ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 12, вып. 2, 1970

ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БЕЗ РАСХОДИМОСТЕЙ

И. В. ТЮТИН, Е. С. ФРАДКИН

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АКАДЕМИИ НАУК СССР

(Поступила в редакцию 19 декабря 1969 г.)

В работе предложен метод доопределения лагранжиана и операторов тока с соблюдением групповых свойств исходной классической теории. Применительно к электродинамике эта методика приводит к конечной (нелокальной) унитарной градиентно-инвариантной канонической теории. Обсуждается также неканоническая модель конечной электродинамики.

1. Введение

Как известно, трудности лагранжевого подхода в теории поля обусловлены тем обстоятельством, что динамическое выражение для операторов тока содержит не меньше двух операторов поля в совпадающих точках. Между тем такая комбинация операторов поля лишена операторного смысла. Это, в частности, приводит к тому, что применение канонических правил коммутации при вычислении коммутаторов тока требует соблюдения определенной осторожности и сопряжено с появлением «добавочных» нетривиальных членов (швингеровского типа), возникающих от раскрытия неопределенности типа $0 \times \infty$. Последнее обстоятельство весьма нежелательно также с точки зрения аппаратурных вычислений, поскольку оно лишает метод канонического квантования обычного автоматизма. Поэтому, следуя Швингеру, были предприняты различные попытки доопределения оператора тока как предельного выражения нелокального оператора, так что до проведения предельного перехода вычисление коммутации можно проводить обычным путем (при этом не возникает никаких неопределенностей).

В основном предложенные способы доопределения оператора тока имеют тот существенный недостаток, что для вновь построенного оператора до предельного перехода не удовлетворены строго некоторые законы сохранения локального варианта теории (например, в электродинамике — закон сохранения тока). Более того, до проведения предельного перехода в строгом смысле вообще отсутствует динамическая теория. Естественно попытаться построить последовательную с математической точки зрения теорию нелокального типа для того, чтобы после предельного перехода к локальному случаю мы получили необходимый нам вариант теории. Построенная таким образом унитарная нелокальная модель с каноническими правилами коммутаций, для которой до предельного перехода выполнялись бы групповые законы локального варианта (например, применительно к электродинамике — градиентная инвариантность и закон сохранения тока), дала бы возможность не только просто находить интересующие нас коммутации токов в локальной теории, но и решать, исследуя предельный переход, принципиальные вопросы существования локальной теории и структуры решений для локальной теории не по теории возмущений. При этом математическая непротиворечивость теории подразумевает, естественно, отсутствие расходимостей до предельного перехода к локальному варианту.

Такая программа проведена в настоящей статье. Основная идея построения теории сводится к тому, что для строгого выполнения законов сохранения доопределять необходимо не токи, а исходный лагранжиан. При этом «размазка» лагранжиана проводится с соблюдением групповых свойств исходной теории. Суть методики включения взаимодействия в «размазанном» лагранжиане с соблюдением групповых свойств сводится к переходу от интегральной записи «размазки» в лагранжиане к дифференциальной форме (см. формулу (4)), для которой введение взаимодействия сводится к замене оператора производной по координате на ковариантную производную соответствующего варианта теории (так, в случае векторного взаимодействия $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$; в случае поля Янга — Миллса $\partial_\mu \delta^{ab} \to \partial_\mu \delta^{ab} + \lambda f^{abc} A_\mu^c$ и т. д.).

Поскольку мы хотим построить каноническую схему, то размазку (зависимость формфактора от координат) будем проводить лишь по пространственным координатам. Здесь необходимо отметить существенную специфику введения таких калибровочно-инвариантных взаимодействий (путем замены импульса обобщенным импульсом), а именно то обстоятельство, что тот же формфактор входит в свободный лагранжиан и соответственно меняет спектр энергий свободных частиц. Это в свою очередь приводит к тому, что по теории возмущений формфактор, вообще говоря, не улучшает сходимость по сравнению с локальным вариантом теории. Однако, как будет продемонстрировано ниже в спинорной электродинамике, в классе формфакторов с убывающей асимптотикой удается добиться того, чтобы нелокальный вариант электродинамики по теории возмущений не содержал расходимостей. Что же касается класса формфакторов с растущей асимптотикой, то (как релятивистская, так и нерелятивистская размазки) в этом случае по теории возмущений остаются расходимости и можно лишь надеяться на методы, существенно выходящие за рамки обычной теории возмущений.

2. Электрон во внешнем поле

Регуляризованный по пространству лагранжиан для случая электрона во внешнем поле мы построим следующим образом. Сначала возьмем регуляризованный по пространству лагранжиан свободных электронов, а затем введем электромагнитное взаимодействие на основе требования калибровочной инвариантности лагранжиана. Регуляризацию только по пространству выбираем потому, что хотим оставаться в рамках канонического формализма.

Для случая свободных электронов имеем ($x_0 = y_0$):

$$\int d\mathbf{x}\, L_0(x) = \int d\mathbf{x}\, \bar\psi(x) i\gamma_0 \partial_0 \psi(x) - {}^1/_4 \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} [\bar\psi(x), (i\gamma_k \overleftrightarrow{\partial_k} + 2m)\psi(y)] f(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (1)$$

Обрезающая функция $f(\mathbf{x}) \in S^3$.

Уравнения движения и функция Грина свободных электронов имеют вид:

$$i\gamma_0\partial_0\psi(x) - \int d\mathbf{y} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})(i\gamma_k\partial_k + m)\psi(y) = 0, \quad (2)$$

$$\tilde G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dp \tilde G(p) e^{-ipx}, \quad \tilde G(p) = i\,\frac{\gamma_0 p_0 - (\gamma_k p_k + m) f_p}{p_0^2 - \omega_p^2 + i\varepsilon}, \quad (3)$$

$$\omega_p^2 = (\mathbf{p}^2 + m^2) f_p^2, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p} f_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}.$$

Для включения калибровочно-инвариантного электромагнитного взаимодействия используем следующее равенство:

$$\int dy\, f(x-y)\varphi(y) = \int dy\, f(y)\, e^{y\partial/\partial x}\varphi(x). \tag{4}$$

Электромагнитное взаимодействие теперь вводится обычным способом путем замены $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$. После некоторых преобразований лагранжиан электрона во внешнем поле принимает вид:

$$\int d\mathbf{x}\, L(x) = \int d\mathbf{x}\, L_0(x) + \int d\mathbf{x}\, L_{int}(x), \tag{5}$$

$$\int d\mathbf{x} L_{int}(x) = {}^1\!/_4 \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \{[\bar\psi(x), \gamma_\mu\psi(y)]\, Q_\mu(x, y) - - [\bar\psi(x), (i\gamma_k\overleftrightarrow{\partial}_k + 2m)\,\psi(y)]\, Q(x, y)\}, \tag{6}$$

$$Q_0(x, y) = 2eA_0(x)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{7}$$

$$Q_k(x, y) = e(A_k(x) + A_k(y))f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Gamma(x, y), \tag{8}$$

$$Q(x, y) = (\Gamma(x, y) - 1)f(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{9}$$

$$\Gamma(x, y) = \exp\left\{-ie(x-y)_k \int_0^1 d\alpha A_k[x - \alpha(x-y)]\right\}. \tag{10}$$

Аналогичный лагранжиан (точнее, гамильтониан) рассматривался Бульваре [1].

Поскольку лагранжиан взаимодействия не содержит производных по времени, в представлении взаимодействия

$$H_{int} = -L_{int}, \tag{11}$$

$$S = T\exp\left\{i\int dx L_{int}(x)\right\}. \tag{12}$$

T означает T-произведение Дайсона, т. е.

$$TA(t_1)B(t_2) = \theta(t_1-t_2)A(t_1)B(t_2) + \theta(t_2-t_1)B(t_2)A(t_1). \tag{13}$$

Электромагнитный ток определяется как отклик лагранжиана на вариацию электромагнитного поля

$$J_\mu(x) = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\int dz\, L(z). \tag{14}$$

В представлении взаимодействия получаем

$$J_\mu(x) = \langle K_\mu(x)\rangle, \tag{15}$$

$$K_\mu(x) = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\int dz\, L_{int}(z). \tag{16}$$

В (15) мы использовали обозначение

$$\langle Q\rangle = S^+ TQS. \tag{17}$$

Докажем теперь, что электромагнитный ток сохраняется:

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0. \tag{18}$$

Действительно,

$$K_0(x) = {}^1\!/_2 e[\bar\psi(x), \gamma_0\psi(x)] = ej_0(x), \tag{19}$$

$$K_i(x) = {}^1/_4 e\int d\mathbf{y}\left\{\left[\bar{\psi}(x), \gamma_i\psi(y)\right] f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\Gamma(x,y) + (x \leftrightarrow y)\right\} -$$
$$- {}^1/_4 ie\int d\mathbf{z}\,d\mathbf{y}\,(z-y)_i \int_0^1 d\alpha\,\delta\,[\mathbf{x}-\mathbf{z}+\alpha(\mathbf{z}-\mathbf{y})]\,[\bar{\psi}(z), \{\gamma_k(eA_k(z) +$$
$$+ eA_k(y) + i\overleftrightarrow{\partial}_k) + 2m\}\,\psi(y)]\,f(\mathbf{z}-\mathbf{y})\,\Gamma(z,y), \qquad (20)$$
$$\partial_\mu K_\mu(x) = e\partial_0 j_0(x) - {}^1/_4 e\int d\mathbf{y}\partial_k^x\{[\bar{\psi}(x), \gamma_k\psi(y)]\,f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\Gamma(x,y) + (x\leftrightarrow y)\} +$$
$$+ {}^1/_4 ie\int d\mathbf{y}\,\{[\bar{\psi}(x), \{\gamma_k\,(eA_k(x) + eA_k(y) + i\overleftrightarrow{\partial}_k) + 2m\}\,\psi(y)]\,f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\times$$
$$\times\Gamma(x,y) - (x\leftrightarrow y)\}, \qquad (21)$$
$$\left[j_0(x), \int d\mathbf{z}L_{int}(z)\right]_{x_0=z_0} = {}^1/_4\int d\mathbf{y}\,\{[\bar{\psi}(y), \{\gamma_k\,(eA_k(x) + eA_k(y) + i\overleftrightarrow{\partial}_k) +$$
$$+ 2m\}\,\psi(x)]\,f(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,\Gamma(x,y) - (x\leftrightarrow y)\} - {}^1/_4 i\int d\mathbf{y}\partial_k^x\{[\bar{\psi}(x), \gamma_k\psi(y)]\times$$
$$\times f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\Gamma(x,y) + (x\leftrightarrow y)\} + {}^1/_2 i\int d\mathbf{y}\,\{[\bar{\psi}(x), \gamma_k\psi(y)]\,\partial_k f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) +$$
$$+ f(\mathbf{y}-\mathbf{x})\overleftarrow{\partial}_k\,[\bar{\psi}(y), \gamma_k\psi(x)]\} + {}^1/_2 m\int d\mathbf{y}\,\{[\bar{\psi}(x), \psi(y)]\,f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - (x\leftrightarrow y)\}. \qquad (22)$$

Используя (19) — (22), получаем

$$\partial_\mu J_\mu(x) = \langle\partial_\mu K_\mu(x)\rangle + i\left\langle\left[K_0(x), \int d\mathbf{z}L_{int}(z)\right]_{x_0=z_0}\right\rangle =$$
$$= e\left\langle\left\{\partial_0 j_0(x) - {}^1/_2\int d\mathbf{y}\,[\bar{\psi}(x), (-im + \gamma_k\partial_k)\,f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\psi(y)] -\right.\right.$$
$$\left.\left. - {}^1/_2\int d\mathbf{y}\,\left[\bar{\psi}(y), f(\mathbf{y}-\mathbf{x})\,(\gamma_k\overleftarrow{\partial}_k + im)\,\psi(x)\right]\right\}\right\rangle. \qquad (23)$$

С помощью уравнения движения свободных электронов (2) непосредственно проверяется, что выражение в фигурных скобках в (23) равно нулю.

Отметим, что электромагнитный ток J_μ не совпадает со швингеровским определением тока. Кроме того, можно показать (см. Приложение), что электромагнитный ток, определенный согласно (14), сохраняется и тождественно совпадает с током Нётер для произвольного калибровочно-инвариантного лагранжиана.

Для производящего функционала $\tilde{Z}$ имеем стандартное выражение [2]

$$\tilde{Z} = \exp\{-\bar{\eta}\tilde{G}(\cdot\,; A)\,\eta\}\,e^{\tilde{\Pi}(A)}. \qquad (24)$$

$\tilde{G}(x, y; A)$ — функция Грина электрона во внешнем поле, удовлетворяющая уравнению

$$\int dz\,[i\gamma_0\partial_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{z}) - {}^1/_2 i\gamma_k\partial_k Q(x,z) - {}^1/_2 iQ(x,z)\,\gamma_k\partial_k - mQ(x,z) +$$
$$+ \gamma_\mu Q_\mu(x,z)\,]\,G(z,y;A) = i\delta(x-y), \quad z_0 = x_0. \qquad (25)$$

Поляризационный оператор $\tilde{\Pi}(A)$ определяется соотношением

$$\exp\{\tilde{\Pi}(A)\} = \left\langle 0\,|\,T\exp\left\{i\int dz\,L_{int}(z)\right\}\right|\,0\right\rangle \qquad (26)$$

и равен

$$\tilde{\Pi}(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\Pi}_n(A), \qquad (27)$$

$$\tilde{\Pi}_n(A) = \frac{1}{n!}\left\langle\,0\,|\,T\left(i\int dz\,L_{int}(z)\right)^n|\,0\,\right\rangle_{tr}. \qquad (28)$$

Индекс tr в (28) означает усеченное T-произведение. Найдем предел производящего функционала (24), вычисляемого по теории возмущений, при $f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$.

Очевидно, что при $f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$ функция Грина $\tilde{G}(x, y; A)$ переходит в релятивистскую функцию Грина электрона во внешнем поле $G(x, y; A)$, удовлетворяющую уравнению

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - m + e\gamma_\mu A_\mu(x)) G(x, y; A) = i\delta(x - y).$$

Рассмотрим теперь поляризационный оператор $\tilde{\Pi}(A)$. Части $\tilde{\Pi}_n(A)$, которые зависят только от нулевых компонент электромагнитного поля, не содержат в вершинах формфакторов $f(\mathbf{x})$, и при использовании правил Фейнмана следует соблюдать определенную осторожность. Рассмотрим, например, $\tilde{\Pi}_2(A)$:

$$\tilde{\Pi}_2^0(A) = -{}^1/_2 e^2 \int dx\, dy\, A_0(x) A_0(y) \langle 0 | T j_0(x) j_0(y) | 0 \rangle. \tag{29}$$

Имеем

$$\langle 0 | j_0(x) j_0(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{k}}{\omega_p \omega_k} (\omega_p \omega_k + \mathbf{pk} f_p f_k) e^{-i(p+k)(x-y)},$$

$$p_0 = \omega_p, \quad k_0 = \omega_k,$$

$$\langle 0 | T j_0(x) j_0(y) | 0 \rangle = \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | j_0(x) j_0(y) | 0 \rangle + \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | j_0(y) j_0(x) | 0 \rangle = \frac{4i\pi}{(2\pi)^8} \int dk e^{-ik(x-y)} \times$$
$$\times \int d\mathbf{p} \frac{\omega_p + \omega_{p-k}}{(\omega_p + \omega_{p-k})^2 - k_0^2 + i\varepsilon} \left(1 - \frac{p^2 - \mathbf{pk} + m^2}{\omega_p \omega_{p-k}} f_p f_{p-k}\right). \tag{30}$$

То же самое выражение получается, если при вычислении $\langle 0 | T j_0(x) j_0(y) | 0 \rangle$ воспользоваться теоремой Вика, но при интегрировании по внутреннему импульсу интегрировать вначале по нулевой компоненте, а затем по пространственным:

$$\langle 0 | T_W j_0(x) j_0(y) | 0 \rangle = -\operatorname{Sp} \tilde{G}(x - y) \gamma_0 \tilde{G}(y - x) \gamma_0 =$$
$$= -\frac{4}{(2\pi)^8} \int dk e^{-ik(x-y)} \times$$
$$\times \int d\mathbf{p} \int dp_0 \frac{p_0(p_0 - k_0) + [\mathbf{p}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + m^2] f_p f_{p-k}}{(p_0^2 - \omega_p^2 + i\varepsilon)[(p_0 - k_0)^2 - \omega_{p-k}^2 + i\varepsilon]} = \frac{4i\pi}{(2\pi)^8} \int dk e^{-ik(x-y)} \times$$
$$\times \int d\mathbf{p} \frac{\omega_p + \omega_{p-k}}{(\omega_p + \omega_{p-k})^2 - k_0^2 + i\varepsilon} \left(1 - \frac{p^2 - \mathbf{pk} + m^2}{\omega_p \omega_{p-k}} f_p f_{p-k}\right). \tag{31}$$

Аналогичное утверждение справедливо и для среднего по вакууму от T-произведения произвольного числа операторов j_0. В той части $\tilde{\Pi}_n(A)$, которая содержит пространственные компоненты электромагнитного поля, порядок интегрирования по внутреннему импульсу произволен.

Таким образом, мы получаем, что при вычислении по теории возмущений можно пользоваться правилами Фейнмана, но при интегрировании по внутреннему импульсу следует интегрировать вначале по нулевой компоненте, а затем по пространственным.

Найдем предельное выражение $\tilde{\Pi}(A)$ при $f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$. Из структуры диаграмм теории возмущений, а также из известной структуры расходимостей релятивистской электродинамики заключаем, что

$$\lim_{f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})} \tilde{\Pi}(A) = \Pi^R(A) + \delta\Pi. \tag{32}$$

В (32) $\Pi^R(A)$ означает поляризационный оператор релятивистской квантовой электродинамики с перенормированными петлями второго и четвертого порядков. $\delta\Pi$ имеет следующий вид:

$$\delta\Pi = \int dx [a_{\mu\nu} A_\mu(x) A_\nu(x) + b_{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\mu A_\nu(x) \partial_\lambda A_\sigma(x) + c_{\mu\nu\lambda\sigma} A_\mu(x) A_\nu(x) A_\lambda(x) A_\sigma(x)], \tag{33}$$

a, b и c — числовые коэффициенты. Из соображений размерности a квадратично расходится, b и c логарифмически расходятся.

С учетом доказанного сохранения тока коэффициенты $a_{\mu\nu}$ и $c_{\mu\nu\lambda\sigma}$ в (33) равны нулю, а средний член в (33) зависит от $F_{\mu\nu}$ и F_{ik}.

Явный расчет дает:

$$\delta\Pi = -{}^1/_4 ie^2\alpha \int dx\, F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + {}^1/_4 ie^2\beta \int dx\, F_{ik}(x) F_{ik}(x), \tag{34}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3(2\pi)^4} \int d\mathbf{p}\, \frac{f_p}{\omega_p^3}\left(2 + \frac{m^2}{\omega_p^2}\right), \quad \beta = \frac{1}{5\pi^2}. \tag{35}$$

Константа α логарифмически расходится в пределе $f_p \to 1$ и соответствует перенормировке волновой функции фотона в низшем порядке.

Сформулируем окончательно результаты этого раздела. Калибровочно-инвариантный лагранжиан (6) описывает конечную теорию электрона во внешнем поле со строгим сохранением электромагнитного тока (14).

В релятивистском пределе $f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$ все диаграммы теории возмущений (кроме поляризационной диаграммы второго порядка) переходят в соответствующие выражения релятивистской теории с калибровочно-инвариантной регуляризацией. Поляризационная диаграмма второго порядка имеет дополнительный нековариантный член, соответствующий перенормировке кинетической энергии фотона.

Важно подчеркнуть, что автоматически исключены вершина четырехфотонного взаимодействия и перенормировка массы фотона.

3. Квантовая электродинамика

В этом разделе мы построим конечную нековариантную теорию квантовой электродинамики со строгим сохранением электромагнитного тока, которая в релятивистском пределе совпадает по теории возмущений с перенормированной релятивистской квантовой электродинамикой.

Поскольку взаимодействие перенормирует только поперечную часть электромагнитного поля, удобно работать с электромагнитным полем в поперечной калибровке.

Рассмотрим теорию, описываемую следующим лагранжианом:

$$L(x) = -{}^1/_4 Z_3(f) F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) - {}^1/_4 e_1^2 \beta F_{ik} F_{ik} + \\ + \partial_\mu A_\mu(x) B(x) + L^\psi(x;\, f;\, e_1 A^\varphi). \tag{36}$$

L^ψ в (36) получается из лагранжиана (5) с помощью замены

$$eA_\mu \to e_1 A_\mu^\varphi(x) = e_1 \int d\mathbf{y}\, \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) A_\mu(y), \quad x_0 = y_0. \tag{37}$$

$Z_3(f)$ и e_1 определяются следующими соотношениями:

$$Z_3(f) = \frac{1}{1+e^2\alpha}, \qquad e_1^2 = e^2 Z_3(f). \tag{38}$$

Лагранжиан (36) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \qquad \Box\Lambda = 0, \tag{39}$$

$$\psi(x) \to \psi(x) \exp\{ie_1 \Lambda^\varphi(x)\}, \qquad \Lambda^\varphi(x) = \int d\mathbf{y}\, \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \Lambda(y). \tag{40}$$

Если мы выберем $\varphi(\mathbf{x})$ таким образом, чтобы φ_p не имело нулей, то из калибровочной инвариантности относительно преобразований (39), (40) следует сохранение электромагнитного тока J_μ:

$$J_\mu(x) = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \int dz L^\psi(z;\, f;\, e_1 A^\varphi), \tag{41}$$

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0. \tag{42}$$

Из (42) следует, что поле B удовлетворяет свободному уравнению движения

$$\Box B = 0.$$

Для перехода к представлению взаимодействия следует с помощью канонической процедуры построить по лагранжиану (36) гамильтониан, выделить из него H_0 и H_{int} и построить S-матрицу в представлении взаимодействия:

$$S = T \exp \{-i \int dx H_{int}(x)\}. \tag{43}$$

T в (43) означает T-произведение Дайсона, определенное согласно (13).

В качестве H_0 выберем гамильтониан, соответствующий свободному лагранжиану:

$$L_0 = L_0^A + L_0^\psi, \tag{44}$$

$$L_0^A = -{}^1/_4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\mu B, \tag{45}$$

L_0^ψ равен лагранжиану (1).

Можно доказать [3], что если перейти от T-произведения Дайсона к T-произведению Вика T_W, т. е. вместо сверток

$$\langle 0 | T \dot{A}_\mu \dot{A}_\nu | 0 \rangle$$

использовать свертки

$$\langle 0 | T_W \dot{A}_\mu \dot{A}_\nu | 0 \rangle = -\partial_0^2 \langle 0 | T A_\mu A_\nu | 0 \rangle,$$

то эффективный гамильтониан взаимодействия совпадает с $-L_{int}$:

$$-H_{int}^W = L_{int} = L - L_0,$$

$$S = T_W \exp \{i \int dx L_{int}(x)\}.$$

Пропагатор электромагнитного поля берется в поперечной калибровке.

Отметим, что при переходе $T \to T_W$ в релятивистской локальной квантовой теории поля необходимо кроме использования ковариантных сверток корректно выполнить переход типа

$$\langle 0 | T \varphi^m(x) \varphi^n(x) | 0 \rangle \to \langle 0 | T_W \varphi^m(x) \varphi^n(x) | 0 \rangle\ ^{1)}. \tag{46}$$

В частности, такая проблема возникает при вычислении диаграмм поляризации вакуума в квантовой электродинамике. В рассматриваемой модели такого вопроса для поля A_μ не возникает, поскольку нелинейная часть L_{int} зависит только от A_μ^φ. Переход $T \to T_W$ для фермионного поля был рассмотрен в предыдущем разделе.

Рассмотрим теперь релятивистский предел теории возмущений для функций Грина. Предел $f, \varphi \to \delta(\mathbf{x})$ выполним последовательно:

1) вначале выполняется предельный переход $f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$ при фиксированном e_1 и φ;

2) после этого выполняется предельный переход $\varphi(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$.

Из результатов предыдущего раздела следует, что после выполнения первого предельного перехода мы получаем конечную теорию со следующими свойствами:

а) для вычисления функций Грина справедлива обычная диаграммная техника с использованием релятивистского пропагатора свободных электронов

$$G(p) = i \frac{\gamma_\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

---

1) Конечно, надо еще доопределить выражение $\varphi^m(x)$.

и модифицированного пропагатора фотонов

$$\bar{D}_{\mu\nu}(p) = -i\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{\varphi_p^2}{p^2 + i\varepsilon};$$

б) поляризационные диаграммы поперечны по внешним импульсам; в поляризационной диаграмме второго порядка выполнена перенормировка волновой функции фотона.

После выполнения второго предельного перехода $\varphi(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$ появляются расходимости, соответствующие перенормировке массы и волновой функции электрона, перенормировке вершинной функции и перенормировке волновой функции фотона порядка e_1^4 и выше.

Рассмотрим подробнее структуру диаграмм. Сдвигом интегрирования всегда можно добиться того, что внутренние фотонные линии не будут зависеть от импульсов, внешних к неприводимой диаграмме или к неприводимой части приводимой диаграммы.

Выполним теперь обычным образом промежуточную перенормировку, т. е. перенормировку при нулевых внешних импульсах. Для этого сделаем два вычитания в неприводимой диаграмме собственной энергии электрона и одно вычитание в неприводимых диаграммах для вершинной функции. Тогда неприводимые диаграммы разбиваются на две части:

$$M = M' + \delta M, \tag{47}$$

где M' получается из M в результате вычитаний, и $\delta M = M - M'$ линейна по внешнему импульсу для массового оператора и не зависит от внешних импульсов для вершинной функции. Аналогичную структуру имеют приводимые диаграммы после проведения вычитаний для всех внутренних приводимых частей (δM, соответствующая поляризационным диаграммам, содержит только члены, квадратичные по внешнему импульсу).

Интеграл M' сходится в пределе $\varphi(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$ и совпадает с результатом промежуточной перенормировки [2] диаграмм релятивистской квантовой электродинамики.

Отметим, что после проведения промежуточной перенормировки в релятивистской электродинамике остается еще конечная перенормировка массы электрона δm. Мы выполним сразу дополнительные вычитания, соответствующие δm.

Сумма всех вычитательных членов δM с учетом сохранения тока и тождества Уорда имеет следующий вид.

1. Поляризационные диаграммы $\Pi_{\mu\nu}(k)$:

$$\delta\Pi_{\mu\nu}(k) = {}^1/_2 i(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)\alpha_1(\varphi) + {}^1/_2 i\beta_1(\varphi)Q_{\mu\nu}(k), \tag{48}$$
$$Q_{0\nu} = 0, \qquad Q_{ij}(k) = k_i k_j - \delta_{ij}k^2.$$

2. Массовый оператор электрона $\Sigma(p)$:

$$\delta\Sigma(p) = i\alpha_2(\varphi)(p_\mu\gamma_\mu - m) + i\beta_2(\varphi)p_i\gamma_i + i(\delta m(\varphi) + \delta m). \tag{49}$$

3. Вершинная функция $\Lambda_\mu(p, k)$:

$$\delta\Lambda_\mu(p, k) = \alpha_2(\varphi)\gamma_\mu + \beta_2\gamma_i g_{\mu i}. \tag{50}$$

В пределе $\varphi(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$ выражения (48)—(50) остаются нековариантными [3]. Рассмотрим окончательно следующий лагранжиан:

$$L^r(x) = -{}^1/_4 Z_3(f)Z_3(\varphi)F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + {}^1/_4(e_r^2\beta + \beta_1(\varphi))F_{ik}F_{ik} + \\ + \partial_\mu A_\mu B + L^\psi(x), \tag{51}$$

---

[2] После промежуточной перенормировки все диаграммы теории возмущений являются конечными.

[3] Можно доказать, на чем мы не будем останавливаться, что расходящиеся части (48)—(50) имеют лоренц-ковариантную форму, т. е. $\beta_i(\varphi)$ имеют конечный предел при $\varphi \to \delta$.

$$\int d\mathbf{x} L^{\psi}(x) = {}^1/_2 Z_1(\varphi) \int d\mathbf{x} [\bar{\psi}(x), (i\gamma_0\partial_0 + e_r A_0^{\varphi}(x))\psi(x)] - {}^1/_4 Z_1(\varphi) \times$$
$$\times \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} [\bar{\psi}(x), \{e_r A_i^{\varphi}(x)\gamma_i + e_r A_i^{\varphi}(y)\gamma_i + i\gamma_i\overleftrightarrow{\partial}_i +$$
$$+ 2m\}\psi(y)] f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Gamma'(x,y) - {}^1/_4 Z_1(\varphi)\beta_2(\varphi) \times$$
$$\times \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} [\bar{\psi}(x), (e_r A_i^{\varphi}(x)\gamma_i + e_r A_i^{\varphi}(y)\gamma_i)\psi(y)] f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Gamma'(x,y) +$$
$$+ Z_1(\varphi)(\delta m(\varphi) + \delta m) \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} \bar{\psi}(x)\psi(y) f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\Gamma'(x,y), \qquad (52)$$

$$\Gamma'(x,y) = \exp\left\{ -ie_r(x-y)_i \int_0^1 d\alpha A_i^{\varphi}[x - \alpha(x-y)] \right\} \qquad (53)$$

Константы перенормировки определены следующим образом:

$$Z_3^{-1}(\varphi) = 1 + \alpha_1(\varphi), \qquad (54)$$

$$Z_1^{-1}(\varphi) = 1 + \alpha_2(\varphi), \qquad (55)$$

$$e_r^2 = Z_3(\varphi) e_1^2 = Z_3(f) Z_3(\varphi) e^2. \qquad (56)$$

Кроме того, во всех константах перенормировки следует с помощью (56) заряд e выразить через e_r (по крайней мере, по теории возмущений).

Лагранжиан (51) обладает следующими свойствами.

1. (51) калибровочно-инвариантен относительно градиентных преобразований:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \qquad \Box\Lambda = 0,$$
$$\psi(x) \to \psi(x) \exp\{ie_r \Lambda^{\varphi}(x)\}.$$

2. В рамках теории возмущений (51) приводит к конечному ответу; автоматически удовлетворяется сохранение электромагнитного тока:

$$J_\mu(x) = \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \int dz [L^r(z) - L_0(z)].$$

3. В пределе $f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$ φ и e_r фиксированы, ряд теории возмущений лагранжиана (51) является конечным и совпадает по форме с рядом теории возмущений релятивистской квантовой электродинамики после промежуточной перенормировки и перенормировки δm с заменой

$$D_{\mu\nu}(p) \to \varphi^2(p) D_{\mu\nu}(p), \qquad e \to e_r;$$

поляризационные диаграммы поперечны.

4. В релятивистском пределе, т. е. после последовательного предельного перехода $f(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x}) \to \delta(\mathbf{x})$, e_r фиксировано, ряд теории возмущений по e_r для функций Грина отличается от перенормированного ряда теории возмущений по e_r релятивистской теории только тем, что перенормировка волновой функции электрона выполнена не в точке $p^2 = m^2$, а в точке $p = 0$.

Поскольку полученный ряд теории возмущений является конечным, мы не будем проводить дополнительную перенормировку волновой функции электрона в точке $p^2 = m^2$ (что привело бы, как известно, к инфракрасным расходимостям) по следующим причинам:

1) константа перенормировки волновой функции электрона не входит в выражения для матричных элементов физических процессов;

2) как известно, на массовой оболочке функция Грина электрона имеет не полюс, а степенную особенность. Это означает, что в теории отсутствуют обычные одночастичные асимптотические состояния, с помощью которых осуществляется нормировка функций Грина.

Заключение

Проведенное исследование показывает, что в классе асимптотически убывающих формфакторов удается построить унитарную и удовлетворяющую всем необходимым групповым свойствам теорию, конечную на всех этапах вычислений по теории возмущений. В локальном пределе эта теория в рамках теории возмущений переходит в перенормированный ряд теории возмущений обычной квантовой электродинамики. Правила канонического квантования дают возможность, проведя соответствующие выкладки в нелокальном варианте теории и совершая в конце предельный переход, простым образом находить все интересующие нас коммутационные соотношения для локальной теории.

В этом смысле построенная модель весьма удобна для исследования коммутационных соотношений токов и более сложных комбинаций операторов поля, а также для исследования принципиальных вопросов существования предельной (локальной) теории. Вместе с тем физическая интерпретация этой модели встречает серьезные трудности, поскольку энергетический спектр электронов до предельного перехода физически неразумный. С физической точки зрения более приемлемыми являются нелокальные модели с индефинитной метрикой [4], а также модель, рассмотренная одним из нас [5]. Суть последней модели сводится к введению обрезания по виртуальным переданным 4-импульсам в методе собственного времени. Это проще всего проиллюстрировать на примере функции Грина фотона. В представлении собственного времени в евклидовой формулировке эта функция имеет вид $D(k)=1/k^2=\int\limits_0^\infty e^{-\nu k^2}\,d\nu$. Введя обрезание по малым ν (т. е. вместо нулевого нижнего предела вводим малый параметр ν_0), получим $\tilde{D}(k)=\int\limits_{\nu_0}^\infty e^{-\nu k^2}\,d\nu=(1/k^2)\,e^{-\nu_0 k^2}$. Аналогичная процедура применяется к функции Грина электрона G и поляризационному члену $\Pi=\operatorname{Sp}\ln G$ в континуальном решении для S-матрицы. Мы здесь не станем подробно исследовать эту модель, а ограничимся приведением окончательного выражения для производящего функционала (причем для простоты записи приведем соответствующее выражение для скалярной электродинамики). В евклидовой формулировке в этой модели, которая в пределе $\nu_0=0$ переходит в обычную теорию (см. также [5]), производящий функционал имеет вид

$$cZ=\exp\left\{\eta^* G\left(\cdot\,;\frac{\delta}{\delta J}\right)\eta\right\}\exp\left\{\int dx\,\Pi\left(x;\frac{\delta}{\delta J}\right)dx\right\}\exp\left\{{}^1\!/_2 J_\mu \tilde{D} J_\mu\right\},$$

$$G(x,y;\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dp\,e^{ip(x-y)}\int\limits_{\nu_0}^\infty d\nu\,e^{-i\nu(p^2+m^2)}\times$$

$$\times\left\langle\exp\left\{2e\int\limits_0^\nu d\nu'\,\mathscr{P}_\mu(\nu')\,\varphi_\mu[x(\nu')]\right\}\right\rangle,$$

$$\Pi(x;\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dp\int\limits_{\nu_0}^\infty\frac{d\nu}{\nu}\exp\{-\nu(p^2+m^2)\}\times$$

$$\times\left(\left\langle\exp\left\{2e\int\limits_0 d\nu'\mathscr{P}_\mu(\nu')\,\varphi_\mu[x(\nu')]\right\}\right\rangle-1\right),$$

где

$$\mathscr{P}_\mu(\nu')=p_\mu+{}^1/_2 i\frac{\delta}{\delta t_\mu(\nu')}, \qquad x_\mu(\nu')=x_\mu-2\int\limits_{\nu'}^{\nu}\mathscr{P}_\mu(\xi)\,d\xi.$$

Знак усреднения $\langle\ \rangle$ определяется следующим соотношением:

$$\left\langle A\left(\frac{\delta}{\delta t}\right)\right\rangle\equiv A\left(\frac{\delta}{\delta t}\right)\exp\left\{\int\limits_0^{T} d\xi t_\mu^2(\xi)\right\}\Bigg|_{t=0}.$$

Псевдоевклидовый вариант теории получается отсюда аналитическим продолжением; при этом построенная модель конечна, релятивистски- и калибровочно-инвариантна, в ней выполнены законы сохранения тока и частицы имеют физически разумный энергетический спектр. Обычная теория получается в пределе $\nu_0=0$. Есть основания надеяться, что в приведенной теории S-матрица унитарна. В пользу этого утверждения говорит тот факт, что обрезание по ν (введение ν_0) не вносит добавочных особенностей в функции Грина при конечных импульсах. Тем самым эта модель является [5] одной из первых реализаций теорий с целым формфактором.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что для любого классического калибровочно-инвариантного лагранжиана, в котором электромагнитное взаимодействие вводится с помощью замены $\partial_\mu\to\partial_\mu-ieA_\mu$, электромагнитный ток J_μ, определенный равенством

$$J_\mu(x)=\frac{\delta}{\delta eA_\mu(x)}\int dz L(z), \tag{П.1}$$

сохраняется и совпадает с током Нётер T_μ.

В общем случае лагранжиан является произвольной функцией величин

$$D^n_{\mu\nu\lambda\ldots}\varphi(x), \tag{П.2}$$

где

$$D_{\mu\nu\lambda\ldots}=D_\mu D_\nu D_\lambda\ldots \text{ (всего } n \text{ множителей)}, \tag{П.3}$$

$$D_\mu=i\partial_\mu+eA_\mu(x),\quad \bar D_\mu=-i\partial_\mu+eA_\mu(x). \tag{П.4}$$

Поле φ имеет произвольную тензорную размерность. Выделим явно в лагранжиане только один аргумент и рассмотрим его вклад в уравнение движения, ток J_μ и ток Нётер. Итак

$$L=L(\cdot\,;D^n_{\mu\nu\lambda\ldots}\varphi(x)). \tag{П.5}$$

Введем также обозначение:

$$B_{\mu\nu\lambda\ldots}(x)=\frac{\partial}{\partial\,[D^n_{\mu\nu\lambda\ldots}\varphi(x)]}L(\cdot\,;D^n_{\mu\nu\lambda\ldots}\varphi(x)). \tag{П.6}$$

Выпишем вклады в уравнение движения, ток J_μ и ток Нётер.

1. Вклад в уравнение движения

$$\bar D_{\mu\nu\lambda\ldots}B_{\mu\nu\lambda\ldots}(x). \tag{П.7}$$

2. Вклад в электромагнитный ток J_μ:

$$\sum_{k=0}^{n-1}D^{n-k-1}_{\nu\lambda\ldots}\bar D^k_{\sigma\delta\ldots}B_{\mu\nu\lambda\ldots\sigma\delta\ldots}(x). \tag{П.8}$$

3. Чтобы выписать вклад в ток Нётер T_μ, рассмотрим калибровочное преобразование с фазой Λ, не зависящей от координат:

$$A_\mu\to A_\mu,\qquad \partial_\mu\partial_\nu\ldots\varphi(x)\to\partial_\mu\partial_\nu\ldots\varphi(x)(1+ie\delta\Lambda). \tag{П.9}$$

Имеем

$$i\partial_\mu T_\mu(x)=[(D^n_{\mu\nu\ldots}\varphi(x))-\varphi(x)\overset{n}{\overline{D}}_{\mu\nu\ldots}]B_{\mu\nu\ldots}(x). \qquad (\text{П}.10)$$

Здесь мы учли, что

$$\sum_{k=0}^{n}\partial_{\lambda_1}\ldots\partial_{\lambda_k}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial[\partial_{\lambda_1}\ldots\partial_{\lambda_k}\varphi(x)]}D_{\mu\nu\ldots}\varphi(x)\equiv D^n_{\mu\nu\ldots}\varphi(x). \qquad (\text{П}.11)$$

Первый член в (П.10) перепишем следующим образом:

$$B_{\mu\nu\ldots}(x)D^n_{\mu\nu\ldots}\varphi(x)=i\partial_\mu[B_{\mu\nu\lambda\ldots}(x)D^{n-1}_{\nu\lambda\ldots}\varphi(x)]+\overline{D}_\mu B_{\mu\nu\lambda\ldots}(x)D^{n-1}_{\nu\lambda\ldots}\varphi(x)=$$

$$=i\partial_\mu\sum_{k=0}^{n-1}D^{n-k-1}_{\nu\lambda\ldots}\varphi(x)\overline{D}_{\sigma\delta\ldots}B_{\mu\nu\lambda\ldots\sigma\delta\ldots}(x)+\varphi(x)\overline{D}_{\mu\nu\ldots}B_{\mu\nu\ldots}(x). \qquad (\text{П}.12)$$

Подставляя (П.12) в (П.11) и сравнивая полученный результат с (П.8), находим окончательно

$$\partial_\mu T_\mu(x)=\partial_\mu J_\mu(x). \qquad (\text{П}.13)$$

Литература

[1] D. Boulware. Phys. Rev., **151**, 1024, 1966.
[2] Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, **98**, 47, 1954; **100**, 897, 1955.
[3] Е. С. Фрадкин. Труды IV зимней школы в Карпачах (Польша), 1967.
[4] Д. А. Киржниц. УФН, **90**, 129, 1966.
[5] E. S. Fradkin. Acta Phys. Hung., **19**, 175, 1965; Nucl. Phys., **76**, 588, 1966.

FORMULATION OF QUANTUM ELECTRODYNAMICS WITHOUT DIVERGENCES

I. V. TYUTIN, E. S. FRADKIN

The method is proposed to redefine Lagrangian and current operators satisfying group properties of initial classical theory. Applying to electrodynamics, this method results in finite (nonlocal) unitary gauge-invariant canonic theory. Noncanonic model of finite electrodynamics is also discussed.