\frac{\partial_r^2\hat{U}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}_0^{\beta_0}\partial\hat{C}_0^{\gamma_0}}\hat{F}^{00|\beta_0\gamma_0} = \hat{F}^{0|\alpha_0}\hat{U}_0^* +$$
$$+ i\hbar\frac{\partial_r\hat{F}^{0|\alpha_0}}{\partial\hat{C}_0^{\beta_0}}\hat{U}^{*0|\beta_0} + \hat{F}_0\hat{U}^{*0|\alpha_0}. \tag{6.32}$$

$\hat{C}_0^2$-компонента уравнения (6. 32) дает

$$\hat{U}^{\alpha_0}_{\mu_0\nu_0}\hat{F}_0 + i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\mu_0\beta_0}\hat{F}^{\beta_0}_{\nu_0} - i\hbar\hat{U}^{\alpha_0}_{\nu_0\beta_0}\hat{F}^{\beta_0}_{\mu_0}(-1)^{\varepsilon_{0\mu_0}\varepsilon_{0\nu_0}} + \hat{T}_{0\mu_0}\hat{F}^{\alpha_0}_{\nu_0}(-1)^{\varepsilon_{0\alpha_0}\varepsilon_{0\mu_0}} -$$
$$- \hat{T}_{0\nu_0}\hat{F}^{\alpha_0}_{\mu_0}(-1)^{(\varepsilon_{0\alpha_0}+\varepsilon_{0\mu_0})\varepsilon_{0\nu_0}} - \frac{1}{2}i\hbar\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\hat{F}^{\gamma_0\beta_0}_{\mu_0\nu_0} + i\hbar\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\beta_1}\hat{F}^{\beta_1}_{\mu_0\nu_0} +$$
$$+ \hat{F}^{\alpha_0}_{\mu_0}\hat{T}^*_{0\nu_0} - \hat{F}^{\alpha_0}_{\nu_0}\hat{T}^*_{0\mu_0}(-1)^{\varepsilon_{0\mu_0}\varepsilon_{0\nu_0}} = \hat{F}_0\hat{U}^{*\alpha_0}_{\mu_0\nu_0} + i\hbar\hat{F}^{\alpha_0}_{\beta_0}\hat{U}^{*\beta_0}_{\mu_0\nu_0}, \tag{6.33}$$

где $\hat{F}^{\alpha_0\beta_0}_{\mu_0\nu_0} \equiv \hat{F}^{00|\alpha_0\beta_0}_{00|\mu_0\nu_0}$, (6.34)

$$\hat{U}^{*\alpha_0}_{\mu_0\nu_0} \equiv \hat{U}^{*0|\alpha_0}_{00|\mu_0\nu_0} \tag{6.35}$$

(см. также (2. 77), (2. 85)).

$\hat{C}_1$-компонента уравнения (6. 32) дает

$$\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\alpha_1}\hat{F}_0 - \frac{1}{2}i\hbar\hat{\Pi}^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\hat{F}^{\gamma_0\beta_0}_{\alpha_1} + i\hbar\hat{Z}^{\alpha_0}_{1\beta_1}\hat{F}^{\beta_1}_{\alpha_1} = \hat{F}_0\hat{Z}^{*\alpha_0}_{1\alpha_1} + i\hbar\hat{F}^{\alpha_0}_{\beta_0}\hat{Z}^{*\beta_0}_{1\alpha_1}, \tag{6.36}$$

где $\hat{F}^{\alpha_0\beta_0}_{\alpha_1} \equiv \hat{F}^{00|\alpha_0\beta_0}_{1|\alpha_1}$, (6.37)

$$\hat{F}^{\beta_1}_{\alpha_1} \equiv \hat{F}^{1|\beta_1}_{1|\alpha_1}, \tag{6.38}$$

см. также (2. 85).

Уравнение (6. 30) дает закон преобразования операторов связей. Уравнение (6. 33) дает закон преобразования структурных операторов инволюции связей. Уравнение (6. 36) дает закон преобразования операторов нуль-векторов связей.

Предположим теперь, что оператор преобразования (6. 15), удовлетворяющий (6. 2), (6. 3), известен, и определим оператор $\mathcal{H}^*_{\min}$ уравнением

$$\hat{H}_{\min}\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{A}}\mathcal{H}^*_{\min}. \tag{6.39}$$

Тогда в силу (2. 18) имеем

$$[\mathcal{H}^*_{\min},\ \hat{\Omega}^*_{\min}] = 0. \tag{6.40}$$

К сожалению, это еще не означает, что $\mathcal{H}^*_{\min}$ является бозонным производящим оператором замкнутой калибровочной алгебры, так как он может, вообще говоря, содержать сколь угодно высокие степени гостовских импульсов.

Разложим оператор $\mathscr{H}^*_{\min}$ в $\mathscr{P}\hat{C}$-нормальную форму ряда по гостам:

$$\hat{\mathscr{H}}^*_{\min} = \hat{\mathscr{V}}^*_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathscr{P}}_{A_n} \ldots \hat{\mathscr{P}}_{A_1} \hat{\mathscr{V}}^{*A_1 \ldots A_n}, \tag{6.41}$$

где $\hat{\mathscr{V}}^{*A_1 \ldots A_n} = \left(\hat{\mathscr{V}}^*_{\mathrm{sym}}\right)^{A_1 \ldots A_n}$ (6.42)

(см. также (2.33), (2.34)).

Подставляя (6.41) в (6.40), имеем

$$[\hat{\mathscr{V}}^*_0, \hat{U}^*_0] = i\hbar \frac{\partial_r \hat{U}^*_0}{\partial \hat{C}^A} \hat{\mathscr{V}}^{*A}, \tag{6.43}$$

$$[\hat{\mathscr{V}}^{*A_1}, \hat{U}^*_0] - [\hat{U}^{*A_1}, \hat{\mathscr{V}}^*_0] + i\hbar \frac{\partial_r \hat{\mathscr{V}}^{*A_1}}{\partial \hat{C}^A} \hat{U}^{*A} - \sum_{k=1}^{\infty} (i\hbar)^k \frac{\partial^k_r \hat{U}^{*A_1}}{\partial \hat{C}^{B_1} \ldots \partial \hat{C}^{B_k}} \times$$
$$\times \hat{\mathscr{V}}^{*B_1 \ldots B_k} = 2i\hbar \frac{\partial_r \hat{U}^*_0}{\partial \hat{C}^A} \hat{\mathscr{V}}^{*AA_1} (-1)^{\varepsilon^1_0}, \tag{6.44}$$

$$[\hat{\mathscr{V}}^{*A_1 \ldots A_n}, \hat{U}^*_0] + i\hbar \frac{\partial_r \hat{\mathscr{V}}^{*A_1 \ldots A_n}}{\partial \hat{C}^A} \hat{U}^{*A} + \left(\hat{\mathscr{G}}^*_{\mathrm{sym}}\right)^{A_1 \ldots A_n} =$$
$$= i\hbar (n+1) \frac{\partial_r \hat{U}^*_0}{\partial \hat{C}^A} \hat{\mathscr{V}}^{*AA_1 \ldots A_n} (-1)^{\varepsilon^n_0}, \tag{6.45}$$

где $n \geqslant 2$,

$$\hat{\mathscr{G}}^{*A_1 \ldots A_n} \equiv [\hat{\mathscr{V}}^{*A_1 \ldots A_{n-1}}, \hat{U}^{*A_n}] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n-1+k)!}{k!\,(n-1)!} (-1)^{\varepsilon^n_1} \times$$
$$\times (i\hbar)^k \frac{\partial^k_r \hat{U}^{*A_1}}{\partial \hat{C}^{B_1} \ldots \partial \hat{C}^{B_k}} \hat{\mathscr{V}}^{*B_1 \ldots B_k A_2 | \ldots A_n}. \tag{6.46}$$

Далее, определим оператор

$$\hat{H}^*_{\min} \equiv \hat{\mathscr{H}}^*_{\min} + (i\hbar)^{-1} [\hat{\Lambda}, \hat{\Omega}^*_{\min}], \tag{6.47}$$

где $\varepsilon(\hat{\Lambda}) = 1, \quad \mathrm{gh}(\hat{\Lambda}) = -1, \quad \hat{\Lambda} = -\hat{\Lambda}^+,$ (6.48)

причем $\hat{\Lambda}$ является функцией операторов минимального сектора. Мы имеем для (6.47)

$$[\hat{H}^*_{\min}, \hat{\Omega}^*_{\min}] = 0, \quad \mathrm{gh}\left(\hat{H}^*_{\min}\right) = 0, \tag{6.49}$$

$$\left(\hat{H}^*_{\min}\right)^+ = \hat{H}^*_{\min}. \tag{6.50}$$

Разложим оператор $\hat{\Lambda}$ в $\mathscr{P}\hat{C}$-нормальную форму ряда по степеням гостов

$$\hat{\Lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mathscr{P}}_{A_n} \ldots \hat{\mathscr{P}}_{A_1} \hat{W}^{A_1 \ldots A_n}, \tag{6.51}$$

где $(\hat{W}_{\mathrm{sym}})^{A_1 \ldots A_n} = \hat{W}^{A_1 \ldots A_n}$. (6.52)

Свойства (6.48) накладывают на коэффициенты в (6.51) условия:

$$\varepsilon\left(\hat{W}^{A_1 \ldots A_n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon\left(\hat{C}^{A_j}\right) + 1, \tag{6.53}$$

$$\mathrm{gh}\left(\hat{W}^{A_1 \ldots A_n}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{gh}\left(\hat{C}^{A_j}\right) - 1, \tag{6.54}$$

$$-(-1)^{\varepsilon_0^n}\hat{W}^{A_1\ldots A_n}=\left(\hat{W}^{A_n\ldots A_1}\right)^++$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!\,k!}(i\hbar)^k\frac{\partial_l^k\left(\hat{W}^{A_n\ldots A_1B_1\ldots B_k}\right)^+}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}} \tag{6.55}$$

(см. также (2. 38) при $m=0$).

Подчиним коэффициентные операторы разложения (6. 51) следующим уравнениям:

$$\frac{\partial_r\hat{U}_0^*}{\partial\hat{C}^A}\hat{W}^A+\hat{\mathscr{V}}_0^*=\hat{V}_0^*, \tag{6.56}$$

$$(i\hbar)^{-1}\left[\hat{W}^{A_1},\ \hat{U}_0^*\right]+\hat{\mathscr{V}}^{*A_1}+$$
$$+2\frac{\partial_r\hat{U}_0^*}{\partial\hat{C}^A}\hat{W}^{AA_1}(-1)^{\varepsilon_0^1}+\frac{\partial_r\hat{W}^{A_1}}{\partial\hat{C}^A}\hat{U}^{*A}=\hat{V}^{*A_1}, \tag{6.57}$$

$$(i\hbar)^{-1}\left[\hat{W}^{A_1\ldots A_n},\ \hat{U}_0^*\right]+\hat{\mathscr{V}}^{*A_1\ldots A_n}+(-1)^{\varepsilon_0^n}(n+1)\frac{\partial_r\hat{U}_0^*}{\partial\hat{C}^A}\hat{W}^{AA_1\ldots A_n}+$$
$$+\frac{\partial_r\hat{W}^{A_1\ldots A_n}}{\partial\hat{C}^A}\hat{U}^{*A}+(i\hbar)^{-1}\left(\hat{Y}^*_{\mathrm{sym}}\right)^{A_1\ldots A_n}=0, \tag{6.58}$$

где $\hat{Y}^{*A_1\ldots A_n}\equiv\left[\hat{W}^{A_1\ldots A_{n-1}},\ \hat{U}^{*A_n}\right](-1)^{\varepsilon_{n-1}^n}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(n-1+k)!}{k!\,(n-1)!}(-1)^{\varepsilon_1^n}\times$

$$\times(i\hbar)^k\frac{\partial_r^k\hat{U}^{*A_1}}{\partial\hat{C}^{B_1}\ldots\partial\hat{C}^{B_k}}\hat{W}^{B_1\ldots B_kA_2\ldots A_n}, \tag{6.59}$$

правые части (6. 56), (6. 57) удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon\left(\hat{V}_0^*\right)=0,\qquad \mathrm{gh}\left(\hat{V}_0^*\right)=0, \tag{6.60}$$

$$\varepsilon\left(\hat{V}^{*A}\right)=\varepsilon\left(\hat{C}^A\right),\qquad \mathrm{gh}\left(\hat{V}^{*A}\right)=\mathrm{gh}\left(\hat{C}^A\right), \tag{6.61}$$

$$\left[\hat{V}_0^*,\ \hat{U}_0^*\right]=i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}_0^*}{\partial\hat{C}^A}\hat{V}^{*A}, \tag{6.62}$$

$$\left[\hat{V}^{*A},\ \hat{U}_0^*\right]-\left[\hat{U}^{*A},\ \hat{V}_0^*\right]+i\hbar\frac{\partial_r\hat{V}^{*A}}{\partial\hat{C}^B}\hat{U}^{*B}-i\hbar\frac{\partial_r\hat{U}^{*A}}{\partial\hat{C}^B}\hat{V}^{*B}=0, \tag{6.63}$$

$$\left[\hat{V}^{*A},\ \hat{U}^{*B}\right]-\left[\hat{V}^{*B},\ \hat{U}^{*A}\right](-1)^{\varepsilon(\hat{C}^A)\varepsilon(\hat{C}^B)}=0, \tag{6.64}$$

$$\hat{V}_0^*=\left(\hat{V}_0^*\right)^++(-1)^{\varepsilon(\hat{C}^A)}i\hbar\frac{\partial_l\left(\hat{V}^{*A}\right)^+}{\partial\hat{C}^A}, \tag{6.65}$$

$$\hat{V}^{*A}=\left(\hat{V}^{*A}\right)^+. \tag{6.66}$$

Разрешимость уравнений (6. 56)—(6. 58) при условиях (6. 52)—(6. 55) обеспечивается (6. 6)—(6. 8), (6. 10), (6. 11), (6. 60)—(6. 66). Если уравнения (6. 56)—(6. 58) удовлетворены, то (6. 47) принимает вид

$$\hat{H}^*_{\min}=\hat{V}_0^*+\hat{\mathscr{P}}_A\hat{V}^{*A}, \tag{6.67}$$

линейный по гостовским импульсам. Итак, (6. 67) есть бозонный производящий оператор замкнутой калибровочной алгебры (см. (6. 5), (6. 49)).

Для коэффициентов в (6. 67) имеют место полиномиальные разложения по степеням гостов:

$$\hat{V}_0^*=\hat{H}_0^*(\hat{p},\ \hat{q}). \tag{6.68}$$

$$\hat{V}^{*A}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\{B\}=\nu_m^1}\frac{(-1)^{E_{B_1\ldots B_m}}}{m!}\hat{V}^{*A}_{B_m\ldots B_1}(\hat{p},\ \hat{q})\hat{C}^{B_1}\ldots\hat{C}^{B_m}, \tag{6.69}$$

где множество $\nu_m^1$ определено (2. 51) при $n=1$, $A_1=A$; показатель знакового фактора дается (2. 55); структурные операторы приобретают знаковый фактор (2. 61) при перестановке любых соседних нижних индексов $B_{i-1}$, $B_i$. Мы также используем сокращенное обозначение

$$\hat{V}^{*\alpha_0}_{\mu_0}\equiv\hat{V}^{*0|\alpha_0}_{0|\mu_0}. \tag{6.70}$$

Этим завершается процедура замыкания операторной калибровочной алгебры. Для новых операторов связей из (6. 12), «исходного» гамильтониана из (6. 68) и операторов нуль-векторов из (6. 14) имеем

$$[\hat{T}^*_{0\alpha_0},\ \hat{T}^*_{0\beta_0}]=i\hbar\hat{T}^*_{0\gamma_0}\hat{U}^{*\gamma_0}_{\alpha_0\beta_0}, \tag{6.71}$$

$$[\hat{H}^*_0,\ \hat{T}^*_{0\beta_0}]=i\hbar\hat{T}^*_{0\gamma_0}\hat{V}^{*\gamma_0}_{\beta_0}, \tag{6.72}$$

$$\hat{T}^*_{0\alpha_0}\hat{Z}^{*\alpha_0}_{1\alpha_1}=0,\qquad \hat{Z}^{*\alpha_{s-2}}_{s-1\,\alpha_{s-1}}\hat{Z}^{*\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}=0, \tag{6.73}$$

где $s=2,\ \ldots,\ L$. Коэффициенты инволюций (6. 71), (6. 72) даются (6. 35), (6. 70) соответственно. Классические пределы символов новых операторов связей и нуль-векторов подчинены условиям

$$\operatorname{rank}_\pm\left\|\frac{\partial_l T^*_{0\sigma_0}}{\partial\varphi^a}\right\|\Bigg|_{T^*=0}=\gamma_0(L)_\pm,\quad \varphi^a\equiv(p_i,\ q^i), \tag{6.74}$$

$$\operatorname{rank}_\pm\|Z^{*\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}\|\big|_{T^*=0}=\gamma_s(L)_\pm,\quad s=1,\ \ldots,\ L, \tag{6.75}$$

фиксирующим $L$-ю стадию приводимости.

Замкнутая калибровочная алгебра называется абелевой, если разложения (6. 13) содержат только члены, линейные по операторам гостов, а все операторы (6. 69) исчезают. В этом наиболее простом случае мы имеем

$$(\hat{\Omega}^*_{\min})_{\text{Abelian}}=\sum_{s=0}^{L}\hat{T}^*_{s\alpha_s}\hat{C}^{\alpha_s}_s, \tag{6.76}$$

$$(\hat{H}^*_{\min})_{\text{Abelian}}=\hat{H}^*_0(\hat{p},\ \hat{q}), \tag{6.77}$$

где $\hat{T}^*_{0\alpha_0}$ — операторы из (6. 12),

$$\hat{T}^*_{s\alpha_s}\equiv\hat{\mathscr{P}}_{s-1\,\alpha_{s-1}}\hat{Z}^{*\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}(\hat{p},\ \hat{q}),\qquad s=1,\ \ldots,\ L. \tag{6.78}$$

Для всех операторов $\hat{T}^*_{s\alpha_s}$, $s=0,\ \ldots,\ L$, из (6. 76) в абелевом случае имеют место соотношения

$$[\hat{T}^*_{s\alpha_s},\ \hat{T}^*_{r\beta_r}]=0,\qquad [\hat{H}^*_0,\ \hat{T}^*_{r\beta_r}]=0, \tag{6.79}$$

$$\hat{T}^*_{s-1\alpha_{s-1}}\hat{Z}^{*\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}=0. \tag{6.80}$$

Таким образом, правая часть (6. 76) получает естественную интерпретацию, как сумма вкладов, отвечающих при каждом $s=0,\ \ldots,\ L$ приводимым $(L-s)$-й стадии абелевым связям первого рода $\hat{T}^*_{s\alpha_s}$. При $s>0$ эти связи, определяемые (6. 78), актуально зависят от гостовских импульсов $\hat{\mathscr{P}}_{s-1}$ и поэтому способны генерировать калибровочную вариацию гостовских координат $\hat{C}_{s-1}$. Итак, на простейшем примере абелевых связей мы явно видим, что на каждой следующей стадии приводимости часть гостовских переменных предыдущей стадии приобретают калибровочный произвол и в этом смысле ведут себя как калибровочные переменные.

Нам остается рассмотреть преобразование динамики при замыкании калибровочной алгебры. Определим преобразованный унитаризующий гамильтониан $\hat{H}^*_{\Psi*}$ уравнением

$$\hat{H}_{\Psi}\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{A}}\hat{H}^*_{\Psi*}. \tag{6.81}$$

Используя (3. 22), (3. 26), (6. 3), (6. 39), (6. 47):

$$\hat{H}^*_{\Psi*} = \hat{H}^*_{\min} + (i\hbar)^{-1}[\hat{\Psi}^*, \hat{\Omega}^*], \tag{6.82}$$

где $\hat{H}^*_{\min}$ дается (6.67),

$$\hat{\Omega}^* = \hat{\Omega}^*_{\min} + \sum_{s=0}^{L} \hat{\pi}_{s\alpha_s}\mathscr{P}^{\alpha_s}_s + \sum_{s'=1}^{L}\sum_{s=s'}^{L} \hat{\pi}^{s'}_{s\alpha_s}\mathscr{P}^{s'\alpha_s}_s, \tag{6.83}$$

$\hat{\Omega}^*_{\min}$ определено (6.4), $\hat{\Psi}^*$ задается уравнением

$$\hat{\mathfrak{A}}(\hat{\Psi}^* + \hat{\Lambda}) = \hat{\Psi}\hat{\mathfrak{A}}, \tag{6.84}$$

$\hat{\Lambda}$ определено (6. 51)—(6. 58).

Мы, очевидно, имеем для (6. 83), (6. 82)

$$[\hat{\Omega}^*, \hat{\Omega}^*] = 0, \qquad [\hat{H}^*_{\Psi*}, \hat{\Omega}^*] = 0. \tag{6.85}$$

Поставим в соответствие операторам (3. 20), (3. 21) преобразованные операторы $\hat{P}^*_M$, $\hat{Q}^{*M}$:

$$\hat{P}^*_M\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{A}}\hat{P}_M, \qquad \hat{Q}^{*M}\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{A}}\hat{Q}^M. \tag{6.86}$$

Тогда из (6. 3), (6. 81), (6. 83) следует закон преобразования

$$\hat{H}_{\Psi}(\hat{P}, \hat{Q}) = \hat{H}^*_{\Psi*}(\hat{P}^*, \hat{Q}^*), \qquad \hat{\Omega}(\hat{P}, \hat{Q}) = \hat{\Omega}^*(\hat{P}^*, \hat{Q}^*). \tag{6.87}$$

В силу (4. 1), (6. 87) временна́я эволюция преобразованных операторов из (6. 86) дается уравнениями

$$i\hbar\partial_t\hat{P}^*_M = [\hat{P}^*_M, \hat{H}^*_{\Psi*}(\hat{P}^*, \hat{Q}^*)], \tag{6.88}$$

$$i\hbar\partial_t\hat{Q}^{*M} = [\hat{Q}^{*M}, \hat{H}^*_{\Psi*}(\hat{P}^*, \hat{Q}^*)] \tag{6.89}$$

при канонических одновременных коммутационных соотношениях.

В силу (4. 12), (6. 87) ограничение на физические состояния может быть представлено в виде

$$\hat{\Omega}^*(\hat{P}^*, \hat{Q}^*)|\mathrm{Phys}\rangle = 0 = \langle\mathrm{Phys}|\hat{\Omega}^*(\hat{P}^*, \hat{Q}^*). \tag{6.90}$$

Таким образом, динамика преобразованных операторов из (6. 86) управляется эрмитовым гамильтонианом, получаемым формальной заменой

$$\hat{P}_M \to \hat{P}^*_M, \qquad \hat{Q}^M \to \hat{Q}^{*M} \tag{6.91}$$

из (6. 82). Бозонный (6. 67) и фермионный (6. 4) производящие операторы замкнутой калибровочной алгебры входят в новый унитаризующий гамильтониан (6.82) точно так же, как производящие операторы (2. 24), (2. 23) открытой калибровочной алгебры входят в унитаризующий гамильтониан (3. 26). Вместо калибровочного фермиона $\hat{\Psi}$ из (3. 26) в (6. 82) входит новый калибровочный фермион $\hat{\Psi}^*$, определяемый (6. 84). Однако в силу (6. 85), (6. 89) физическая динамика не зависит от выбора оператора $\hat{\Psi}$.

Итак, с точки зрения процедуры замыкания и абелизации, сформулированной в этом разделе, мы видим, что неабелевость и незамкнутость не являются внутренними (физическими) свойствами теории, как таковой, а скорее — следствием «неудачного» выбора базиса операторной калибровочной алгебры. Для систем с конечным числом степеней свободы выбор базиса калибровочной алгебры вполне произволен. С помощью канонического преобразования (6. 3) всегда возможно перейти к новому базису, в котором калибровочная алгебра замкнута и даже абелева. Однако в теории поля именно «неудачный» выбор, вообще говоря, неабелева и незамкнутого базиса настоятельно диктуется в релятивистском контексте требованиями четырехмерной локальности и ковариантности динамического описания. Замкнутость или абелевость становятся в традиционном смысле «свойствами» теории, когда они имеют место в локальном ковариантном базисе калибровочной алгебры.

С общей точки зрения наличие регулярной процедуры замыкания и абелизации имеет существенное принципиальное значение как один из важных аспектов операторного квантования калибровочных систем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной работы является общий метод построения оператора унитаризующего гамильтониана для динамических систем со связями первого рода. Унитаризующий гамильтониан (3. 26) строится с использованием (3. 22) из трех основных объектов теории: фермионного (2. 23) и бозонного (2. 24) производящих операторов калибровочной алгебры и оператора (3. 29)—(3. 34) калибровочного фермиона. Генерация калибровочной алгебры реализована с использованием (2. 46)—(2. 49), в рамках структурных соотношений (2. 35), (2. 36), (2. 39), (2. 40), являющихся следствием производящих уравнений (2. 17), (2. 18) в минимальном секторе (2. 16) (см. также (2. 15)).

Временна́я эволюция операторов (3. 20), (3. 21) релятивистского фазового пространства задается гейзенберговскими уравнениями движения (4. 1), содержащими унитаризующий гамильтониан (3. 26), при канонических коммутационных соотношениях (1. 10) для операторов, взятых в совпадающие моменты времени. Производящий функционал квантовых функций Грина определяется обычным образом с помощью (5. 1), (4. 15). Тогда из операторных уравнений движения (4. 1) стандартной процедурой следуют вариационные по внешним источникам уравнения (5. 2), (5. 3) для производящего функционала (5. 1). Решение (5. 4) этих уравнений имеет вид функционального интеграла по путям в релятивистском фазовом пространстве. Эффективное действие (5. 5) в этом интеграле по путям содержит «раздвинутый» по времени символ оператора (3. 26) унитаризующего гамильтониана. Тем самым в решении (5. 4) полностью учитывается информация о порядке следования операторных множителей в (3. 26). Для символов оператора (3. 26) унитаризующего гамильтониана и производящих операторов (2. 23), (2. 24) калибровочной алгебры имеют место уравнения (5. 8)—(5. 11), являющиеся в смысле соответствия (1. 6)—(1. 8) «символ $\leftrightarrow$ оператор» аналогами (3. 26), (3. 22), (2. 17), (2. 18). Квазиклассические разложения уравнений (5. 10), (5. 11) для символов производящих операторов калибровочной алгебры даются (5. 15)—(5. 22). В классическом приближении производящие уравнения (5. 17), (5. 20) генерируют структурные соотношения (5. 24), (5. 25), (5. 28), (5. 29) классической калибровочной алгебры.

Важным аспектом решения проблемы операторного квантования систем со связями первого рода является формулировка, для общего случая любой стадии приводимости, регулярной процедуры замыкания и абелизации операторной калибровочной алгебры. Здесь имеют место следующие основные моменты. Уравнения (6. 2), (6. 3) задают унитарный оператор (6. 15) канонического преобразования, приводящего фермионный производящий оператор (2. 23) к виду (6. 4), линейному по гостовским импульсам. Затем уравнение (6. 39) определяет оператор (6. 41). Наконец, уравнения (6. 56)—(6. 58) приводят оператор (6. 47) к виду (6. 67), линейному по гостовским импульсам. Тогда (6. 6)—(6. 8), (6. 12), (6. 13) вместе с (6. 62)—(6. 64), (6. 68), (6. 69) генерируют замкнутую калибровочную алгебру. Преобразование операторов (3. 20), (3. 21) релятивистского фазового пространства при замыкании калибровочной алгебры задается (6. 86). Эволюция во времени новых операторов из (6. 86) описывается гейзенберговскими уравнениями (6. 88), которые содержат новый унитаризующий гамильтониан (6. 82), соответствующий эквивалентной динамической системе с замкнутой калибровочной алгеброй.

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## УСЛОВИЯ ДОПУСТИМОСТИ ДЛЯ СИМВОЛА ОПЕРАТОРА КАЛИБРОВОЧНОГО ФЕРМИОНА

Условия допустимости, накладываемые на классический предел символа оператора калибровочного фермиона, должны обеспечить устранение вырождения функционального интеграла (5. 4), вычисляемого методом стационарной фазы (петлевое разложение).

Мы имеем, таким образом, следующие условия:

1) допустимость в секторе исходных переменных:

$$\operatorname{rank}_{\pm}\|\{\{\mathscr{P}_0^{\alpha_0}, \Psi\}, \varphi^a\| = \operatorname{rank}_{\pm}\|\{\{\mathscr{P}_0^{\alpha_0}, \Psi\}, T_{0\beta_0}\}\| = \\ = \gamma_0(L)_{\pm}, \quad \varphi^a \equiv (p_i, q^i); \tag{A. 1}$$

2) допустимость в алгебраическом секторе гостов:

$$\operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\{\mathscr{P}_s^{\alpha_s}, \Psi\}, \mathscr{\bar P}_{s-1\,\alpha_{s-1}}\}\right\| = \operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\{\mathscr{P}_s^{\alpha_s}, \Psi\}, T_{s\beta_s}\}\right\| = \\ = \gamma_s(L)_{\pm}, \quad T_{s\alpha_s} \equiv \mathscr{\bar P}_{s-1\,\alpha_{s-1}} Z_{s\alpha_s}^{\alpha_{s-1}}, \tag{A. 2}$$

где $s=1, \ldots, L$;

3) допустимость в секторе лагранжевых множителей:

$$\operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\{\mathscr{P}_s^{1\alpha_s}, \Psi\}, \pi_{s-1\,\alpha_{s-1}}\}\right\| = \operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\{\mathscr{P}_s^{1\alpha_s}, \Psi\}, T^1_{s\beta_s}\}\right\| = \\ = \gamma_s(L)_{\pm}, \quad T^1_{s\alpha_s} \equiv \pi_{s-1\,\alpha_{s-1}} Z_{s\alpha_s}^{\alpha_{s-1}}, \tag{A. 3}$$

где $s=1, \ldots, L$;

4) допустимость во вспомогательном секторе гостов:

$$\operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\mathscr{P}_{s-1}^{\alpha_{s-1}}, \{\Psi, \pi^1_{s\beta_s}\}\}\right\| = \operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\bar T_s^{1\alpha_s}, \{\Psi, \pi^1_{s\beta_s}\}\}\right\| = \\ = \gamma_s(L)_{\pm}, \quad \bar T_s^{1\alpha_s} \equiv \bar Z^{1\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}} \mathscr{P}_{s-1}^{\alpha_{s-1}}, \tag{A. 4}$$

где $s = 1, \ldots, L$, а также

$$\bar Z^{1\alpha_1}_{1\alpha_0}\{\{\mathscr{P}_0^{\alpha_0}, \Psi\}, \varphi^a\} = 0, \quad \varphi^a \equiv (p_i, q^i), \tag{A. 5}$$

$$\bar Z^{1\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}\{\{\mathscr{P}_{s-1}^{\alpha_{s-1}}, \Psi\}\mathscr{\bar P}_{s-2\,\alpha_{s-2}}\} = 0, \quad s = 2, \ldots, L, \tag{A. 6}$$

$$\varepsilon(\bar Z^{1\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}) = \varepsilon_{s-1\,\alpha_{s-1}} + \varepsilon_{s\alpha_s}, \quad \operatorname{gh}(\bar Z^{1\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}) = 0, \tag{A. 7}$$

$$\operatorname{rank}_{\pm}\|\bar Z^{1\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}\| = \gamma_s(L)_{\pm}; \tag{A. 8}$$

5) допустимость в секторе экстрагостов:

а) $$\operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\{\mathscr{P}_s^{s'\alpha_s}, \Psi\}, \pi^{s'-1}_{s-1\alpha_{s-1}}\}\right\| = \\ = \operatorname{rank}_{\pm}\left\|\{\{\mathscr{P}_s^{s'\alpha_s}, \Psi\}, T^{s'}_{s\beta_s}\}\right\| = \gamma_s(L)_{\pm}, \tag{A. 9}$$

$$T^{s'}_{s\alpha_s} \equiv \pi^{s'-1}_{s-1\,\alpha_{s-1}} Z^{s'\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s},$$

где $s' = 2, \ldots, L$; $s = s', \ldots, L$,

$$\{\mathscr{P}_{s-2}^{s'-2\alpha_{s-2}}, \{\Psi, \pi^{s'-1}_{s-1\alpha_{s-1}}\}\} Z^{s'\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s} = 0, \tag{A. 10}$$

$$\varepsilon(Z^{s'\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}) = \varepsilon_{s-1\alpha_{s-1}} + \varepsilon_{s\alpha_s}, \quad \operatorname{gh}(Z^{s'\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}) = 0, \tag{A. 11}$$

$$\operatorname{rank}_{\pm}\|Z^{s'\alpha_{s-1}}_{s\alpha_s}\| = \gamma_s(L)_{\pm}; \tag{A. 12}$$

$$\text{b)}\ \operatorname{rank}_{\pm}\left\|\left\{\mathscr{P}^{s'-1\alpha_{s-1}}_{s-1},\ \left\{\Psi,\ \pi^{s'}_{s\alpha_s}\right\}\right\}\right\| = \operatorname{rank}_{\pm}\left\|\left\{\bar{T}^{s'\alpha_s}_{s},\ \left\{\Psi,\ \pi^{s'}_{s\beta_s}\right\}\right\}\right\| = \gamma_s(L)_{\pm}, \tag{A. 13}$$

где $s' = 2, \ldots, L$; $s = s', \ldots, L$, а также

$$\bar{Z}^{s'\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}\left\{\left\{\mathscr{P}^{s'-1\alpha_{s-1}}_{s-1},\ \Psi\right\},\ \pi^{s'-2}_{s-2\alpha_{s-2}}\right\} = 0, \tag{A. 14}$$

$$\varepsilon\left(\bar{Z}^{s'\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}\right) = \varepsilon_{s-1\alpha_{s-1}} + \varepsilon_{s\alpha_s}, \qquad \operatorname{gh}\left(\bar{Z}^{s'\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}\right) = 0, \tag{A. 15}$$

$$\operatorname{rank}_{\pm}\left\|\bar{Z}^{s'\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}\right\| = \gamma_s(L)_{\pm}, \qquad \bar{T}^{s'\alpha_s}_{s} \equiv \bar{Z}^{s'\alpha_s}_{s\alpha_{s-1}}\mathscr{P}^{s'-1\alpha_{s-1}}_{s-1}. \tag{A. 16}$$

Условия (А. 1)—(А. 16) должны выполняться совместно с уравнениями

$$\left\{\lambda^{\alpha_s}_{s},\ H_{\Psi}\right\} = 0, \qquad \left\{H_{\Psi},\ \pi_{s\alpha_s}\right\} = 0, \tag{A. 17}$$

$$\left\{\mathscr{P}^{\alpha_s}_{s},\ H_{\Psi}\right\} = 0, \qquad \left\{H_{\Psi},\ \bar{C}_{s\alpha_s}\right\} = 0, \tag{A. 18}$$

где $s = 0, \ldots, L$, а также совместно с уравнениями

$$\left\{\lambda^{s'\alpha_s}_{s},\ H_{\Psi}\right\} = 0, \qquad \left\{H_{\Psi},\ \pi^{s'}_{s\alpha_s}\right\} = 0, \tag{A. 19}$$

$$\left\{\mathscr{P}^{s'\alpha_s}_{s},\ H_{\Psi}\right\} = 0, \qquad \left\{H_{\Psi},\ \bar{C}^{s'}_{s\alpha_s}\right\} = 0, \tag{A. 20}$$

где $s' = 1, \ldots, L$; $s = s', \ldots, L$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Фаддеев Л. Д.* Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. — ТМФ, 1969, т. 1, № 1, 3—18.
2. *Fradkin E. S.* Hamiltonian formalism in covariant gauge and the measure in quantum gravity. — Acta Univ. Wratisl., 1973, N 207, p. 93—115.
3. *Fradkin E. S., Vilkovisky G. A.* Quantization of relativistic systems with constraints. — Phys. Lett. B, 1975, vol. 55, p. 224—226.
4. *Batalin I. A., Vilkovisky G. A.* Relativistic $S$-matrix of dynamical systems with Boson and Fermion constraints. — Phys. Lett. B, 1977, vol. 69, p. 309—312.
5. *Fradkin E. S., Fradkina T. E.* Quantization of relativistic systems with Boson and Fermion first- and second-class constraints. — Phys. Lett. B, 1978, vol. 72, p. 343—348.
6. *Fradkin E. S., Vilkovisky G. A.* Unitarity in quantum gravidynamics and general covariance in quantum domain. — Lett. nuovo cim., 1975, vol. 13, p. 187—192.
7. *Fradkin E. S., Vasiliev M. A.* Hamiltonian formalism, quantization and $S$-matrix for supergravity. — Phys. Lett. B, 1977, vol. 72, p. 70—74.
8. *Batalin I. A., Fradkin E. S.* A generalized canonical formalism and quantization of reducible gauge theories. — Phys. Lett. B, 1983, vol. 122, p. 157—164.
9. *Batalin I. A., Fradkin E. S.* Quantization of dynamical systems subject to reducible second class constraints. — Lett. nuovo cim., 1983, vol. 38, p. 393—401.
10. *Fradkin E. S., Vilkovisky G. A.* $S$-Matrix for gravitational field. II: Local measure; general relations; elements of renormalization theory. — Phys. Rev. D, 1973, vol. 8, p. 4241—4285.
11. *Тютин И. В.* Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке: Препр. ФИАН № 39. М., 1975.
12. *Kugo T., Ojima I.* Local covariant operator formalism of non-Abelian gauge theories and quark confinement problem. — Suppl. Progr. Theor. Phys., 1979, vol. 66, N 1.
13. *Batalin I. A., Fradkin E. S.* Operator quantization of relativistic dynamical systems subject to first class constraints. — Phys. Lett. B, 1983, vol. 128, p. 303—308.
14. *Баталин И. А., Фрадкин Е. С.* Операторное квантование релятивистских динамических систем со связями первого рода. — ЯФ, 1984, т. 39, с. 231—239.
15. *Batalin I. A., Fradkin E. S.* Closing and Abelizing operatorial gauge algebra generated by first class constraints: Prepr. P. N. Lebedev Phys. Inst. N 227. M., 1983.
16. *Фрадкин Е. С.* Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике. — Тр. ФИАН, 1965, т. 29, с. 7—138. (Докт. дис. М.: ИТЭФ, 1960).
17. *Fradkin E. S.* Application of functional methods in quantum field theory and quantum statistics. — Nucl. Phys., 1966, vol. 76, p. 588—624.
18. *Фрадкин Е. С.* О функциональном методе в квантовой статистике и в теории многих частиц. — В кн.: Сборник, посвященный 60-летию Н. Н. Боголюбова. М.: Наука, 1969, с. 386—413.
19. *Фрадкин Е. С.* S-Матрица для нелинейных лагранжианов общего вида. — В кн.: Сборник, посвященый памяти И. Е. Тамма. М.: Наука, 1972, с. 146—176.