ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 15, вып. 3, 1972

КВАНТОВАНИЕ МАССИВНОЙ ГРАВИТАЦИИ

И. В. ТЮТИН, Е. С. ФРАДКИН

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АН СССР

(Поступила в редакцию 26 июля 1971 г.)

Рассмотрен вопрос о каноническом квантовании теории массивного гравитационного поля и построении соответствующего производящего функционала (диаграммных правил Фейнмана). В теории появляются дополнительные диаграммы, типичные для моделей с нелинейным взаимодействием с производными. Параметры координатных калибровочных преобразований интерпретируются как некоторое квантованное поле, которое, как оказывается, естественно отождествить с электромагнитным полем.

1. За последнее время большое внимание привлечено к проблеме учета гравитации в теории элементарных частиц [1, 2]. Важность гравитации для теории элементарных частиц обусловлена ее универсальностью и надеждой, что ее учет поможет ликвидировать расходимости обычной теории взаимодействия полей. Один из возможных механизмов регуляризирующей роли гравитации предложен в [3] и обусловлен тем, что гравитация входит существенно нелинейным образом в вершинах обычного взаимодействия. Между тем, как показано в [4], в случае взаимодействия нескольких полей теория может стать свободной от расходимостей, если хотя бы одно из взаимодействующих полей (роль такого поля в нашем случае должна выполнять гравитация) входит во всех вершинах неполиномиальным образом с подходящей суммарной (для всех полей в вершине) степенью роста при больших полях. То обстоятельство, что неполиномиальный вид взаимодействия одного из полей может сыграть роль регуляризатора обычного взаимодействия других полей и сделать тем самым конечными расходимости (массы и заряда) обычного взаимодействия, продемонстрировано в [4] для случая калибровочно-неинвариантного взаимодействия. Ситуация более сложная в случае калибровочно-инвариантного взаимодействия в связи с необходимостью построить метод вычисления функций Грина, не нарушая калибровочную инвариантность теории (см. работы [2]). Независимо от этого обычная гравитация с ее малым эффективным радиусом регуляризации, по-видимому, недостаточна для регуляризации сильного взаимодействия адронов. В этой связи, как отметил Салам [2], особую роль для теории сильного взаимодействия может сыграть «сильное» гравитационное взаимодействие массивного тензорного поля спина 2 (f-мезона).

Настоящая статья посвящена проблеме квантования и построения S-матрицы для такого массивного гравитационного поля. При этом выясняются следующие существенные моменты такой теории.

а) Вследствие того что гравитационная постоянная размерна, возможны различные варианты массивной гравитации (класс лагранжианов для такого поля предложен, например, в работе Огиевецкого и Полубаринова [5]), причем различие простирается также и на S-матрицу на массовой оболочке. Существенно, что, как правило, полная теория описывает частицы спина 2 и спина 0 (с индефинитной метрикой).

б) Найденный гамильтониан взаимодействия для массивного гравитационного поля, как и следовало ожидать, зависит от канонических импульсов нелинейным образом. В таких случаях, как показано в [6], обычная диаграммная техника Фейнмана не приводит к унитарной S-матрице и корректная процедура построения S-матрицы приводит к добавочным фейнмановским диаграммам. Для специальных видов теории массивной гравитации удалось полностью провести эту программу построения корректной S-матрицы и явно получить выражение для добавочных диаграмм, унитаризирующих S-матрицу.

в) Специфичной особенностью построенной теории является и то обстоятельство, что добавочные диаграммы имеют здесь нековариантный вид. Это является следствием процедуры получения S-матрицы путем упорядочения по времени и применения канонического формализма. Последние, в свою очередь, диктуют определенный рецепт для вычисления расходящихся выражений также и в обычных фейнмановских диаграммах для этого взаимодействия (T-упорядочению соответствует временная раздвижка лагранжианов взаимодействия в совпадающих точках). Предварительное рассмотрение показывает, что последовательное проведение такого рецепта вычисления приводит к тому, что нековариантные добавочные диаграммы полностью компенсируются нековариантными добавками, возникающими в расходящихся обычных фейнмановских диаграммах для этого взаимодействия, и S-матрица в целом остается ковариантна.

г) Выявляется интересная связь между массивной гравитацией, квантованием пространства-времени и электромагнитным полем.

2. Лагранжиан массивного тензорного поля может быть построен по аналогии с лагранжианом массивных калибровочных полей. Для этого к лагранжиану гравитационного поля

$$L_0 = \sqrt{-g}\, R \tag{1}$$

следует добавить массовый член. Очевидно для этой цели подойдет космологический член $\lambda\sqrt{-g}$. Однако лагранжиан

$$L_1 = \sqrt{-g}\, R + \lambda\sqrt{-g} \tag{2}$$

в линейном приближении по полю (по отклонению метрики от метрики Минковского) содержит член первой степени по полю. Кроме того, L_1 является скалярной плотностью (как и L_0) относительно общих преобразований координат. Таким образом, в квантовой теории поля с лагранжианом L_1 возникает интересная ситуация. С одной стороны, теория калибровочно-инвариантна, и, несмотря на наличие массового члена, должна описывать лишь две степени свободы. С другой стороны, член, линейный по полю, приводит к спонтанному нарушению калибровочной инвариантности. При этом может оказаться, что физические тензорные частицы являются массивными и имеют нормальное число степеней свободы. В настоящей работе, однако, этот интересный вопрос обсуждаться не будет.

Следующий шаг в построении лагранжиана массивного тензорного поля состоит в том, что мы вычтем из L_1 член L_2, линейный по полю. При этом теория становится лишь частично калибровочно-инвариантной.

К сожалению, нам не известны критерии выбора формы L_2, и разные L_2 приводят, по-видимому, к неэквивалентным теориям.

Одно из возможных ограничений на L_2 состоит в требовании, чтобы следствиями уравнений движения были уравнения связи, линейные по динамическим переменным. Уравнения связи получаются следующим образом: поскольку вариация L_1 по динамическим переменным $h_{\mu\nu}$ удовлетворяет четырем тождествам вида

$$R_{\mu\nu\lambda}\frac{\delta L_1}{\delta h_{\nu\lambda}} = 0, \tag{3}$$

следствиями уравнений движения будут следующие уравнения связи:

$$R_{\mu\nu\lambda}\frac{\delta L_2}{\delta h_{\nu\lambda}}=0. \tag{4}$$

Уравнения связи (4) заведомо будут линейными, если L_2 и $R_{\mu\nu\lambda}$ линейны по $h_{\mu\nu}$. В качестве переменных, по которым $R_{\mu\nu\lambda}$ линеен, можно выбрать следующие [5]:

$$h_{\mu\nu}^{(\beta,n)}=(-g)^{\beta}\,g_{\mu\nu}^{n}-\delta_{\mu\nu}. \tag{5}$$

В результате получаем следующий лагранжиан массивного тензорного поля:

$$L^{(\beta,n)}=\sqrt{-g}R-m^2\left\{-\frac{4\beta+n}{n^2}\sqrt{-g}+\frac{1}{2n^2}h_{\mu\mu}^{(\beta,n)}\right\}+h_{\mu\nu}^{(\beta,n)}J^{\mu\nu}. \tag{6}$$

При каноническом квантовании (6) в качестве канонических переменных можно выбрать любые величины и нам будет удобно взять

$$h_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}^{(0,1)}=g_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Однако уравнения связи будут линейными только в переменных $h_{\mu\nu}^{(\beta,n)}$. Коэффициенты в (6) подобраны так, что в линейном приближении лагранжиан равен (с точностью до несущественной константы и при $J^{\mu\nu}=0$):

$$\mathscr{L}_0^{(\beta,n)}=\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial_\mu h_{\nu\lambda}-\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial_\lambda h_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\nu}\partial_\lambda h_{\mu\lambda}-$$
$$-\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\nu}\partial_\mu h_{\lambda\lambda}-\frac{m^2}{4}(h_{\mu\nu}h_{\mu\nu}+ph_{\mu\mu}h_{\nu\nu}), \tag{8}$$

$$p=[(4\beta+n-1)^2-1-n^2]/4n^2. \tag{9}$$

Лагранжиан (6) совпадает с лагранжианом массивного тензорного поля, полученным Огиевецким и Полубариновым [5] из групповых соображений.

Перейдем к построению квантовой теории. Рассмотрим вначале случай $\beta=0$, $n=1$:

$$L^{0,1}=\sqrt{-g}\;R+m^2(\sqrt{-g}-{}^1\!/_2 g_{\mu\mu})+g_{\mu\nu}J^{\mu\nu}. \tag{10}$$

(Для удобства следующих ниже выкладок мы добавили несущественные члены $-2m^2$ и $J^{\mu\mu}$.)

Добавляя к (10) член с полной производной [7]

$$\partial_0\left[\partial_i(\sqrt{-g}\,g^{00})\frac{g^{0i}}{g^{00}}\right]-\partial_i\left[\partial_0(\sqrt{-g}\,g^{00})\frac{g^{0i}}{g^{00}}\right], \tag{11}$$

получаем эквивалентный лагранжиан

$$L'=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{-g^{(3)}}}{\sqrt{\alpha}}Q_{ik}(e^{ik}e^{lm}-e^{il}e^{km})Q_{lm}+\sqrt{\alpha}\sqrt{-g^{(3)}}R^{(3)}+\mathscr{L}_m, \tag{12}$$

где

$$\mathscr{L}_m=m^2(\sqrt{\alpha}\sqrt{-g^{(3)}}-{}^1\!/_2\alpha-{}^1\!/_2 g_{0i}g_{0k}e^{ik}+{}^1\!/_2 g_{ii})+$$
$$+\alpha J^{00}+g_{0i}g_{0k}e^{ik}J^{00}-2g_{0i}J^{0i}+g_{ik}J^{ik}, \tag{13}$$

$$\alpha=\frac{1}{g^{00}}=g_{00}-g_{0i}g_{0k}e^{ik},\; g_{ik}e^{kl}=\delta_i^l, \tag{14}$$

$$Q_{ik}=\dot g_{ik}-\nabla_i g_{0k}-\nabla_k g_{0i}, \tag{15}$$

$\sqrt{-g^{(3)}}$, $R^{(3)}$ и ∇_i — трехмерные аналоги соответственно четырехмерных $\sqrt{-g}$, R и ковариантной производной; индексы i, k, l, m пробегают значения 1, 2, 3.

Найдем канонические импульсы $\pi^{\mu\nu}$, сопряженные переменным $h_{\mu\nu}$:

$$\pi^{00} = \pi^{0i} = 0, \tag{16}$$

$$\pi^{ik} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{-g^{(3)}}}{\sqrt{\alpha}}(e^{il}e^{km} - e^{ik}e^{lm})Q_{lm}. \tag{17}$$

Соответственно условию (16) переменные h_{00}, h_{0i} являются зависимыми и могут быть выражены через h_{ik} и π^{ik} с помощью следующих уравнений связи [(0μ)-компонент уравнений движения]:

$$(-{}^1/_2 m^2 + J^{00})g_{0i} + g_{ik}\tilde{\pi}^k - g_{ik}J^{0k} = 0, \tag{18}$$

$$\left(\frac{1}{2}m^2 - J^{00}\right)\sqrt{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g^{(3)}}}\pi^{ik}\left(g_{il}g_{km} - \frac{1}{2}g_{ik}g_{lm}\right)\pi^{lm} - $$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{-g^{(3)}}\,R^{(3)} - \frac{m^2}{2}\sqrt{-g^{(3)}} = 0, \tag{19}$$

$$\tilde{\pi}^k = (\partial_i\delta_l + \gamma^k_{il})\pi^{il}, \tag{20}$$

γ^i_{kl} — 3-мерный аналог 4-мерного символа Кристоффеля $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$. Гамильтониан, построенный по обычным каноническим правилам, равен

$$H = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-g^{(3)}}}\pi^{ik}\left(g_{il}g_{km} - \frac{1}{2}g_{ik}g_{lm}\right)\pi^{lm} + $$

$$+ 2\pi^{ik}\nabla_i g_{0k} - \sqrt{\alpha}\sqrt{-g^{(3)}}R^3 - \mathscr{L}_m. \tag{21}$$

Подразумевается, что α и g_{0i} в (21) выражены через h_{ik} и π^{ik} с помощью (18) и (19).

Интересно, что гамильтониан может быть также переписан в виде

$$H = -\frac{m^2}{2}g_{00} - \frac{m^2}{2}g_{ii} + J^{00}g_{00} - g_{ik}J^{ik}. \tag{21a}$$

Беря формальный предел $m \to 0$ (без учета возможной сингулярности g_{00} по m; напомним, что g_{00} — зависимая переменная), получаем известный результат (при $J^{\mu\nu} = 0$), что для гравитационного поля гамильтониан обращается в нуль, если не учитывать необходимости введения калибровочных условий при $m = 0$.

Для построения производящего функционала выведем удобное для нас выражение:

$$Z = \left\langle 0 \left| T\exp\left\{-i\int dx\, H_{int}(\pi^{ik}, g_{ik})\right\}\right| 0\right\rangle =$$

$$= \exp\left\{-i\int dx\, H'\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi_{ik}}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{ik}}\right)\right\}\times$$

$$\times \left\langle 0\left| T\exp\left\{i\int dx(\xi_{ik}\pi^{ik} + J^{ik}g_{ik})\right\}\right| 0\right\rangle\Big|_{\xi_{ik}=0}, \tag{22}$$

$$H' = H_{int} + g_{ik}J^{ik}. \tag{23}$$

В (22) π^{ik} и g_{ik} являются операторами в представлении взаимодействия, т. е. свободными операторами, соответствующими лагранжиану (8) (с $\beta = 0, n = 1$).

Нетрудно проверить справедливость равенства

$$\left\langle 0\right| T\exp\left\{ i\int dx(\xi_{ik}\pi^{ik}+J^{ik}g_{ik})\right\}\left|0\right\rangle =$$
$$=\int d\pi^{ik}dg_{ik}\exp\left\{ i\int dx(\pi^{ik}\dot{g}_{ik}-H_0(\pi,g)+\xi_{ik}\pi^{ik}+J^{ik}g_{ik})\right\}. \tag{24}$$

Равенство (24) справедливо для произвольной теории свободных полей, в которой независимые канонические переменные π_i и q_i, $[\pi_i, q_i]=-i\delta_{ij}$, описываются гамильтонианом H_0, билинейным по π_i и q_i, причем уравнения движения не противоречат каноническим коммутаторам.

С помощью (24) получаем следующее выражение для производящего функционала:

$$Z_{0,1}=\int d\pi^{ik}\,dg_{ik}\exp\left\{ i\int dx\,[\pi^{ik}\dot{g}_{ik}-H(\pi,g)]\right\}. \tag{25}$$

Перепишем (25) в следующем виде:

$$Z_{0,1}=\int d\pi^{ik}d\sqrt{\alpha}\,dg_{0i}dg_{ik}D\delta\{(18)\}\delta\{(19)\}\times$$
$$\times\exp\left\{ i\int dx[\pi^{ik}\dot{g}_{ik}-H(\pi^{ik},\alpha,g_{0i},g_{ik})]\right\}, \tag{26}$$
$$D=\mathrm{Det}^4\left[\left(\frac{m^2}{2}-J^{00}(x)\right)\delta(x-y)\right]. \tag{27}$$

$H(\pi^{ik},\alpha,g_{0i},g_{ik})$ дается выражением (21), в котором уже не нужно выражать α и g_{0i} через канонически независимые переменные; $\delta((18))$ и $\delta((19))$ — δ-функции от аргументов, являющихся левой частью равенств (18) и (19).

Представим δ-функции в (26) в виде

$$\delta\{(18)\}\delta\{(19)\}=\int d\Lambda^\mu\exp\{i[\Lambda^0\cdot(19)+\Lambda^i\cdot(18)_i]\}. \tag{28}$$

Сделаем замену переменных

$$\sqrt{\alpha}\to\sqrt{\alpha}+{}^1/_2\Lambda^0,\quad g_{0i}\to g_{0i}-{}^1/_2 g_{ik}\Lambda^k.$$

Имеем

$$Z_{0,1}=\int dg_{\mu\nu}d\pi^{ik}d\Lambda^\mu\prod_x\alpha^{-1/2}(x)\times$$
$$\times\exp\left\{ i\int dx\left[-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-g^{(3)}}}\pi^{ik}\left(g_{il}g_{km}-\frac{1}{2}g_{ik}g_{lm}\right)\pi^{lm}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m^2}{4}\Lambda^{02}+\frac{m^2}{4}\Lambda^i g_{ik}\Lambda^k+L^{(0,1)}\right]\right\}. \tag{29}$$

Интегралы по $d\Lambda^\mu$ и $d\pi^{ik}$ являются теперь гауссовыми и легко вычисляются. В результате получаем:

$$Z_{0,1}=\int dg_{\mu\nu}D_1^{-2}D_2\exp\left\{ i\int dx\,L^{(0,1)}\right\}, \tag{30}$$
$$D_1=\mathrm{Det}[-g(x)\delta(x-y)],\quad D_2=\mathrm{Det}[-g^{(3)}(x)\delta(x-y)]. \tag{31}$$

В (30) мы опустили множитель $\mathrm{Det}^4[(\frac{m^2}{2}-J^{00}(x))\delta(x-y)]$, который не дает вклада на массовой оболочке. Полностью аналогичные выкладки для случая $\beta={}^1/_2$, $n=-1$:

$$L^{(1/2,-1)}=\sqrt{-g}R+m^2\sqrt{-g}\left(1-\frac{1}{2}g^{\mu\mu}\right)+g_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \tag{10a}$$

приводят к следующему выражению для производящего функционала:

$$Z_{1/2,-1} = \int dg_{\mu\nu} D_1^{-7/2} D_2^{3} \exp\left\{i \int dx\, L^{(1/2,-1)}\right\}. \tag{30a}$$

Удается построить производящий функционал также для следующих случаев:

$$\beta = 0, \quad n = -1; \quad \beta = -1/2, \quad n = 1. \tag{32}$$

Во всех рассмотренных случаях выражение для производящего функционала равно

$$Z_{(\beta,n)} = \int dg_{\mu\nu} D_1^{a} D_2^{b} \exp\left\{i \int dx\, L^{(\beta,n)}\right\}. \tag{33}$$

Показатели a и b, разные для разных пар индексов (β, n), не равны нулю и не обращаются в нуль при переходе к интегрированию по $g_{\mu\nu}^{(\beta,n)}$ (показатель b вообще нельзя обратить в нуль с помощью перехода к другим лоренц-ковариантным переменным интегрирования.)

Перейдем к обсуждению выражений (30), (33).

а) В теории появляются эффективные добавки к лагранжиану вида

$$-i\delta(0) \int dx (a \ln g + b \ln g^{(3)}). \tag{34}$$

Эти члены неэрмитовые и, что самое главное, нековариантные.

Отметим, что члены вида (34) появляются во всех теориях, в которых коэффициент перед квадратичным по π членом в гамильтониане зависит от канонических координат. В частности, в киральных и янг-миллсовских теориях они существенны для унитарности и инвариантности теорий.

Тот факт, что выражение (34) нековариантно, не обязательно означает, что теория (33) нековариантна. Дело в том, что в лагранжиан входят существенно нелинейные члены с произведениями $g_{\mu\nu}$ и $\dot{g}_{\mu\nu}$ в совпадающих точках. Это требует корректного построения возникающих T-произведений (аналогичная проблема возникает при выборе правильной симметризации π^{ik} и g_{ik} в гамильтониане). Предварительное рассмотрение показывает, что в рамках теории возмущений или в методе стационарной фазы вклад от L приводит к членам $\delta(0)$, которые полностью компенсируют члены (34).

б) Присутствие членов (34) сказывается и на обсуждении вопроса о предельном переходе $m \to 0$ [1)]. Если бы b равнялось нулю, тогда с помощью метода, использованного авторами [11] в теории массивного поля Янга — Миллса, можно было бы привести соображения, что в полной теории предел $m \to 0$ существует и совпадает с теорией гравитационного поля, построенной в работах [12–15]. При этом все теории массивного поля с разными (β, n) приводили бы к одинаковым функциональным выражениям для производящего функционала гравитационного поля с точностью до множителя D_1^{γ}. Присутствие множителя D_2^{b} затрудняет рассмотрение этого вопроса, поскольку он не имеет таких простых трансформационных свойств относительно координатных калибровочных преобразований, как D_1. (Другое осложнение связано с тем фактом, что в данном случае калибровочная группа некомпактна и интеграл по группе расходится.) Во всяком случае, мы можем сделать вывод, что формальное рассмотрение предельного перехода $m \to 0$ не позволяет нам фиксировать множитель D_1^{γ}, который оставался неопределенным при построении правил Фейнмана для гравитационного поля (см. обсуждение в [15]), и при выполнении предельного перехода $m \to 0$ необходимо корректно учесть эффект совпадения времен в нелинейных членах в лагранжиане.

---

1) Вопрос о предельном переходе $m \to 0$ в гравитации обсуждается также в работах [8–10].

в) Имеется серьезная трудность в физической интерпретации теории с лагранжианом (6). Дело в том, что лагранжиан (6) описывает частицы спинов 2 и 0, причем частица спина 0 обладает индефинитной метрикой[2]. Чтобы увидеть это, рассмотрим кинетический член в гамильтониане в линейном приближении:

$$\pi^{ik}\left(\delta_{il}\delta_{km}-\frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{lm}\right)\pi^{lm}. \tag{35}$$

Его можно переписать через линейно независимые величины $\pi_T^{ik}=\pi^{ik}-{}^1/_3\delta^{ik}\pi$ и $\pi=\delta_{ik}\pi^{ik}$ в следующем виде:

$$\overset{ik}{\pi_T}\,\overset{ik}{\pi_T}-{}^1/_6\pi^2, \tag{36}$$

откуда непосредственно видна индефинитность метрики (или энергии). В линейном приближении возможно построить лагранжиан массивного тензорного поля, описывающего только спин 2 [5]. Для этого в (8) следует взять $p=-1$. Нетрудно проверить, что в этом случае следствиями уравнений являются

$$\partial_\mu h_{\mu\nu}=0,\quad h_{\mu\mu}=0. \tag{37}$$

Условие $p=-1$ налагает ограничение

$$n^2\leqslant{}^1/_3. \tag{38}$$

В частности, возможно выбрать

$$\beta=0,\quad n={}^1/_2. \tag{39}$$

Каноническое квантование удобно выполнить, например, с помощью тетрадного формализма:

$$\bar{h}_{\mu\nu}=r_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu},\quad g_{\mu\nu}=r_{\mu\lambda}r_{\lambda'\nu}\delta^{\lambda\lambda'}. \tag{40}$$

Однако в нелинейной теории (6) имеется только четыре уравнения связи (вместо пяти), так что вопрос о числе независимых компонент поля требует более подробного исследования.

Другая возможность получить физическую теорию состоит в следующем. В линеаризованной теории (8) масса частицы спина 2 равна m и частицы спина $0-(1+4p)^{1/2}(1+p)^{-1/2}m$. При $p\to-1$ масса скалярной частицы стремится к ∞, так что в этом пределе S-матрица становится унитарной в подпространстве частицы спина 2. В случае взаимодействия с другими полями или в нелинейной теории следует изучать поведение перенормированных масс. В силу неперенормируемости теории неясно, как ведет себя перенормированная масса частицы спина 0 (при фиксированной конечной перенормированной массе частицы спина 2) при $p\to-1$. Если же найдется значение параметров (β, n), для которых перенормированная масса частицы спина 0 бесконечна, а перенормированная масса частицы спина 2 конечна, тогда соответствующая теория допускает физическую интерпретацию.

г) Наконец, отметим еще одно любопытное обстоятельство. Как хорошо известно, киральный лагранжиан пионного поля может быть получен как неинвариантная добавка к лагранжиану массивного поля Янга — Миллса, возникающая при калибровочном преобразовании векторного поля.

Естественно поэтому попытаться интерпретировать параметры координатных преобразований гравитационного поля как некоторое квантованное поле, которое, таким образом, будет являться реализацией идей квантования пространства-времени. Вводя квантованное поле $A^\mu(x)$ с помощью соотношения

$$\xi^\mu(x)=x^\mu+A^\mu(x), \tag{41}$$

где $\xi^\mu(x)$ — новые координаты, соответствующие калибровочному преобразованию:

[2] На этот факт одному из авторов (И. Т.) указал В. И. Захаров. См. также [8].

$$x^\mu \to x'^\mu = \xi^\mu(x), \tag{42}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \partial_\mu \xi^\lambda(x) \partial_\nu \xi^\sigma(x) g_{\lambda\sigma}(x),$$

мы получаем из (6) следующий лагранжиан поля A^μ:

$$\mathcal{L}_A = \frac{4\beta + n}{n^2} J - \frac{1}{2n^2} J^{2\beta} \delta^{\mu\nu} K^n_{\mu\nu}, \tag{43}$$

$$J = \det J^\mu_\nu, \qquad K_{\mu\nu} = J^{\mu'}_\mu J^{\nu'}_\nu \delta_{\mu'\nu'}, \tag{44}$$

$$J^\nu_\mu(x) = \partial_\mu \xi^\nu(x) = \delta^\nu_\mu + \partial_\mu A^\nu(x). \tag{45}$$

В квадратичном по A^μ приближении имеем

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F^\nu_\mu F^\nu_\mu - (p+1)(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{46}$$

$$F^\nu_\mu = \partial_\mu A^\nu - \delta_{\mu\mu'} \delta^{\nu\nu'} \partial_{\nu'} A^{\mu'}. \tag{47}$$

Таким образом, при $p = -1$, т. е. в том случае, когда в линеаризованной массивной гравитации имеется только спин 2, $\mathcal{L}^0_A$ совпадает с лагранжианом Максвелла. Это является сильным аргументом в пользу интерпретации A^μ как электромагнитного поля. Полный лагранжиан $\mathcal{L}_A$ не является калибровочно-инвариантным (даже при $p = -1$). Можно, однако, построить такой лагранжиан массивной гравитации (например, в качестве массового члена взять массовый член лагранжиана (8) с $p = -1$), для которого соответствующее $\mathcal{L}_A$ будет зависеть только от $F_{\mu\nu}$.

Требование, чтобы $\mathcal{L}_A$ зависело только от $F_{\mu\nu}$, можно также использовать как один из критериев при построении массового члена в гравитационном лагранжиане.

Мы видим, таким образом, что открывается интересная возможность связи между проблемой квантования гравитации и пространства-времени и электромагнитным полем.

Литература

[1] М. А. Марков. Препринт 70-99, ИТФ, Киев, 4, 1970.
[2] A. Salam. Препринт 70-99, 15, ИТФ, Киев, 1970; ICPT preprints IC/70/106, IC/71/3.
[3] Е. С. Фрадкин. XII Междунар. конф. по физике высоких энергий, Дубна, 1964, т. 2, 255.
[4] E. S. Fradkin. Nucl. Phys., **76**, 588, 1966.
[5] V. I. Ogievetsky, I. V. Polubarinov. Ann. Phys., **35**, 167, 1965.
[6] Е. С. Фрадкин. В сб. Проблемы теоретической физики, «Наука», 1969, 386.
[7] P. A. M. Dirak. Proc. Roy. Soc., **A246**, 333, 1958.
[8] В. И. Захаров. Письма ЖЭТФ, **12**, 447, 1970.
[9] H. Van Dam, M. Veltman. Nucl. Phys., **B22**, 397, 1970.
[10] А. И. Вайнштейн. Докл. на сессии Отд. яд. физ. АН СССР, Москва, май 1971.
[11] И. В. Тютин, Е. С. Фрадкин. ЯФ, **13**, 433, 1971.
[12] B. S. DeWitt. Phys. Rev., **162**, 1195, 1967.
[13] L. D. Faddeev, V. N. Popov. Phys. Lett., **25B**, 29, 1967.
[14] S. Mandelstam. Phys. Rev., **175**, 1604, 1968.
[15] E. S. Fradkin, I. V. Tyutin. Phys. Rev., **D2**, 2841, 1970.

A QUANTIZATION OF MASSIVE GRAVITATION

I. V. TYUTIN, E. S. FRADKIN

The question is analysed of a canonical quantization of a massive gravitational field theory and of a construction of a suitable generating functional (of Feynman diagrams rules). The auxiliary diagrams being typical for nonlinear derivative interaction models appear in the theory. Parameters of the coordinate gauge transformations are interpreted as a quantized field that appears may be identified as an electromagnetic field.