АКАДЕМИЯ НАУК СССР

1965 ТРУДЫ ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА Том XXIX

Е. С. ФРАДКИН

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЕОРИИ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ И В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ [1]

ВВЕДЕНИЕ

Новейшее развитие теории квантованных полей в значительной степени связано с именами Томонага, Швингера, Фейнмана и Дайсона. Их исследования привели к созданию релятивистско-инвариантной теории возмущений, а идея перенормировки массы и заряда дала возможность устранять расходимости в каждом члене теории возмущений. Построенная таким путем квантовая электродинамика оказалась в блестящем согласии с экспериментом. Однако переход к взаимодействию частиц при больших энергиях, проблема сильной связи и вопрос о математической замкнутости существующей теории потребовали выхода за рамки теории возмущений. Существенным шагом в этом направлении явилась замкнутая система уравнений для функций Грина, полученная Швингером с помощью развитого им вариационного метода [1].

Более удобным как для развития функциональных методов решения системы взаимодействующих частиц, так и для обобщения аппарата на случай квантовой статистики оказалась система функциональных уравнений для S-матрицы, учитывающей взаимодействие с внешними источниками бозе- и ферми-полей. Для вывода этих уравнений достаточно использовать обычное уравнение для S-матрицы, не прибегая к вариационному принципу Швингера [2].

Настоящая работа посвящена выводу системы функциональных уравнений для функций Грина как в теории квантованных полей, так и в квантовой статистике, перенормировке и устранению расходимостей в уравнениях для функций Грина, развитию операторного, континуального и других методов решения полученных уравнений, а также выводу ряда общих соотношений, связанных с градиентной инвариантностью электромагнитного взаимодействия, изучению спектра системы взаимодействующих частиц. В основу настоящей работы положены исследования автора по квантовой теории поля, опубликованные в 1954—1956 гг., и исследо-

[1] Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Защищена 14 июня 1960 г. в Институте экспериментальной и теоретической физики АН СССР.

вания по применению метода функций Грина в квантовой статистике и кинетике, выполненные в 1958—1959 гг., а также ряд неопубликованных результатов автора. Работа не претендует на сколько-нибудь полное изложение метода функций Грина (см., например, [3, 3a]). Здесь рассматриваются лишь отдельные вопросы и постольку, поскольку они имеют непосредственное отношение к исследованиям автора.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. Функциональное уравнение для S-матрицы [2]

Как известно, все задачи теории квантованных полей могут быть сведены к нахождению функций Грина взаимодействующих бозе- и ферми-частиц. При этом эти функции Грина дают возможность решить не только задачи столкновения частиц, но и задачи по определению энергетических уровней системы путем нахождения полюсов соответствующих функций Грина или их аналитического продолжения.

Задача, таким образом, сводится к нахождению так называемых функций распространения $\tau(x_1, \ldots, x_n) = T\langle(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))\rangle$, где $\varphi(x)$ — гейзенберговские операторы поля; T — упорядочение во времени; $\langle\ \rangle$ — символ среднего по вакууму.

Используя уравнения для операторов в гейзенберговском представлении, можно получить бесконечную систему зацепляющихся уравнений для функций распространения, причем удается эту бесконечную систему уравнений свести к замкнутой системе одного или двух функциональных уравнений. Для этого, следуя Швингеру [1], обобщим обычный лагранжиан системы, введя добавочный лагранжиан взаимодействия с внешними источниками бозонного и фермионного полей. Плотность лагранжиана системы тогда примет вид

$$L = L^0 + L^{\text{вз}} + L^{\text{вн}}, \quad L^{\text{вз}} = j(x)\,\varphi(x); \tag{1.1}$$

$$L^{\text{вн}} = I(x)\,\varphi(x) + \bar{\eta}(x)\,\psi(x) + \bar{\psi}(x)\,\eta(x), \tag{1.2}$$

где

$$j(x) = \frac{i}{2} g_0 \operatorname{Sp} \gamma\,[\bar{\psi}(x)\,\psi(x) - \psi(x)\,\bar{\psi}(x)]; \tag{1.3}$$

$\eta(x)$ — источник фермионного поля, который антикоммутирует с $\bar{\eta}$, ψ, $\bar{\psi}$ и коммутирует с бозонными операторами; L^0 — лагранжиан свободных полей; g_0 — заряд системы; $I(x)$ — источник бозонного поля; $\bar{\psi} = \psi^*\gamma_4$; $\bar{\eta} = \eta^*\gamma_4$; $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$. Мы не уточняем вид взаимодействия (γ) и вариантность поля φ (например, для электродинамики $\gamma = \gamma_\mu$, $\varphi = A_\mu$).

В гейзенберговском представлении, где вектор состояния системы Φ постоянен во времени, имеем следующую систему уравнений для операторов ψ и φ:

$$\begin{gathered}(\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - ig_0\gamma\varphi)\,\psi = \eta;\\ \bar{\psi}\,(-\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - ig_0\gamma\varphi) = \bar{\eta};\\ -\Box\varphi + \varkappa_0^2\varphi = I + j,\end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$\Box = \partial_\mu^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2, \quad x_4 = it. \tag{1.5}$$

При этом для операторов выполнены следующие правила коммутации:

$$\left[\varphi(x), \frac{\partial\varphi(x')}{\partial t'}\right]_{t=t'} = i\delta(x - x'), \tag{1.6}$$

$$\{\psi(x), \psi^*(x')\}_{t=t'} = \delta(x - x'),$$

$$[a, b] = ab - ba; \qquad \{a, b\} = ab + ba; \tag{1.7}$$

остальные коммутаторы и антикоммутаторы равны нулю (поля разных статистик коммутируют между собой).

Перейдем к новому представлению, где операторы поля не зависят от внешних источников (аналог представления взаимодействия применительно к внешнему взаимодействию), в котором уравнения имеют вид

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - ig_0\gamma\varphi_1)\psi_1 = 0;$$

$$-\Box\varphi_1 + \varkappa_0^2\varphi_1 = j_1. \tag{1.8}$$

В новом представлении волновые функции Φ_1 меняются со временем и связаны с Φ с помощью S-матрицы, зависящей от взаимодействия с внешними источниками:

$$\Phi_1 = S(t)\Phi, \tag{1.9}$$

где S определяется из уравнения

$$i\frac{\partial S}{\partial t} = H_1^{\text{вн}} S = -L_1^{\text{вн}} S \tag{1.10}$$

с начальным условием $S(-\infty, -\infty) = 1$, что означает адиабатическое выключение взаимодействия с внешними источниками при $t = -\infty$.

Из (1.10) следует, что

$$S(t, -\infty) = T\left(\exp\, i\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3x L_1^{\text{вн}}(x, t')\right) =$$

$$= \sum \frac{(i)^{f'+f''+f}}{f'!\,f''!\,f!}\int d^4x_1 \ldots d^4x_f\, d^4y_1 \ldots d^4y_{f'}\, d^4z_1 \ldots d^4z_{f''} \times$$

$$\times \bar\eta(x_1)\ldots\bar\eta(x_f)\,\tau(x_f, \ldots, x_1, y_1, \ldots, y_{f'}, z_1, \ldots, z_{f''}) \times$$

$$\times \eta(z_{f''})\ldots\eta(z_1)\, I(y_1)\ldots I(y_{f'}), \tag{1.11}$$

где

$$\tau(x_f \ldots x_1, y_1 \ldots y_{f_1}, z_1 \ldots z_{f''}) = T(\psi_1(x_f)\ldots\psi_1(x_1)\,\varphi_1(y_1)\ldots$$

$$\ldots\varphi_1(y_{f_1})\,\bar\psi_1(z_1)\ldots\bar\psi_1(z_{f''})).$$

Из (1.11) или непосредственно из (1.10) получим [2,4]

$$\frac{\delta S(\infty, -\infty)}{\delta I(x)} = iS(\infty, -\infty)\, S^{-1}(t, -\infty)\,\varphi_1(x)\, S(t, -\infty) =$$

$$= iS(\infty, -\infty)\,\varphi(x);$$

$$\frac{\delta S(\infty)}{\delta\eta(x)} = iS(\infty)\,\bar\psi(x); \qquad \frac{\delta S(\infty)}{\delta\bar\eta(x)} = iS(\infty)\,\psi(x);$$

$$\frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta\bar\eta(x)\,\delta\eta(x')} = (i)^2 S(\infty)\, T(\psi(x), \bar\psi(x')); \tag{1.12}$$

$$\frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta I(x)\,\delta I(x')} = -S(\infty)\,T(\varphi(x')\,\varphi(x));$$

$$\frac{\delta^4 S(\infty)}{\delta\bar\eta(x_1)\,\delta\bar\eta(x)\,\delta\eta(x_1')\,\delta\eta(x')} = (i)^4 S(\infty)\,T(\psi(x)\,\psi(x_1)\,\bar\psi(x')\,\bar\psi(x_1'));$$

$$S(\infty) = S(\infty, -\infty),$$

где вариации по η и $\bar\eta$ берутся справа и слева соответственно, т. е. все η необходимо расположить справа, а все $\bar\eta$ слева от остальных операторов:

$$\delta L = \int (\bar\psi\delta\eta + \delta\bar\eta\psi)\, d^4x.$$

Используя уравнения для операторов в гейзенберговском представлении и соотношения (1.12), получим следующие функциональные уравнения для $S(\infty)$:

$$\left(\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - g_0\gamma\frac{\delta}{\delta I}\right)\frac{\delta S}{\delta\bar\eta} = i\eta S;$$

$$(-\Box + \varkappa_0^2)\frac{\delta S}{\delta I} = iIS - \mathrm{Sp}\, g_0\gamma\frac{\delta^2 S}{\delta\bar\eta(x)\,\delta\eta(x)}; \tag{1.13}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\eta}\left(-\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - g_0\gamma\frac{\delta}{\delta I}\right) = i\bar\eta S.$$

Поскольку нас в дальнейшем будет интересовать среднее значение по вакууму (системы без взаимодействия с внешними источниками) от T упорядоченных произведений операторов, достаточно решать не операторные уравнения, а систему функциональных уравнений для матричного элемента перехода вакуум — вакуум $Z = \langle | S(\infty) | \rangle$, который является производящим функционалом (Z) всех функций Грина. Согласно (1.13), для Z имеем [5,2, 6,7]:

$$\left(\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - g_0\gamma\frac{\delta}{\delta I}\right)\frac{\delta Z}{\delta\bar\eta} = i\eta Z;$$

$$(-\Box + \varkappa_0^2)\frac{\delta Z}{\delta I} = iIZ - g_0\,\mathrm{Sp}\,\gamma\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar\eta(x)\,\delta\eta(x)}; \tag{1.14}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta\eta}\left(-\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - g_0\gamma\frac{\delta}{\delta I}\right) = i\bar\eta Z.$$

Граничными условиями к этим уравнениям следующие:

1) $\dfrac{\delta Z}{\delta\eta} = \dfrac{\delta Z}{\delta\bar\eta} = \dfrac{\delta Z}{\delta I} = 0$ при $I = \eta = \bar\eta = 0,$

2) функциональные производные от Z при $\eta = \bar\eta = I = 0$ должны удовлетворять спектральные представления для обычных гейзенберговских операторов (см. также § 7).

Из (1.14) получаем обобщенный закон сохранения тока в присутствии источников поля

$$\left\{\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu\partial_\mu\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar\eta(x)\,\delta\eta(x)}\right\} = i\eta\frac{\delta Z}{\delta\eta} - i\bar\eta\frac{\delta Z}{\delta\bar\eta}. \tag{1.15}$$

В частности, для векторной связи $\gamma \to \gamma_\mu$ из (1.14) и (1.15) получим

$$(-\Box + \varkappa_0^2)\,\partial_\mu\frac{\delta Z}{\delta I_\mu(x)} = i\partial_\mu I_\mu Z + ie_0\left(\bar\eta(x)\frac{\delta Z}{\delta\bar\eta(x)} - \frac{\delta Z}{\delta\eta(x)}\eta(x)\right)Z. \tag{1.16}$$

Легко убедиться, что существует следующая простая связь между производящим функционалом Z и обычной S-матрицы при $\eta = I = 0$, выраженной через операторы φ_{in} и ψ_{in} в нормальной форме [φ_{in} и ψ_{in} — операторы свободного поля с экспериментальными значениями для масс (m_e, μ_e)], а именно:

$$S_{\eta=I=0} \doteq :\exp\Omega: Z|_{I=\eta=0}; \tag{1.17}$$

$$\Omega = \int \Big[\varphi_{in}(x)(\mu_e^2 - \Box)\frac{\delta}{\delta I(x)} + \bar{\psi}_{in}(x)(\gamma_\mu\partial_\mu + m_e)\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} + \\ + \frac{\delta}{\delta\eta(x)}(-\gamma_\mu\partial_\mu + m_e)\psi_{in}(x)\Big] d^4x. \tag{1.18}$$

Символ : : означает, что операторы поля взяты в нормальной форме. Производные по x в (1.18) действуют на производные источников поля.

§ 2. Система уравнений для функций Грина при наличии внешнего источника бозонного поля [4]

С помощью функциональных уравнений для Z можно получить систему уравнений для функций распространений.

Введем следующие определения:

$$\langle\varphi(x)\rangle = \frac{(\Phi_0^*, S(\infty)\varphi(x)\Phi_0)}{(\Phi_0^* S(\infty)\Phi_0)} = -i\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta I}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}; \tag{2.1}$$

$$G(x, x') = -i\frac{1}{Z}\frac{\delta}{\delta\eta(x')}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = iT\langle(\psi(x), \bar{\psi}(x'))\rangle|_{\eta=\bar{\eta}=0};$$

$$D(x, x') = -i\frac{\delta}{\delta I(x')}\frac{\delta\ln Z}{\delta I(x)}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = [iT\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle - i\langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(x')\rangle]_{\eta=\bar{\eta}=0},$$

где G и D — функции Грина электронного и фотонного полей соответственно. Из уравнения (1.14) получим систему уравнений Швингера при наличии внешних источников поля [1]:

$$\begin{gathered}\Big[\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - ig_0\gamma\langle\varphi(x)\rangle - g_0\gamma\frac{\delta}{\delta I}\Big]G(x, x') = \delta(x - x');\\ (-\Box + \varkappa_0^2)\langle\varphi(x)\rangle = I(x) - g_0\,\mathrm{Sp}\,\gamma G(x, x);\\ (-\Box + \varkappa_0^2)D(x, x') = \delta(x - x') - g_0\,\mathrm{Sp}\,\gamma\frac{\delta G(x, x)}{\delta I(x')}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

В дальнейшем целесообразно перейти к интегральной форме уравнений (2.2), для чего вводим следующие определения:

$$-g_0\gamma\frac{\delta}{\delta I(x)}G(x, x') = \int\Sigma(x, y)G(y, x')d^4y; \tag{2.3}$$

$$-g_0\,\mathrm{Sp}\,\gamma\frac{\delta G(x, x)}{\delta I(x')} = \int\Pi(x, y)D(y, x')d^4y. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем следующие выражения для массового (Σ) и поляризационного (Π) операторов:

$$\Pi(x; y) = -ig_0^2\,\mathrm{Sp}\int\gamma G(x, x')\Gamma(x', x'', y)G(x'', x)d^4x'\,d^4x'',$$

$$\Sigma(x, y) = -ig_0^2\int\gamma G(x, x')\Gamma(x', y, z)D(z, x)d^4x'\,d^4z,$$

$$\Gamma(x, y, z) = -\frac{\delta G^{-1}(x, y)}{\delta ig_0\langle\varphi(z)\rangle} = \gamma\delta(x - y)\delta(x - z) - \frac{\delta\Sigma(x, y)}{\delta ig_0\langle\varphi(z)\rangle}. \tag{2.5}$$

При этом уравнения (2.2) принимают вид:

$$\int [(\gamma_\mu \partial_\mu + m_0 - ig_0\gamma \langle \varphi(x)\rangle)\delta(x-y) + \Sigma(x,y)]\, G(y,x')\, d^4y = \delta(x-x'); \quad (2.6)$$

$$\int [(-\Box + \varkappa_0^2)\,\delta(x-y) - \Pi(x,y)]\, D(y,x')\, d^4y = \delta(x-x'); \quad (2.7)$$

$$(-\Box + \varkappa_0^2)\langle \varphi(x)\rangle = I(x) - g_0\, \mathrm{Sp}\,\gamma G(x,x). \quad (2.8)$$

Дальнейшее рассмотрение более удобно провести в импульсном представлении, где система уравнений принимает вид

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m_0)\, G(p,p') - ig_0 \int \gamma \langle \varphi(p-k)\rangle\, G(k,p')\, d^4k + \\ + \int \Sigma(p,k)\, G(k,p')\, d^4k = \delta(p-p'); \quad (2.9)$$

$$(\varkappa_0^2 + k^2)\langle \varphi(k)\rangle = I(k) - g_0\, \mathrm{Sp}\,\gamma \int G(p+k,p)\, \frac{d^4p}{(2\pi)^4}; \quad (2.10)$$

$$(k^2 + \varkappa_0^2)\, D(k,k') - \int \Pi(k,p)\, D(p,k')\, d^4p = \delta(k-k'); \quad (2.11)$$

где

$$\Sigma(p,s) = -\frac{ig_0^2}{(2\pi)^4}\int \gamma G(p+k,k_1)\,\Gamma(k_1,s,k_2)\, D(k_2,k)\, d^4k\, d^4k_1\, d^4k_2; \quad (2.12)$$

$$\Pi(p,s) = -\frac{ig_0^2}{(2\pi)^4}\, \mathrm{Sp}\int \gamma G(p+k,k_1)\,\Gamma(k_1,k_2,s)\, G(k_2,k)\, d^4k_1\, d^4k\, d^4k_2; \quad (2.13)$$

$$\Gamma(p,k,k_1) = \gamma\delta(p-k-k_1) - \frac{\delta\Sigma(p,k)}{\delta ig_0 \langle \varphi(k_1)\rangle}. \quad (2.14)$$

2.1. Система уравнений для функций Грина при отсутствии внешних источников

При отсутствии внешних источников все функции зависят в x-пространстве лишь от разности координат и в импульсном пространстве система приобретает следующий вид [8, 4]:

$$[i\gamma_\mu p_\mu + m_0 + \Sigma(p)]\, G(p) = 1; \quad (2.15)$$

$$[k^2 + \varkappa_0^2 - \Pi(k)]\, D(k) = 1; \quad (2.16)$$

$$\Sigma(p) = -\frac{ig_0^2}{(2\pi)^4}\int \gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k,k)\, D(k)\, d^4k; \quad (2.17)$$

$$\Pi(k) = -\frac{ig_0^2}{(2\pi)^4}\, \mathrm{Sp}\int \gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k,k)\, G(p)\, d^4p; \quad (2.18)$$

$$\Gamma(p,p-s,s) = \gamma + \frac{g_0^2 i}{(2\pi)^4}\int \gamma G(p+k)\,[\Gamma(p+k,s)\, \times \\ \times G(p+k-s)\,\Gamma(p+k-s,k) + \Gamma^1(p+k,p-s,k,s)]\, D(k)\, d^4k, \quad (2.19)$$

где

$$\Gamma^1(p,p',k,s)\,\delta(p-p'-k-s) = \left.\frac{\delta\Gamma(p,p',k)}{\delta ig_0\langle \varphi(s)\rangle}\right|_{\langle\varphi\rangle=0}.$$

При этом все функции Грина являются комплексными функциями, связь между действительными и мнимыми частями которых передается спектральными представлениями для этих величин.

2.2. Система уравнений для функций Грина при внешнем источнике бозе-поля, постоянном во времени

В заключение этого параграфа остановимся несколько подробнее на частном случае наличия постоянного во времени внешнего источника I, порождающего постоянное во времени внешнего поля $\langle\varphi\rangle$, например, кулоновское поле ядра в случае атома водорода.

Поскольку $I(x) = I(\mathbf{x})$, то и $\langle\varphi\rangle$, а также $\mathrm{Sp}\,\gamma G(x, x)$ не зависят от x_4 и система уравнений (2.9) — (2.11) принимает вид

$$\int[(\gamma_\mu\partial_\mu + m_0 - ig_0\gamma\langle\varphi(x)\rangle)\delta(x+y) + \Sigma(x, y)]\,G(y, x')\,d^4y = \delta(x - x');$$

$$(-\Delta + \varkappa_0^2)\langle\varphi(x)\rangle = I(x) - g_0\,\mathrm{Sp}\,\gamma G(x, x); \tag{2.20}$$

$$\int[(-\Box + \varkappa_0^2)\,\delta(x - y) - \Pi(x, y)]\,D(y, x')\,d^4y = \delta(x - x').$$

Удобнее эту систему уравнений записать в несколько ином виде [9]:

$$\int\Big[(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\,\delta(x-y) - ig_0\int\Gamma_0(x, y, z)\langle\varphi(z)\rangle d^4z + \Sigma_0(x, y)\Big]G(y, x')\,d^4y =$$
$$= \delta(x - x') + \int\Big\{\Sigma(x, y) - \Sigma_0(x, y) - \int\Sigma_0'(x, y, z)\langle\varphi(z)\rangle d^3z\Big\}G(y, x')\,d^4y; \tag{2.21}$$

$$\int[(-\Box + \varkappa_0^2)\,\delta(x - y) - \Pi_0(x, y)]\,D(y, x')\,d^4y = \delta(x - x') +$$
$$+\int[\Pi(x, y) - \Pi_0(x, y)]\,D(y, x')\,d^4y;$$

$$\int[(-\Delta^2 + \varkappa_0^2)\,\delta(x - y) - \Pi_0(x - y)]\langle\varphi(y)\rangle d^4y =$$
$$= I(x) - g_0\,\mathrm{Sp}\,[G(x, x) - \int G_0'(x, x, z)\langle\varphi(z)\rangle d^3z]\,\gamma,$$

где $\Sigma_0'(x, y, z) = \left[\frac{\delta\Sigma(x,y)}{\delta\langle\varphi(z)\rangle}\right]$; $\Sigma_0, \Gamma_0, \Pi_0$ — соответственно Γ, Σ, Π при $\langle\varphi\rangle = I = 0$*. При этом, как уже отмечалось выше, из-за трансляционной инвариантности теории все эти величины зависят от разности координат. Разлагая Σ, Π, G при наличии $\langle\varphi\rangle$ в функциональный ряд Тейлора, мы можем убедиться в том, что все правые части в (2.21) пропорциональны $\langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(x_1)\rangle$, поскольку в практически интересных случаях взаимодействия $\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi}\right]_{\langle\varphi\rangle=0} = 0$ (вследствие теоремы Фарри в электродинамике' см. § 3, или из-за псевдоскалярности в мезодинамике), если к тому же эффектами, квадратичными по внешнему полю, можно пренебречь, то система уравнений для функций Грина существенно упрощается и принимает вид

$$\int[(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\,\delta(x - y) - ig\int\Gamma(x - y, x - z)\langle\varphi(z)\rangle d^4z +$$
$$+\Sigma(x - y)]\,G(y, x')\,d^4y = \delta(x - x');$$

$$D(x - x') = \int\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 + \varkappa^2 - \Pi(k)}\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4}; \tag{2.22}$$

$$\langle\varphi(x)\rangle = \int D(x - x')\,I(x')\,d^4x' = \int\frac{\delta(k_0)\,I(k)\,e^{ikx}}{k^2 + \varkappa^2 - \Pi(k)}\,\frac{d^4k}{(2\pi)^3},$$

* При этом используется связь между вариацией по постоянной во времени и переменной во времени

$$[\delta F/\delta\varphi(x)]_{\varphi=0} = \int dt\,[\delta F/\delta\varphi(x, t)]_{\varphi=0}.$$

где $\Pi(k)$, Γ и Σ определяются теми же формулами, как в случае $I = 0$.

Мы видим, что радиационные добавки приводят к тому, что внешний потенциал изменяется. В самом деле, без радиационных добавок внешнее поле φ равно

$$\langle \varphi_0^{\text{вн}} \rangle = \int \frac{\delta(k_0)\, I(k)\, e^{ikx}}{(2\pi)^3 (k^2 + \varkappa^2)}\, d^3k. \tag{2.23}$$

Следовательно, добавок $\delta\varphi$ к внешнему потенциалу, обусловленный радиационными поправками, равен

$$\delta\varphi = \langle \varphi \rangle - \langle \varphi_0^{\text{вн}} \rangle = \int \frac{\delta(k_0)\, I(k)\, e^{ikx}\, \Pi(k)}{(2\pi)^3 (k^2 + \varkappa^2)(k^2 + \varkappa^2 - \Pi(k))}\, d^4k. \tag{2.24}$$

Особо простой вид имеет в указанном приближении уравнение для всех величин в p-пространстве, а именно:

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m + \Sigma(p))\, G(p, p') - \frac{ig}{(2\pi)^4} \int \Gamma(p, p-k, k) \times \\ \times \delta(k_0) \langle \varphi(k) \rangle\, d^4k G(p-k, p') = \delta(p - p'); \tag{2.25}$$

$$\Sigma(p) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int \gamma\, \frac{1}{i\gamma_\mu (p_\mu + k) + m + \Sigma(p+k)} \times \\ \times \Gamma(p+k, p, k)\, D(k)\, d^4k; \tag{2.26}$$

$$\Pi(k) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4} \operatorname{Sp} \int \gamma\, \frac{1}{i\gamma_\mu (p_\mu + k_\mu) + m + \Sigma(p+k)} \times \\ \times \Gamma(p+k, k)\, \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu + m + \Sigma(p)}\, d^4p; \tag{2.27}$$

$$D = \frac{1}{k^2 + \varkappa^2 - \Pi(k^2)}, \qquad \langle \varphi(k) \rangle = \frac{I(k)}{k^2 + \varkappa^2 - \Pi(k^2)}\Big]_{k_0 = 0}, \\ \Gamma(p, p-k, k) = \gamma + \Lambda(p, k). \tag{2.28}$$

В частности, в этом же приближении уравнение Дирака с радиационными добавками имеет вид (см. также [2])

$$\{i\gamma_\mu p_\mu + m + \Sigma(p)\}\, \psi(p) - \frac{ig}{(2\pi)^4} \int \Gamma(p, p-k, k) \times \\ \times \delta(k_0) \langle \varphi(k) \rangle\, d^4k \psi(p-k) = 0, \tag{2.29}$$

где $\Sigma(p)$, Γ, $\langle \varphi \rangle$ определены по формулам (2.26) — (2.28).

Подставляя перенормированные значения для Σ, Γ и Π (см. § 4), получим перенормированные уравнения Дирака, с помощью которых можно определить (например, в случае атома водорода) радиационный сдвиг в ширину уровней.

Следует отметить, что эти же вопросы можно изучить, работая непосредственно с функциями Грина, найдя полюса аналитического продолжения соответствующих функций.

§ 3. Квантовая электродинамика. Некоторые общие соотношения [10]

В случае квантовой электродинамики $\gamma = \gamma_\mu$, $\varphi = A_\mu$, как известно, из-за градиентной инвариантности теории наблюдаемые величины не зависят от продольной части петенциала A_μ (в импульсном пространстве эта часть имеет вид $k_\mu f(k)$). Формально этого можно добиться, потребовав, чтобы четырехмерная дивергенция внешнего тока I_μ тоже равна нулю, введя взаимодействие с внешним источником I в виде $A_\mu\left(I_\mu - \frac{k_\mu (kI)}{k^2}\right)$. Вследствие этого в уравнении для A_μ вместо I_μ будет стоять $\left(I_\mu - \frac{k_\mu (kI)}{k^2}\right)$. Система уравнений для функций Грина в этом случае может быть записана в виде

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m_0) G(p, p') - e_0 i\gamma_\mu \int \langle A_\mu (p-k) \rangle G(k, p)\, d^4k + \\ + \int \Sigma(p, k) G(k, p')\, d^4k = \delta(p-p'); \tag{3.1}$$

$$(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \langle A_\nu (k) \rangle = I_\mu(k) - \frac{k_\mu (kI(k))}{k^2} - \\ - e_0 \frac{\mathrm{Sp}}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G(p+k, p)\, d^4p; \tag{3.2}$$

$$(\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) D_{\nu\rho}(k, k') - \int \Pi_{\mu\nu}(k, k_1) D_{\nu\rho}(k_1, k')\, d^4k_1 = \\ = \delta(k-k') \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2}\right), \tag{3.3}$$

где

$$\Sigma(p, p') = -\frac{e_0^2 i}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G(p+k, p_1) \Gamma_\nu(p_1, p', p_2) D_{\mu\nu}(p_2, k)\, d^4p_1 d^4p_2 d^4k; \tag{3.4}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k, k') = -\frac{e_0^2 i}{(2\pi)^4} \mathrm{Sp}\, \gamma_\mu \int G(p+k, p_1) \Gamma_\nu(p_1, p_2, k') G(p_2, p)\, d^4p d^4p_1 d^4p_2;$$

$$\Gamma_\mu(p, p', k) = \gamma_\mu \delta(p - p' - k) + \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_\nu G(p+s, s_1) \Big\{ \Gamma_\mu(s_1, k_2, k) \times \\ \times G(k_2, k_1) \Gamma_\rho(k_1, p', s_2) D_{\nu\rho}(s_2, s)\, d^4k_1 d^4k_2 + \\ + \frac{\delta [\Gamma_\rho(s_1, p', s_2) D_{\nu\rho}(s_2, s)]}{\delta i e_0 \langle A_\mu(k) \rangle} \Big\} d^4s\, d^4s_1\, d^4s_2; \tag{3.5}$$

$$G(p, p') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(x, x') e^{ipx - ip'x'}\, d^4x d^4x'. \tag{3.6}$$

Система уравнений определяет только поперечные части от A_ν и тензора $D_{\nu\rho}$, продольная часть остается полностью неопределенной. Лорентцовская калибровка соответствует выбору продольной части, равной нулю, обычная фейнмановская калибровка соответствует выбору продольной части, равной поперечной:

$$D_{\mu\nu}(k, k')|_{I=0} = \delta(k-k') \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) D^t + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} D^l \right], \tag{3.7}$$

$$D^t = D^l.$$

Ниже мы убедимся, что наблюдаемые величины не зависят от D^l, хотя функции Грина, вообще говоря, зависят от D^l (см. § 10).

1. Используя градиентную инвариантность теории, можно показать, что при наличии внешнего источника фотонного поля имеет место следующая связь G и Γ [10]:

$$G^{-1}(p, p'+k) - G^{-1}(p-k, p') = ik_\mu \Gamma_\mu(p, p', k). \tag{3.8}$$

Соотношение (3.8) эквивалентно бесконечному ряду соотношений при $I = 0$. Последние получают из (3.8) путем последовательного дифференцирования по $\langle A \rangle$ или I [11, 10]:

$$G^{-1}(p) - G^{-1}(p-k) = ik_\rho \Gamma_\rho (p, p-k, k); \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_\mu} = i\Gamma_\mu (p, p, 0) \text{ (соотношение Уорда)}; \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^2 G^{-1}(p)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = i\left[\frac{\partial \Gamma_\mu (p, p-k, k)}{\partial k_\nu} + \frac{\partial \Gamma_\nu (p, p-k, k)}{\partial k_\mu}\right]_{k=0}; \tag{3.11}$$

$$\Gamma^n_{\nu_1 \ldots \nu_n}\left(p-k, p-k-\sum_{m=1}^{n} s_m, s_1, \ldots, s_n\right) - \Gamma^n_{\nu_1 \ldots \nu_n}\left(p, p-\sum_{m=1}^{n} s_m, s_1, \ldots, s_n\right) = ik_\rho \Gamma^{n+1}_{\rho\nu_1\ldots\nu_n} \times \\ \times \left(p, p-k-\sum_{m=1}^{n} s_m, k, s_1, \ldots, s_n\right), \tag{3.12}$$

где

$$\Gamma^n_{\nu_1 \ldots \nu_n}\left(p, p-\sum_{m=1}^{n} s_m, s_1, \ldots, s_n\right) = -\prod_{m=1}^{n} \frac{\delta G^{-1}(p, p')}{\delta i e_0 \langle A_{\nu_m}(s_m)\rangle}\Bigg|_{\langle A \rangle = 0}. \tag{3.13}$$

Используя [1] соотношения (3.9), нетрудно найти зависимость G от продольной части электромагнитного поля (от D^l). В самом деле, подставляя в выражение для Σ выражение

$$D_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) D^t(k) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} D^l(k),$$

получим $\Sigma = \Sigma^t + \Sigma^l$;

$$\Sigma^t = -\frac{e_0^2 i}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G(p+k) \Gamma_\nu (p+k, k) \frac{k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu}{k^2} D^t(k)\, d^4k; \tag{3.14}$$

$$\Sigma^l = -\frac{e_0^2 i}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G(p+k) \Gamma_\nu (p+k, k) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} D^l(k)\, d^4k. \tag{3.15}$$

Используя (3.9), получим

$$\Sigma^l = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G(p+k) \frac{k_\mu}{k^2} D^l(k)\, d^4k G^{-1}(p). \tag{3.16}$$

Уравнение для функции Грина электрона приобретает вид [10]:

$$[+i\gamma_\mu p_\mu + m + \Sigma^t(p)]\, G(p) = 1 - \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int \gamma_\mu G(p+k) \frac{k_\mu D^l}{k^2} d^4k. \tag{3.17}$$

Пусть нам известно решение уравнения G^t при $D^l = 0$. Отличие D^l от нуля приводит к изменению G, и эта зависимость от D^l согласно уравнению (3.17) передается следующим образом [12, 10, 3]:

$$G(x-y) = G^t(x-y) \exp ie^2 [\Delta^l(x-y) - \Delta^l(0)], \tag{3.18}$$

---

[1] Из соотношения (3.9), в частности, следует

$$G^{-1}(p) - G^{-1}(p^0) = i(p_\mu - p_\mu^0)\Gamma_\mu (p, p^0, p - p^0). \tag{3.9a}$$

Выбирая $(p^0)^2 = -m^2$, т. е. $p^0_{1,2,3} = p_{1,2,3}$, $p^0_4 = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$, отсюда получим явное выражение для Γ_4 через G^{-1}.

где

$$\Delta^l = \int \frac{D^l(k^2)}{k^2} e^{ik(x-y)}\, d^4k. \tag{3.19}$$

В справедливости соотношения (3.18) легко убедиться, если перейти в уравнении (3.17) к x-пространству; тогда решение этого уравнения находится без всякого труда.

2. Поляризационный оператор является поперечным при $I \neq 0$. В самом деле, рассмотрим четырехмерную дивергенцию поляризационного оператора. Согласно (3.5) и (3.8), имеем

$$k_\nu \Pi_{\mu\nu}(p, k) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \operatorname{Sp}\left\{\int \gamma_\mu G(p+s, s)\,[G^{-1}(s_1, s_2 - k) - \right.$$
$$\left. - G^{-1}(s_1 + k, s_2)]\, G(s_2, s)\, d^4s\, d^4s_1\, d^4s_2\right\} = 0. \tag{3.20}$$

Поскольку это соотношение выведено при $I \neq 0$, то последовательным дифференцированием по I или $\langle A\rangle$ можно получить бесконечный ряд соотношений, эквивалентных операторному закону сохранения заряда. Наконец, используя зарядовую симметричность тока, можно показать, что нечетные производные по $\langle A\rangle$ от поляризационного оператора при $I \neq 0$ равны нулю (см. Приложение 1 работы [4]).

Необходимо отметить, что рассмотренные здесь соотношения имеют реальный смысл лишь применительно к перенормированным величинам. Легко убедиться, что все соотношения остаются в таком же виде справедливыми и для перенормированных величин, поскольку перенормировка массы не сказывается на эти соотношения, а множитель для G и Γ подбирается так, чтобы не нарушилось соотношение Уорда. Отметим также, что соотношения (3.8) — (3.12) можно получить и непосредственно из системы функциональных уравнений (1.14) — (1.16). В самом деле, взяв функциональную производную от (1.16) по $\eta(y)$ и $\eta(y')$ и полагая $\eta = 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta G^{-1}(y, y')}{\delta ie\langle A_\mu(x)\rangle} = [\delta(y - x) - \delta(y' - x)]\, G^{-1}(y, y'). \tag{3.21}$$

Это соотношение эквивалентно соотношению (3.8).

§ 4. Система перенормированных уравнений [9, 4]

В систему уравнений для функций Грина входят затравочные значения m_0 и g_0 для массы m и заряда g. Между тем взаимодействие с нулевыми колебаниями приводит к тому, что наблюдаемая масса и заряд отличаются от их затравочных значений. Естественно, представляет интерес выразить все функции Грина через экспериментальные значения для заряда и массы. Для проведения программы перенормировок перейдем к новым переменным: $G', D', \Gamma', I', m, g, \psi', \eta', \varphi'$, связанным с прежними значениями следующим образом:

$$G' = G / Z_2, \quad D' = D / Z_3, \quad \Gamma' = Z_1\Gamma, \quad \varphi' = \varphi / Z_3^{1/2}, \quad I' = Z_3^{1/2} I,$$
$$\psi' = \psi / Z_2^{1/2}, \quad \eta' = Z_2^{1/2}\eta, \quad \bar\psi' = \bar\psi / Z_2^{1/2}, \quad g = g_0 Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2}. \tag{4.1}$$

Перенормировка сводится к выбору определенных значений для постоянных Z_1, Z_2, Z_3 и к введению вместо m_0 и g_0 экспериментально наблюдаемых значений для этих величин m и g. Согласно Дайсону и Уорду [13] это достигается наложением следующих требований на решения перенормированных уравнений при отсутствии внешних источников.

1) Функция Грина электрона G' должна иметь полюс первого порядка при импульсах $p^2+m^2=0$ (m — экспериментальное значение массы электрона). Постоянная Z_2 подбирается из условия, что $G'(p)\to \to \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu + m}$, когда

$$p^2=(p_0)^2=-m^2. \tag{4.2}$$

2) Функция Грина фотонов имеет полюс при $k^2=-\varkappa^2$. Постоянная Z_3 выбирается так, чтобы из уравнения для D' вытекало

$$D'(k)\to\frac{1}{k^2+\varkappa^2} \text{ при } k^2\to k_0^2=-\varkappa^2. \tag{4.3}$$

3) Постоянная Z_1 подбирается так, чтобы $\Gamma'(p_0,\, p_0-k_0,\, k_0)=\gamma$.

Найдем нормальное выражение для Z, m_0 и $\varkappa_0$ через перенормированные функции Грина. Используя (2.15) — (2.19) и (4.1), можно получить

$$\begin{gathered}[Z_2(i\gamma_\mu p_\mu+m_0)+\Sigma'(p)]\,G'(p)=1,\\ [Z_3(k^2+\varkappa_0^2)-\Pi'(k)]\,D'(k)=1;\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\Sigma'(p)=-\frac{ig^2Z_1}{(2\pi)^4}\int\gamma G'(p+k)\,\Gamma'(p+k,\,k)\,D'(k)\,d^4k; \tag{4.5}$$

$$\Pi'(k)=-\frac{ig^2Z_1}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int\gamma G'(p+k)\,\Gamma'(p+k,\,k)\,G'(p)\,d^4p; \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\Gamma'(p,\,p-s,\,s)=Z_1\gamma+\frac{g^2i}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma G'(p+k)\,[\Gamma'(p+k,\,s)\times\\ \times G'(p+k-s)\,\Gamma'(p+k-s,\,k)+\Gamma'^1(p+k,\,p-s,\,k,\,s)]\,D'(k)\,d^4k=\\ =Z_1(\gamma+\Lambda(p,\,s));\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\Gamma'^1(p+k,\,p',\,k,\,s)\,\delta(p+k-p'-k-s)=\frac{\delta\Gamma'(p+k,\,p',\,k)}{\delta ig\,\langle\varphi'(s)\rangle}\bigg|_{\langle\varphi\rangle=0}. \tag{4.8}$$

Согласно (4.2) — (4.4), имеем

$$\begin{aligned} m_0&=m-\frac{\Sigma'(p_0)}{Z_2}, & Z_2&=1+\frac{\partial\Sigma'(p_0)}{\partial i\gamma p_0},\\ \varkappa_0^2&=\varkappa^2+\frac{\Pi'(k_0^2)}{Z_3}, & Z_3&=1+\frac{\partial\Pi'(k_0^2)}{\partial k_0^2},\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$Z_1^{-1}=1+\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\gamma\Lambda(p_0,\,k_0),\qquad g^2=g_0^2Z_1^{-2}Z_2^2Z_3.$$

Из (4.4) — (4.9) получаем [1] следующую систему перенормированных уравнений для функций Грина при отсутствии внешнего поля [2]:

$$\{i\gamma_\mu p_\mu+m+\Sigma^R(p)\}\,G(p)=1,$$

$$\{k^2+\varkappa^2-\Pi^R(k)\}\,D(p)=1,$$

[1] Всюду в дальнейшем штрихи опущены.

[2] Перенормировка системы зацепляющихся уравнений проведена Л. Д. Галаниным, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчуком [14] и автором [9].

$$\Sigma^R(p) = \Sigma(p) - \Sigma(p_0) - (i\gamma_\mu p_\mu + m)\frac{\partial\Sigma(p_0)}{\partial i\gamma p_0}, \tag{4.10}$$

$$\Pi^R(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(k_0^2) - (k^2+\varkappa^2)\frac{\partial\Pi(k_0^2)}{\partial k_0^2},$$

$$\Sigma(p) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k,\ k)\,D(k)\,d^4k,$$

$$\Pi(k^2) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int Z_1\gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k,\ k)\,G(p)\,d^4p, \tag{4.11}$$

$$\Gamma(p,\ p-k,\ k) = \gamma + [\Lambda(p,\ p-k,\ k) - \Lambda(p_0,\ p_0-k_0,\ k_0)],$$

$$\Lambda(p,\ p-s,\ s) = \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma G(p+k)\,[\Gamma(p+k,\ s)\,G(p+k-s)\times$$
$$\times\Gamma(p+k+s,\ k) - \Gamma^1(p+k,\ p-s,\ k,\ s)]\,D(k)\,d^4k. \tag{4.12}$$

При наличии внешнего поля получаем следующую систему перенормированных уравнений:

$$[i\gamma_\mu p_\mu + m + \Sigma^R(p)]\,G(p,\ p') - ig\int\Gamma(p,\ p-k,\ k)\,\langle\varphi(k)\rangle\times$$
$$\times G(p-k,\ p')\,d^4k + \int\Sigma_1(p,\ k)\,G(k,\ p')\,d^4k = \delta(p-p'); \tag{4.13}$$

$$(k^2+\varkappa^2-\Pi^R(k))\,D(k,\ k') - \int\Pi_1(k,\ s)\,D(s,\ k')\,d^4s = \delta(k-k'); \tag{4.14}$$

$$(k^2+\varkappa^2-\Pi^R(k))\,\langle\varphi(k)\rangle = I(k) - \frac{g}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int Z_1\gamma\Big[G(p+k,\ p) -$$
$$-\int\frac{\delta G(p+k,\ p)}{\delta\langle\varphi(s)\rangle}\Big|_{\langle\varphi\rangle=0}\langle\varphi(s)\rangle\,d^4s\Big]\frac{d^4p}{(2\pi)^4}; \tag{4.15}$$

$$\Gamma(p,\ p_1,\ k) = Z_1\gamma\delta(p-p'-k) + \frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma G(p+$$
$$+s,\ s_1)\Big[\Gamma(s_1,\ s_2,\ k)\,G(s_2,\ s_3)\,\Gamma(s_3,\ p_1,\ k_1)\,D(k_1,s)\,d^4s_2d^4s_3 +$$
$$+\frac{\delta(\Gamma(s_1,\ p_1,\ k_1)\,D(k_1,\ s))}{\delta ig\langle\varphi(k)\rangle}\Big]d^4s_1d^4k_1 = \Gamma(p,\ p-k,\ k)\,\delta(p-p_1-k) -$$
$$-\frac{\delta\Sigma_1(p,\ p_1)}{\delta ig\langle\varphi(k)\rangle}; \tag{4.16}$$

$$\Pi_1(p,\ k) = \Pi(p,\ k) - \Big[\Pi(p,\ k)\Big|_{\langle\varphi\rangle=0} + \int\frac{\delta\Pi(p,\ k)}{\delta\langle\varphi(s)\rangle}\Big|_{\langle\varphi\rangle=0}\langle\varphi(s)\rangle\,d^4s\Big]; \tag{4.17}$$

$$\Sigma(p,\ s) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma G(p+k,\ k_1)\,\Gamma(k_1,\ s,\ k_2)\,D(k_2,\ k)\,d^4kd^4k_1d^4k_2; \tag{4.18}$$

$$\Pi(p,\ s) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma G(p+k,\ k_1)\,\Gamma(k_1,\ k_2,\ s)\,G(k_2\ k)\,d^4kd^4k_1d^4k_2; \tag{4.19}$$

$$\Sigma_1(p,\ k) = \Sigma(p,\ k) - \Sigma(p,\ k)\Big|_{\langle\varphi\rangle=0} - \int\frac{\delta\Sigma(p,\ k)}{\delta\langle\varphi(s)\rangle}\Big|_{\langle\varphi\rangle=0}\langle\varphi(s)\rangle\,d^4s, \tag{4.20}$$

где $\Gamma(p,\ p-k,\ k)$, $\Sigma^R(p)$, $\Pi^R(k)$ определяются формулами (4.10)—(4.12).

Полученная система уравнений не содержит бесконечностей. Однако в этой системе Σ, Π, Γ и т. д. содержат в виде множителя Z_1, назначение

[1] По поводу вычитательных членов (зависящих от p_0) следует иметь в виду, что оператор $i\gamma p_0$ (или $i\gamma(p_0-k_0)$), входящий в $\Sigma(p_0)$, $\frac{\partial\Sigma(p_0)}{\partial i\gamma p_0}$, $\Lambda(p_0,\ p_0-k_0)$, необходимо формально заменить на $-m$. Это замечание относится и к перенормировке в статистике.

которого исключить так называемые перекрывающиеся бесконечности [15]. Множитель Z_1 выражается через перенормированные величины следующим образом:

$$Z_1^{-1} = 1 + \frac{g^2 i}{4(2\pi)^4}\int \operatorname{Sp}\gamma\,[G(p_0+s)\,\Gamma(p_0+s,\ p_0+s+k_0,\ k_0)\times$$
$$\times G(p_0+s+k_0)\,\Gamma(p_0+s+k_0,\ p_0+k_0,\ s)+G(p_0+s)\times$$
$$\times\Gamma^1(p_0+s,\ p_0+k_0,\ s,\ k_0)]\,D(k_0)\,d^4s. \qquad (4.21)$$

Подставляя выражение для Z_1 и производя разложение по g^2, получим диаграммы Фейнмана, в которых проведена перенормировка и исключены бесконечности (в том числе и перекрывающиеся бесконечности) [1].

Поскольку при решении перенормированных уравнений из-за множителя Z_1 мы сталкиваемся с раскрытием неопределенности $0\times\infty$, то целесообразно в рамках самих уравнений эффективно провести это раскрытие неопределенности и исключить Z_1.

Это сводится к некоторой перегруппировке фейнмановских диаграмм и будет продемонстрировано на примере уравнения для Γ-функции.

Уравнение для Γ-функции можно переписать в виде

$$\Gamma(p,\ p-k,\ k) = Z_1\gamma + \frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma M^1(p+s,\ p-k,\ k,\ s)\,d^4s, \qquad (4.22)$$

где

$$M^1(p+s,\ p+s-k,\ k,\ s) = G(p+s)\,[\Gamma(p+s,\ k)\,G(p-k+s)\times$$
$$\times\Gamma(p-k+s,\ s)+\Gamma^{(1)}(p+s,\ p-k,\ k,\ s)]\,D(s). \qquad (4.23)$$

Легко убедиться, что $[M^1(p+s,\ p+s-k,\ k,\ s)+G(p+s)\,\Gamma(p+s,\ s)\,D(s)\,G(p)\,\Gamma(p,\ k)]\,D(k)\,G(p-k)$ есть амплитуда рассеяния бозе-частицы на ферми-частице.

Следуя [4], введем новый оператор R, связанный с M следующим образом:

$$R(p+s,\ p-k,\ k,\ s) = M^{(1)}(p+s,\ p-k,\ k,\ s) -$$
$$-\frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\int M^1(p+s,\ p+s_1,\ -s_1,\ s)\,R(p+s_1,\ p-k,\ k,\ s_1)\,d^4s_1. \qquad (4.24)$$

Оператор R описывает те же диаграммы, что M, но отличается тем, что по сравнению с M отброшены диаграммы, которые могут быть получены соединением более простых диаграмм друг с другом. Умножая (4.24) на $\frac{g^2 i Z_1}{(2\pi)^4}\gamma$ и интегрируя по s с учетом (4.22), получим

$$\frac{Z_1 i g^2}{(2\pi)^4}\int\gamma M^{(1)}(p+s,\ p-k,\ k,\ s)\,d^4s =$$
$$= \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\int\Gamma(p,\ p+s,\ -s)\,R(p+s,\ p-k,\ k,\ s)\,d^4s. \qquad (4.25)$$

Из (4.22) и (4.25) имеем

$$\Gamma(p,\ p-k,\ k) = Z_1\gamma + \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\int\Gamma(p,\ p+s,\ -s)\,R(p+s,\ p-k,\ k,\ s)\,d^4s. \qquad (4.26)$$

[1] Следует заметить, что аналогичную систему уравнений можно решать не методами теорий возмущений в эвклидовом пространстве (см. гл. IV), где, не нарушая свойство релятивистской инвариантности, можно формально ввести верхний импульс L, который из окончательного выражения для перенормированных величин выпадает.

окончательно для Г получим [4]:

$$\Gamma(p, p-k, k) = \gamma + \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\Big[\int \Gamma(p, p+s, -s) R(p+s, p-k, k, s) - \\ - \Gamma(p_0, p_0+s, -s) R(p_0+s, p_0-k_0, k_0, s)\Big] d^4 s. \quad (4.27)$$

Нетрудно убедиться, что эффективное исключение Z_1 здесь достигнуто благодаря тому, что мы перешли в Г к неприводимым диаграммам заменой $M^{(1)} \to R$, при этом в каждой из этих неприводимых диаграмм вершина описывается через Г, в то время как в начальном выражении для Г одна из вершин описывалась через $Z_1\gamma$, так что наряду с неприводимыми диаграммами присутствовали и приводимые диаграммы.

Таким образом, роль Z_1 и приводимых диаграмм сводится к тому, что они превращают $Z_1\gamma$, входящую в неприводимые диаграммы, в Г. Легко убедиться, что аналогичным образом можно исключить $Z_1\gamma$ также из массового и поляризационного операторов.

Рассмотрим, как исключить Z в массовом операторе или в n-й функциональной производной от Σ [в частности, $\Gamma^n(p, s_1, \ldots, s_n)$]. Все эти величины имеют следующий интегральный вид:

$$\Sigma^n(p, s_1, \ldots, s_n) = \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\int Z_1\gamma M^n(p+s, s_1, \ldots, s_n, s)\, d^4 s. \quad (4.28)$$

Исключение «перекрывающихся» бесконечностей достигается тем, что в (4.28) множитель $Z_1\gamma$ заменяется его выражением, взятым из (4.26), это эквивалентно замене $Z_1\gamma \to \Gamma(p, p+s, -s)$, при этом, естественно, нужно величину M^n заменить на некоторую другую величину $R^n(p+s, s_1, \ldots, s_n, s)$. Сделав такую замену, получим

$$\int Z_1\gamma M^n(p+s, s_1, \ldots, s_n, s)\, d^4 s = \\ = \int \Gamma(p, p+s, -s)\, R^{(n)}(p+s, s_1, \ldots, s_n, s)\, d^4 s. \quad (4.29)$$

Найдем $R^{(n)}$, для этого заменим $Z_1\gamma$ в левой части (4.29) на его выражение, определяемое соотношением (4.26):

$$\int Z_1\gamma M^n ds = \int \Gamma(p, p+s, -s) M^n(p+s, s_1, \ldots, s_n, s)\, d^4 s - \\ - \int \Gamma(p, p+k, -k) R(p+k, p+s, -s, k) M^n(p+s_1, s_1 \ldots s_n, s)\, d^4 k d^4 s. \quad (4.30)$$

Сделав замену переменных интегрирования ($s \to k$) в последнем интеграле (4.30) и учитывая (4.29), получим следующее выражение для R^n:

$$R^n(p+s, s_1, \ldots, s_n, s) = M^n(p+s, s_1, \ldots, s_n, s) - \\ - \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\int R(p+s, p+k, -k, s) M^{(n)}(p+k, s_1, \ldots, s_n, k)\, d^4 k. \quad (4.31)$$

Заметим, в частности, что в том случае, когда $n = 1$, $R^{(1)}$ совпадает с R, в общем же случае R является резольвентой уравнения для R^n по импульсу бозе-частиц.

Естественно, что для того, чтобы уравнение (4.31) имело смысл, необходимо, чтобы интеграл по k сходился. Нетрудно убедиться, что это имеет место для Γ и всех Γ^n (соответственно для всех функциональных производных массового оператора Σ по $\langle\varphi\rangle$). Что же касается самого массового оператора при $\langle\varphi\rangle = 0$, то в этом случае интеграл (4.31) расходится. Поэтому указанную процедуру исключения Z_1 необходимо применить не к $\Sigma(p)$, а к оператору $\partial\Sigma(p)/\partial p_\mu$, для которого интеграл (4.31) уже сходится. Таким образом, исключение Z_1 достигается тем, что из рассматриваемой величины мы выкидываем ряд диаграмм, оставляя лишь «неприводимые», при этом в эти «неприводимые» диаграммы уже всюду входят «обросшие» Г-функции.

Поскольку массовый (поляризационный) оператор содержит лишь одну неприводимую цепочку, то эту программу можно провести непосредственно не с $\Sigma(p)$ ($\Pi(p)$), а с производной по импульсу от массового (поляризационного) оператора.

Итак, для $\partial\Sigma(p)/\partial p_\mu$ получаем следующее выражение [4]:

$$\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \frac{-g^2 i}{(2\pi)^4}\int \Gamma(p,\ p+k, -k)\,\widetilde{R}_\mu(p+k,\ k)\,d^4k; \tag{4.32}$$

$$\widetilde{R}_\mu(p+k, k) = \frac{\partial}{\partial p_\mu}[G(p+k)\Gamma(p+k, k)D(k)] -$$
$$- \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\int R(p+k,\ p+s,\ -s,\ k)\frac{\partial}{\partial p_\mu}[G(p+s)\Gamma(p+s,\ s)D(s)]\,d^4s. \tag{4.33}$$

Для $\Gamma(p, p', k)$ при наличии внешнего поля φ получим

$$\Gamma(p, p', k) = Z_1\gamma\delta(p-p'-k) + \frac{g^2 i}{(2\pi)^4}\times$$
$$\times\int \Gamma^{(\varphi=0)}(p,\ p+s, -s)\,R^{(\varphi)}(p+s, p', k,\ s)\,d^4s; \tag{4.34}$$

$$R^{(\varphi)}(p+s,\ p'\ k,\ s) = M^{(\varphi)}(p+s,\ p',\ k,\ s) - \int R(p+s,\ p+$$
$$+ s_1, -s_1, s)\,M^{(\varphi)}(p+s_1,\ p'\ k, s_1)\,d^4s_1, \tag{4.35}$$

где

$$M^{(\varphi)}(p+s,\ p',\ k,\ s) = \int [G(p+s,\ p_1)\,\Gamma(p_1, p_2, k)\,G(p_2,\ p_3)\,\Gamma(p_3, p', s_1)\times$$
$$\times D(s_1,\ s)\,d^4p_1 d^4p_2 + G(p+s,\ p_1)\frac{\delta[\Gamma(p_1,\ p',\ s_1)\,D(s_1,\ s)]}{\delta ig\langle\varphi(k)\rangle}\Big]d^4p_1 d^4s_1. \tag{4.36}$$

В заключение отметим, что инвариантность теории относительно преобразований (4.1) приводит к существованию ренормализационной группы, с помощью которой в работах Гелл-Манна и Лоу, Боголюбова, Ширкова, Логунова разработан и применен существенный метод улучшения формул теории возмущений (подробнее см. [3], гл. 8).

§ 5. Система перенормированных уравнений и асимптотика для функций Грина в квантовой электродинамике

Существенный вопрос теории — асимптотика для функций Грина при больших импульсах в случае слабой связи — впервые исследован в работах Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова, И. М. Халатникова и А. Д. Галанина [16, 17].

В этом параграфе рассмотрим асимптотику для функций Грина с помощью системы перенормированных уравнений и остановимся на некоторых возможных утверждениях по поводу математической замкнутости существующей теории.

Специфика квантовой электродинамики заключается в том, что G полностью определяется через Г-функцию согласно соотношению (3.9) — (3.10).

Система перенормированных уравнений имеет вид [18, 4]:

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_\mu} = i\Gamma_\mu(p, p, 0); \tag{5.1}$$

$$\Gamma_\mu(p, p-l, l) = \gamma_\mu + [\Lambda_\mu(p, p-l, l) - \Lambda_\mu(p_0, p_0, 0)]; \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial D^{-1}(k)}{\partial k_\mu} = 2k_\mu - \left(\Pi_\mu(k) - \Pi_\mu(k^0) - k_\nu \frac{\partial \Pi_\mu(k^0)}{\partial k_\nu^0}\right); \tag{5.3}$$

$$\Lambda_\mu(p, p-l, l) = \frac{e^2 i}{(2\pi)^4}\int \Gamma_\nu(p, p+s, -s) R_{\mu\nu}(p+s, p-l, l, s)\, d^4 s; \tag{5.4}$$

$$R_{\mu\nu}(p+s, p-l, l, s) = M^{(1)}_{\mu\nu}(p+s, p-l, l, s) - \\ - \frac{e^2 i}{(2\pi)^4}\int R_{\mu\rho}(p+s, p+k, -k, s) M^{(1)}_{\mu\nu}(p+k, p-l, l, k)\, d^4 k; \tag{5.5}$$

$$M^{(1)}_{\mu\nu}(p+s, p, s) = G(p+s)\,[\Gamma_\mu(p+s, l)\, G(p+s-l)\,\Gamma_\rho(p+s-l, s) + \\ + \Gamma^{(1)}_{\mu\rho}(p+s, p-l, l, s)]\, D_{\rho\nu}(s); \tag{5.6}$$

$$\Pi_\mu = -\frac{e^2 i}{3(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int\Big\{(\Gamma_\nu(p-k, p, -k) - \Lambda_\nu(p-k, p, -k))\, G(p) \times \\ \times \frac{\partial}{dk_\mu}(\Gamma_\nu(p, p-k, k)\, G(p-k))\Big\}\, d^4 p = \\ = -\frac{e^2 i}{3(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int\Big[\Gamma_\nu(p-k, p, -k)\, G(p)\, \Gamma_\nu(p, p-k, k)\frac{\partial G(p-k)}{\partial k_\mu} + \\ + \int \Gamma_\nu(p, p+s, -s)\, F_{\nu\mu}(p+s, p-k, k, s)\, G(p)\, d^4 s\Big]\, d^4 p; \tag{5.7}$$

$$F_{\nu\mu}(p+s, p-k, k, s) = \frac{e^2 i}{(2\pi)^4}\Big[\frac{\partial R_{\rho\nu}}{\partial k_\mu}(p+s, p-k, k, s)\, G(p-k)\,\Gamma_\rho(p - \\ - k, p, -k) - R_{\rho\nu}(p+s, p+k, k, s)\frac{\partial}{\partial k_\mu} G(p+k)\,\Gamma(p+k, p, k)\Big], \tag{5.8}$$

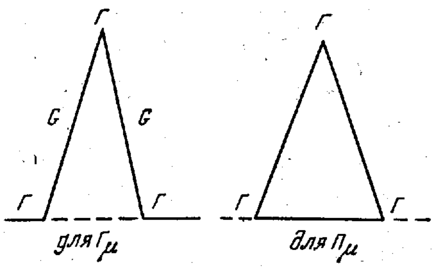
где

$$D_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) D^t(k) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} D^l(k); \tag{5.9}$$

$$(k_\mu^0)^2 = 0.$$

Для эффективного исключения «перекрывающихся бесконечностей» мы выразили Γ_μ и Π_μ через соответствующие неприводимые диаграммы. Роль приводимых диаграмм сводится к тому, что они превращают $Z_1\gamma_\mu$, входящие в неприводимые диаграммы, в Γ_μ. Полученную систему уравнений можно оборвать в соответствии с числом неприводимых диаграмм.

В частности, если удерживаются лишь первые простейшие неприводимые диаграммы, получим для Γ_μ и Π_μ следующие диаграммы:



В этом приближении мы получаем систему уравнений, эквивалентную «трехгаммному» приближению Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова. Система уравнений приобретает в этом приближении следующий вид [18, 19]:

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_\mu} = i\Gamma_\mu(p, p, 0); \tag{5.10}$$

$$\Gamma_\mu(p, p-l, l) = \gamma_\mu + [\Lambda_\mu(p, p-l, l) - \Lambda_\mu(p_0, p_0, 0)]; \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial D^{-1}(k)}{\partial k_\mu} = 2k_\mu - \left[\Pi_\mu(k) - \Pi_\mu(k^0) - k_\nu \frac{\partial \Pi_\mu(k^0)}{\partial k_\nu^0}\right]; \tag{5.12}$$

$$\Lambda_\mu(p, p-l, l) = \frac{e^2 i}{(2\pi)^4} \int \Gamma_\rho(p, p-k, k)\, G(p-k)\, \Gamma_\mu(p-k, p-k-l, l) \times$$
$$\times G(p-k-l)\, \Gamma_\nu(p-k-l, -k)\, D_{\rho\nu}(k)\, d^4k; \tag{5.13}$$

$$\Pi_\mu(k) = \frac{e^2}{3(2\pi)^4 i} \operatorname{Sp}\left\{\int \Gamma_\nu(p, p-k, k) \frac{\partial G(p-k)}{\partial k_\mu} \Gamma_\nu(p-k, p, -k)\, G(p)\, d^3p\right\},$$

где $p_0^2 + m^2 = 0$. (5.14)

Здесь

$$D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) D^t(k) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} D^l(k), \tag{5.15}$$

причем член с $k_\mu k_\nu / k^2$ необходимо понимать в смысле главного значения.

Как было показано в работе автора [18], из системы уравнений (5.10)—(5.15) следует асимптотика для функций Грина, впервые найденная Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым [16]. То обстоятельство, что соотношение Уорда выполняется в системе уравнений (5.10) — (5.15) точно, делает более простыми расчеты по нахождению асимптотики, поскольку не приходится искать так называемые малые добавки [16] к G и Γ.

В «трехгаммном» приближении наиболее просто находится асимптотика при лорентцовой калибровке ($D^l = 0$). В этом случае радиационные добавки к G и Γ асимптотически при больших импульсах исчезают. Поэтому асимптотика для G и Γ такая же, как для свободных частиц, вследствие чего поляризационный оператор в этом случае асимптотически совпадает с поляризационным оператором, вычисленным в первом приближении (по e^2) теории возмущений.

Таким образом, в этом приближении имеем для D следующую асимптотику [16]:

$$D(k) \approx \frac{1}{k^2\left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{k^2}{m^2} - \frac{ie^2}{12\pi}\theta(-k^2 - 4m^2)\right]}. \tag{5.16}$$

естественно, что такая же асимптотика для $D(k)$ получается в общем случае, когда $D^l \neq 0$, поскольку поляризационный оператор является градиентно-инвариантной величиной и поэтому не зависит от тех добавок к G и Γ, которые обусловлены отличием D^l от нуля.

В полученном приближении мы сталкиваемся с существенной трудностью теории: для пространственных импульсов k^2, когда $\frac{k^2}{m^2} \sim \exp\left(\frac{12\pi^2}{e^2}\right)$, действительная часть $D(k)$ имеет фиктивный полюс [1], что противоречит спектральной формуле Челена — Лемана для перенормированной теории. Логически допустимы две возможности возникновения. Первая возможность заключается в следующем: указанная трудность есть результат выбранного приближения и более точный учет отброшенных членов приведет к ликвидации этой трудности. Дело в том, что, строго говоря, не выполнена программа Л. Д. Ландау при нахождении асимптотики, согласно которой необходимо просуммировать все особенности высшего порядка для G, Γ и D. В самом деле, поскольку от D^l физические результаты не зависят, то полагая $D^l = 0$ и решая уравнения для функций Грина в «трехгаммном» приближении, мы тем самым отбросили главную расходимость для G и Γ, поскольку первая неисчезающая расходимость возникает в отброшенном пятигаммном приближении. При этом расчет необходимо проверить с перенормированными уравнениями, поскольку результат неперенормированных уравнений может зависеть от способа введения и вида форм-фактора.

Вообще в случае, когда $e_0 = \infty$, к разумным результатам может привести только перенормированная теория.

С этой точки зрения, существенно проблему асимптотики изучить в другом приближении, а именно: в качестве первого приближения найти асимптотику для G и Γ, полагая $D(k) = D^0(k)$, затем с помощью полученной асимптотики для G и Γ найти поляризационный оператор Π. При этом существенно работать с системой уравнений, где проведено явное исключение перекрывающихся бесконечностей, т. е. множитель Z_1 в Σ, Γ и Π, поскольку имеются серьезные аргументы в пользу того, что $Z_1 = 0$, и поэтому существенно раскрыть неопределенность типа $0 \times \infty$ в самих уравнениях для функций Грина.

Коротко остановимся и на второй возможности (подробнее см. [21, 19]). Указанная трудность «фиктивного полюса» (или «заряда нуль») присуща всем существующим локальным теориям поля. Это обусловлено неприменимостью современной теории на малых расстояниях.

В терминах затравочного заряда получаем, что при любом затравочном заряде из-за большого самодействия происходит полная экранировка его и перенормированный заряд оказывается равным нулю. Таким образом,

---

[1] Следует отметить, что в этом же приближении мнимая часть D не имеет фиктивного полюса. В самом деле

$$\operatorname{Im} D = \frac{1}{k^2}\,\frac{\frac{e^2}{12\pi}\,\theta(-k^2-4m^2)}{\left(1-\frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{k^2}{m^2}\right)^2+\left(\frac{e^2}{12\pi}\right)^2\theta(-k^2-4m^2)}\,.$$

фундаментальной трудностью для современной теории являются не массовые расходимости, как в классической теории (после проведения перенормировки эти расходимости не приводят к каким-либо формальным трудностям), а зарядовые расходимости (точнее в случае электродинамики только бесконечность Z_3).

В случае малого затравочного заряда этот результат можно строго показать. При больших затравочных значениях для заряда можно привести ряд качественных рассуждений [21, 19], показывающих, что трудность «заряда нуль» с увеличением затравочного заряда не аннулируется [1].

Имеется существенный результат И. Я. Померанчука [22], показывающий, что неперенормированная теория внутренне противоречива. По-видимому, противоречивы и перенормированные локальные теории, не приводящие органически к спектру масс за счет образования связанных состояний [23]. Возможно, однако, что для локальной единой теории поля, где поведение функции Грина одной частицы [2] при больших импульсах не определяет сходимость диаграмм, указанная трудность не будет присуща.

Резюмируя, можно сказать, что для окончательного ответа на этот фундаментальный вопрос современной теории необходимо привлечь более мощные математические методы решения функциональных уравнений (см. § 8—9). Кроме того, представляет большой интерес разработка более общего метода, чем гамильтоновый дисперсионный метод, который мог бы дать результаты, отличные от результатов существующей теории.

В рамках гамильтонового метода имеется существенный момент: связанный с неопределенностью T-произведения для совпадающих времен. Как показали Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков [24], все расходимости теории возникают вследствие неопределенности T-произведения при совпадающих аргументах. Воспользовавшись этим произволом, можно доопределить T-произведение с учетом требований унитарности, причинности, ковариантности так, что результирующие операторы оказались бы интегрируемыми. Эта рецептура доопределения T-произведения в случае теории возмущений оказалась эквивалентной обычной процедуре перенормировок; при этом каждый член перенормированного ряда теории возмущения удовлетворяет условию спектральности.

До сих пор не выяснен вопрос о степени произвола в доопределении T-произведения, если система уравнений для функций Грина решается не методом теорий возмущений. Возможно ли доопределить T-произведение при совпадающих аргументах с учетом возможной неаналитической зависимости от заряда так, чтобы решение полученных уравнений для функций Грина не теряло свойство спектральности, как это имеет место в решении (5.16) (см. также конец § 7).

---

[1] Например, перейдя к переменным $e_0 A$, получим, что заряд e_0 входит лишь в свободный гамильтониан фотонов в виде множителя $1/e^2_0$, тем самым с увеличением e_0 роль свободного гамильтониана фотонов уменьшается.

[2] При больших импульсах все определяется полем в целом и понятие функции Грина отдельных частиц теряет смысл.

§ 6. К вопросу об устранении «фиктивного» полюса функции Грина бозона [30]

В последнее время привлечено внимание к возможности применения дисперсионных соотношений (д. с.) к устранению фиктивного полюса квантовой теории поля [25]. Суть этих работ заключается в том, что из обычной теории берется лишь мнимая часть функции Грина фотона (бозона), которая не имеет фиктивного полюса (см. § 5), а действительная часть восстанавливается по мнимой части с помощью дисперсионного соотношения Челлена — Лемана. Простой анализ, однако, показывает, что соответствующая процедура не обладает должной однозначностью. Рассмотрению этого вопроса и посвящен настоящий параграф.

Ограничимся рассмотрением квантовой электродинамики. Нетрудно показать, что если выполнено д. с. Челлена — Лемана,

$$d(z) = 1 + \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} d(\zeta)\, d\zeta}{\zeta(\zeta - z - i\varepsilon)}, \tag{6.1}$$

где

$$\begin{gathered}(k_\mu k_\nu - z\delta_{\mu\nu})\, d(z) = -D_{\mu\nu}(k)\, z^2;\\ z = k_0^2 - \mathbf{k}^2,\end{gathered} \tag{6.2}$$

то аналогичное д. с. справедливо и для поляризационного оператора:

$$\Pi(z) = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \Pi(y)\, dy}{y(y - z - i\varepsilon)}; \tag{6.3}$$

$$d^{-1}(z) = 1 + \Pi(z). \tag{6.4}$$

Для доказательства достаточно заметить, что из-за условия $\operatorname{Im} d(z) \leqslant 0$ функция $d(z)$ не имеет нулей ни в комплексной плоскости z, ни на отрицательной полуоси ($\operatorname{Re} z < 0$). Существенно, что обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо. Чтобы из д. с. (6.3) для $\Pi(z)$ вытекало д. с. (6.1), необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \Pi(y) \frac{dy}{y} \leqslant 1. \tag{6.5}$$

Действительно, как видно из (6.3), (6.4) и условия

$$\operatorname{Im} \Pi = -\frac{\operatorname{Im} d}{|d|^2} \geqslant 0, \tag{6.6}$$

неравенство (6.5) обеспечивает отсутствие полюсов функции $d(z)$ вне отрезка полуоси $\operatorname{Re} z > 0$.

Важно подчеркнуть, что условие (6.5) полностью совпадает с известным неравенством (8) работы Ш. Лемана, К. Симанзика и В. Циммермана [26]. Входящая в это неравенство функция $\Pi(z)$ связана с $F(z)$ соотношением $F(z) = 2z \operatorname{Im} \Pi(z)$.

Асимптотическое выражение для $d(z)$, полученное в трехгаммном приближении, хотя и удовлетворяет д. с. (6.3), однако находится в противоречии с условием (6.5) $\operatorname{Im} \Pi(z) = \pi\alpha$ ($\alpha \equiv e^2/12\pi^2$). Поэтому появляется фиктивный полюс у $d(z)$ и д. с. (6.1) оказывается нарушенным.

Предложенная недавно процедура [25], имеющая своей целью устранение этой трудности, состоит в том, что путем суммирования «главных» членов ряда теории возмущений вычисляется лишь величина $\operatorname{Im} d(z)$. Сама же функция $d(z)$ восстанавливается с помощью соотношения (6.1). В силу сказанного выше при этом выполняются д. с. (6.3) и условие (6.5); это может быть проверено и непосредственно.

Рассматриваемая процедура не является, однако, однозначной. Действительно, любая функция Im П, удовлетворяющая (6.5) и переходящая при $\alpha \to 0$ в соответствующее выражение теории возмущений (с точностью до заданного порядка по α), может быть использована для восстановления с помощью (6.4) — (6.1) фотонной функции Грина. Последняя будет подчиняться д. с. (6.1) и согласовываться с теорией возмущений.

В качестве примера рассмотрим выражение

$$\operatorname{Im} \Pi(z) = \pi\alpha \Big/ \left(1 + \frac{z}{z_0}\right), \tag{6.7}$$

причем из условия (6.5) $z_0 \leqslant m^2 e^{1/\alpha}$. Простые выкладки дают

$$d^{-1}(z) = 1 - \frac{\alpha}{z + z_0}\left\{z_0 \ln\left(1 - \frac{z}{m^2}\right) + z \ln\frac{z_0}{m^2}\right\}. \tag{6.8}$$

Для соответствия с теорией возмущений достаточно потребовать, чтобы z_0 росло с уменьшением α быстрее любой конечной степени α^{-1}.

Если, в частности, положить $z_0 = m^2 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$, то мы придем к выражению, не обладающему резонансными свойствами и не приводящему к сильной связи $\alpha^{-1}(\infty) = 1 - \sqrt{\alpha}$.

В устранении указанной неоднозначности большую роль могли бы сыграть общие требования причинности и унитарности теории, а также ренормализационной инвариантности. В этой связи важно подчеркнуть, что условия, выражаемые д. с. (6.1), являются лишь необходимыми, но отнюдь не достаточными для выполнения причинности и унитарности.

Рассмотрение этого круга вопросов невозможно, однако на языке одночастичных функций Грина необходимо привлечь к рассмотрению функции Грина высшего порядка, через которые выражается $\operatorname{Im} \Pi(z)$. Не исключено, что полученное в [25] выражение для функции Грина, имеющее неаналитическую по α действительную и аналитическую по α мнимую части, окажется в противоречии с условиями унитарности и причинности, тесно связывающими действительные и мнимые части матричных элементов.

Остается выяснить, не накладывает ли условие ренормализационной инвариантности какие-либо ограничения на указанную выше неоднозначность.

Условие ренормализационной инвариантности (р.и.) фотонной функции Грина $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$ имеет вид (см. [27])

$$\alpha_\lambda d(z, \lambda, \alpha_\lambda) = \alpha_{\lambda'} d(z, \lambda', \alpha_{\lambda'}), \tag{6.9}$$

где λ — квадрат нормировочного импульса $[d(\lambda, \lambda, \alpha_\lambda) = 1]$, $z = k_0^2 - k^2$, $d_\lambda = e_\lambda^2/3\pi$.

С помощью (6.9) в предположении, что d асимптотически при больших z зависит лишь от z/λ (последнее следует из анализа ряда теории возмущения), было установлено [19, 27], что в этом случае перенормированная функция d имеет вид

$$d(z, \alpha_0) = \frac{1}{\alpha_0} F\left[\ln\frac{z}{m^2} + \varphi(\alpha_0)\right], \tag{6.10}$$

где F и φ — обратные функции. Отсюда был сделан ряд существенных выводов о независимости от α_0 формы эффективного распределения заряда электрона, величины затравочного заряда и об обязательном появлении сильной связи (в случае конечной перенормировки заряда) и т. п.

Мы хотели бы подчеркнуть, что эти выводы не имеют обязательной силы, будучи связаны не только с требованием р.и., но и с определенным предположением о структуре $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$ при больших z. Само по себе предположение, что точная функция Грина $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$ имеет такую же структуру при больших z, как и ряд теории возмущения, отнюдь не является обязательным (в особенности при наличии конечной перенормировки заряда). (Так, привлечение дисперсионных соотношений к нахождению функции Грина фотона [25, 28] приводит к появлению неаналитичных по заряду членов, делающих в рассматриваемом приближении перенормировку заряда конечной.) Хотя ряд теории возмущения при больших z и в этом случае зависит лишь от z/λ, точная $d(z_\lambda, \alpha_\lambda)$ не имеет этого свойства. Таким образом, асимптотическая структура $d(z_\lambda, \alpha_\lambda)$, вообще говоря, неизвестна.

Поэтому представляет интерес выяснить, налагает ли в этом случае требование р.и. ограничение на структуру перенормированной функции Грина фотона. Для этого обратимся к решению функционального уравнения, переходящему при $\lambda = 0$ в выражение для перенормированной функции $d(z, \alpha_0)$.

Это решение может быть записано в виде [1]

$$d(z, \lambda, \alpha_\lambda) = \frac{\alpha_0(\alpha_\lambda, \lambda)}{\alpha_\lambda} d[z, \alpha_0(\alpha_\lambda, \lambda)], \tag{6.11}$$

где ренормализационно-инвариантная (т. е. не меняющаяся при изменении λ) функция $\alpha_0(\alpha_\lambda, \lambda)$ дается соотношением

$$\alpha_\lambda = \alpha_0 d(\lambda, \alpha_0). \tag{6.12}$$

Дело состоит в том, что в общем случае р.и. накладывает одну связь на аргументы $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$, поэтому, в частности, перенормированная функция Грина $d(z, \alpha_0)$ остается, вообще говоря, произвольной функцией двух аргументов.

Таким образом, если задать любое выражение для перенормированной функции Грина $d(z, \alpha_0)$, можно без труда восстановить р.и. выражение для $d(z, \lambda, \alpha_\lambda)$, переходящее при $\lambda \to 0$ в исходное. Действительно, согласно (6.11) и (6.12), дело сводится просто к введению фактора α_0/α_λ и

[1] Соотношения (6.11) и (6.12) находятся в полном соответствии с результатами Овсянникова [29].

замене α_0 на инвариантную комбинацию из α_λ и λ. Так, в частности, можно получить р.и. выражение для функции Грина [30], пример которой рассматривался выше [см. формулу (6.8)]. Полученное при этом выражение удовлетворяет требованию р.и. к спектральному соотношению Челлена — Лемана, однако противоречит условию (6.10).

Таким образом, само по себе требование р.и. не налагает никаких ограничений на вид перенормированной функции Грина фотона и, естественно, не может привести к ограничению степени неоднозначности рассмотренной процедуры устранения фиктивного полюса.

§ 7. Некоторые дисперсионные соотношения [31]

Современная квантовая теория поля основывается на общих требованиях релятивистской инвариантности, причинности и граничных условий [1]. Однако попытки решать уравнения теории с конкретными видами взаимодействия приводят, по-видимому, к выводу о внутренней математической незамкнутости теории (перенормированный заряд оказывается равным нулю). В связи с этим становится очень существенным выявление таких следствий из указанных общих требований теории, которые не зависят от конкретного вида взаимодействия и в то же время доступны экспериментальной проверке. Это позволило бы ответить на вопрос о совместимости общих требований теории с действительностью.

Одним из таких следствий является дисперсионное соотношение, связывающее действительную и мнимую части амплитуды рассеяния вперед. Такое соотношение для рассеяния бозе-частиц было установлено в работах [32] и впервые доказано в работах Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева и М. К. Поливанова [33]. Целью настоящего параграфа является вывод дисперсионного соотношения для рассеяния ферми-частиц и вида дисперсионного соотношения для произвольного угла рассеяния мезонов с нуклонами.

1. Матричный элемент $\langle p_\lambda, q_\mu | S | p'_{\lambda'} q'_{\mu'} \rangle$ рассеяния двух фермионов из состояния с импульсами p' и q' и поляризациями соответственно λ' и μ' в состояние с импульсами p и q и поляризациями λ и μ равен

$$\langle p_\lambda q_\mu | S | p'_{\lambda'} q'_{\mu'} \rangle = i \int dx\, dy\, \bar{v}^\lambda (p, x) L_x \times$$
$$\times \langle q_\mu, \ \alpha | T \{\psi_\alpha (x) \bar{\psi}_{\beta'} (y)\} | q'_{\mu'}, \ \beta' \rangle \bar{L}_y v^{\lambda'} (p', \ y), \qquad (7.1)$$

где $|q_\mu, \alpha\rangle$ — гейзенберговский вектор состояния одного фермиона с 4-импульсом $q\,(\mathbf{q},\, q_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + M^2})$; ψ_α — гейзенберговские операторы фермиона; $v^\lambda (p, x)$ — решение свободного уравнения Дирака с 4-импульсом $p\,(\mathbf{p},\, p_0 = E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2})$ и поляризацией λ;

$$L_x = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right); \qquad \bar{L}_y = \left(-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial y_\mu} + M\right); \qquad \bar{v} = v^* \gamma_4;$$

[1] При $t \to \pm\infty$ частицы являются свободными и обладают наблюдаемыми массами.

индексы α, β, α' и β' могут принимать значения 1 и 2 и характеризуют зарядовое состояние фермиона; спинорные индексы для простоты не выписываются; $\{A, B\} = AB + BA$. Дифференцируя в (7.1) по x и интегрируя затем по y, получим [1]

$$\langle p_\lambda q_\mu | S | p'_{\lambda'} q'_{\mu'} \rangle = (2\pi)^4 \delta(p + q - p' - q') \times$$
$$\times\, i \int dx \exp[-ipx]\, \bar{v}(p) < q_\mu, \quad \alpha | T \{f_\alpha(x), \bar{f}_{\beta'}(0)\} -$$
$$- i\delta(x_0) \{f_\alpha(x), \psi_{\beta'}(0)\} | q'_\mu, \beta' > v^{\lambda'}(p'), \quad (7.2)$$

где

$$f_\alpha(x) = L_x \psi_\alpha(x), \qquad \bar{f}_\beta(0) = \bar{\psi}_\beta(0) \bar{L}_0.$$

В дальнейшем мы будем опускать множитель $(2\pi)^4 \delta\,(p + q - p' - q')$. Член $\sim \delta\,(x_0)$ в псевдоскалярной мезонной теории в случае рассеяния вперед ($p = p'$, $q = q'$) равен нулю [2].

Для рассеяния вперед имеем (опуская член $\sim \delta\,(x_0)$ и переходя в систему, где покоится фермион с импульсом q):

$$F^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(p, E) = i \int dx\, e^{-ipx} \bar{v}^\lambda(p) \langle \mu, \alpha | T \{f_\alpha(x) \bar{f}_{\beta'}(0)\} | \mu', \beta' \rangle v^{\lambda'}(p). \quad (7.3)$$

В этой системе благодаря инвариантности относительно пространственных отражений

$$F^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(-p, E) = F^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(p, E), \quad (7.4)$$

т. е. матричный элемент зависит от энергии падающего фермиона. Для упрощения записи мы временно отвлекаемся от зарядовых индексов. Вместо $F^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E)$ удобно рассматривать величину

$$M^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E) = i \int \cos \mathrm{px}\, e^{iEx_0} \eta(x_0) f^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E, \mathrm{x})\, d^4x, \quad (7.5)$$

где

$$f^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E, \mathrm{x}) = \langle \mu | \{v^\lambda f(\mathrm{x}); \bar{f}(0) v^{\lambda'}\} | \mu' \rangle; \quad \eta(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_0 > 0 \\ 0 & \text{при } x_0 < 0, \end{cases}$$

которая совпадает с $M^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E)$ при $E > M$. Разобьем $M^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E)$ на действительную и мнимую части:

$$M^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E) = D^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E) + iA^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E); \quad (7.6)$$

$$D^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E) = i \int \cos \mathrm{px} e^{iEx_0} \varepsilon(x_0) f^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E, \mathrm{x})\, d^4x, \quad (7.7)$$

$$A^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E) = \int \cos \mathrm{px} e^{iEx_0} f^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda'}(E, \mathrm{x})\, d^4x. \quad (7.8)$$

Представим $D\,(E)$ и $A\,(E)$ в виде:

$$D(E) = D^{(1)}(E) + D^{(2)}(E), \qquad A(E) = A^{(1)}(E) + A^{(2)}(E),$$

где $D^{(1)}(E)$, $A^{(1)}(E)$ — четные и $D^{(2)}(E)$, $A^{(2)}(E)$ — нечетные функции от E.

---

[1] При выводе этого соотношения предполагается, во-первых, инвариантность относительно пространственно-временных смещений $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ и, во-вторых, существование полной системы векторов с положительной энергией.

[2] В общем случае этот член можно также не учитывать, поскольку в дисперсионные соотношения входит разность действительных частей амплитуды рассеяния вперед при двух различных энергиях.

Из требования причинности ($f_{\lambda\lambda'}(E, x) \equiv 0$ при $x^2 > 0$) находим:

$$D^{(1)}(E) - D^{(1)}(E_0) = \frac{2(E^2 - E_0^2)}{\pi} P \int_0^\infty \frac{E' A^{(1)}(E')\, dE'}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - E_0^2)}, \tag{7.9}$$

$$\frac{D^{(2)}(E)}{E} - \frac{D^{(2)}(E_0)}{E_0} = \frac{2(E^2 - E_0^2)}{\pi} P \int_0^\infty \frac{A^{(2)}(E')\, dE'}{(E'^2 - E^2)(E'^2 - E_0^2)}.$$

Таким образом, соотношения, полученные М. Гольдбергером [32], носят универсальный характер [1].

Различия проявляются при физическом истолковании величин $A^{(i)}(E)$ и $D^{(i)}(E)$, входящих в (7.9). В случае рассеяния нуклона на нуклоне $D^{(1)}(E)$ и $A^{(1)}(E)$ представляют собой сумму, а $D^{(2)}(E)$ и $A^{(2)}(E)$ — разность соответственно действительных и мнимых частей амплитуд рассеяния вперед нуклона на нуклоне и антинуклона на антинуклоне.

В самом деле, по определению,

$$D^{(1),(2)}(E) = \frac{1}{2}(D_+(E) \pm D_+(-E));$$

$$A^{(1),(2)}(E) = \frac{1}{2}(A_+(E) \mp A_+(-E)), \tag{7.10}$$

где значок плюс показывает, что величины относятся к рассеянию нуклон — нуклон. Нетрудно показать (импульс $\mathbf{p}$ направляем по оси z), что [2]

$$v^\lambda(-E) = iV^\nu(E) S_{\nu\lambda}, \tag{7.11}$$

причем $V^\nu(E)$ — спинор, зарядово-сопряженный к $v(\bar{E})$, а матрица $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Учтя (7.11), получаем окончательно [3]

$$\begin{aligned} D^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda',+}(-E) &= S_{\lambda\nu} D^{\mu\mu'}_{\nu\nu',-}(E) S_{\nu'\lambda'}, \\ A^{\mu\mu'}_{\lambda\lambda',+}(-E) &= -S_{\lambda\nu} A^{\mu\mu'}_{\nu\nu',-}(E) S_{\nu'\lambda'}, \end{aligned} \tag{7.12}$$

где значок минус показывает, что матричные элементы относятся к рассеянию антинуклон — нуклон.

Таким образом, матричный элемент рассеяния нуклон — нуклон для отрицательных энергий удается выразить согласно (7.12) через матричный элемент антинуклон — нуклон для положительной энергии, тем самым получают определенный физический смысл соотношения (7.10).

В изотопическом пространстве связь между $D_+(-E)$, $A_+(-E)$ и $D_-(E)$, $A_-(E)$ имеет вид [4] (см. также [32]):

$$D^{\alpha\alpha'}_{\beta\beta',+}(-E) = D^{\alpha\alpha'}_{\beta\beta',-}(E); \qquad A^{\alpha\alpha'}_{\beta\beta',+}(-E) = -A^{\alpha\alpha'}_{\beta\beta',-}(E). \tag{7.13}$$

Следовательно, например, сумма амплитуд рассеяния вперед протон — протон и антипротон — протон будет четной (а разность — нечетной)

---

[1] Они справедливы, если интегралы в правых частях (7.9) сходятся.

[2] $v^\lambda(-E)$ — спинор, получающийся из $v^\lambda(E)$ формальной заменой всюду (включая нормировку) E на $-E$.

[3] Так как матричный элемент рассеяния антинуклон — нуклон определяется аналогично (7.2), только со знаком минус [т. е. вместо $\eta(x)$ в (7.5) надо писать $\eta(-x)$]

[4] Направление поляризаций надо выбирать при этом в соответствии с (7.12).

функцией энергии. Аналогичными свойствами четности обладает сумма (разность) амплитуд протон — нейтрон и антипротон — нейтрон (если в начале и в конце процесса покоился нейтрон) и т. д. В области $M \leqslant E < \infty$ величины $A_{\pm}(E)$ можно связать с полным сечением соответствующего процесса

$$A^{\mu\varkappa}_{\lambda\lambda,\,\pm}(E) = \frac{p}{4\pi}\,\sigma^{\mu\lambda}_{\pm}(E). \tag{7.14}$$

В области $0 \leqslant E < M$ (в отличие от случая рассеяния мезон — нуклон, где в области $0 \leqslant w < \mu$ вносит вклад только одно состояние с энергией $w = \mu^2/2M$) мы имеем целый спектр состояний, включая реальное связанное состояние — дейтрон. В самом деле, из законов сохранения и вида $A_{\pm}(E)$ нетрудно убедиться, что в мнимую часть $A_{+}(E)$ в этой области энергий вносят вклад:

1) одномезонное состояние с энергией $E_n = \mu^2/2M$;

2) в области $0 \leqslant E \leqslant M - 2\mu^2/M$ — состояние с числом мезонов n, меняющихся в пределах $2 \leqslant n \leqslant \sqrt{2M/\mu}$;

3) дейтронное состояние — для рассеяния нейтрон — протона ($E_n = M - \varepsilon$, где ε — энергия связи дейтрона).

Что касается $A_{-}(E)$, то в нее в области $0 \leqslant E \leqslant M - 2\mu^2/M$ вносят вклад состояния с числом мезонов n, меняющихся в пределах $2 \leqslant n \leqslant 2M/\mu$.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что вклад всех указанных состояний в области $0 \leqslant E < M$ удается связать с физическими величинами или выразить через известные физические постоянные, а именно:

1) вклад одномезонного состояния можно выразить через константу псевдоскалярного взаимодействия f;

2) дейтронного состояния — через энергию связи дейтрона ε;

3) вклады всех других состояний в области $0 \leqslant E \leqslant M - 2\mu^2/M$ — через аналитическое продолжение аннигиляционной части полного сечения взаимодействия нуклон — антинуклон.

С учетом всех этих замечаний можно получить из (7.9) следующее дисперсионное соотношение [31, 34, 35]:

$$D_{+}(E) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{M}\right)D_{+}(M) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{M}\right)D_{-}(M) =$$
$$= \frac{p^2}{4\pi^2}\int\limits_M^\infty \frac{dE'}{p'}\left\{\frac{\sigma_{+}(E')}{E'-E} + \frac{\sigma_{-}(E')}{E+E'}\right\} + \left(\frac{2f^2}{\mu^2}\right)\frac{p^2\delta_{\lambda\mu}(2-\delta_{\alpha\alpha'})}{M-\mu^2/2M-E} + C_{\lambda\mu}\frac{p^2(1-\delta_{\alpha\alpha'})}{E+\varepsilon-M} +$$
$$+ \frac{p^2}{4\pi^2}\int\limits_0^{M-2\mu^2/M}\frac{idE'}{p'}\left\{\frac{\sigma_1(E')}{E'+E} + \frac{\sigma_2(-E')}{E'-E}\right\}; \tag{7.15}$$

$$D_{-}(E) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E}{M}\right)D_{-}(M) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{M}\right)D_{+}(M) =$$
$$= \frac{p^2}{4\pi^2}\int\limits_M^\infty \frac{dE'}{p'}\left\{\frac{\sigma_{-}(E')}{E'-E} + \frac{\sigma_{+}(E')}{E'+E}\right\} + \left(\frac{2f^2}{\mu^2}\right)\frac{p^2\delta_{\lambda\mu}(2-\delta_{\alpha\alpha'})}{M-\mu^2/2M+E} -$$
$$- C_{\lambda\mu}\frac{p^2(1-\delta_{\alpha\alpha'})}{E-\varepsilon+M} + \frac{p^2}{4\pi^2}\int\limits_0^{M-2\mu^2/M}\frac{idE'}{p'}\left\{\frac{\sigma_1(E')}{E'-E} + \frac{\sigma_2(-E')}{E'+E}\right\}, \tag{7.16}$$

где поляризационные и зарядовые индексы у величин $D_\pm(E)$, $\sigma_\pm(E)$, $\sigma_{1,2}(E)$ выбираются в соответствии с формулами (7.12)—(7.13). Константу $C_{\lambda\mu}$ в (7.15) и (7.16) в хорошем приближении можно выразить через энергию связи ε дейтрона:

$$C_{\lambda\mu} \approx \delta_{\lambda\mu}\varepsilon^{-1/2}M^{-3/2};$$

$\sigma_1(E)$ — полное сечение аннигиляции при столкновении нуклона с антинуклоном на число мезонов от двух до $2\frac{M}{\mu}$, аналитически продолженное в область $E<\mu$; $\sigma_2(-E)$ — полное сечение аннигиляции на число мезонов от двух до $\sqrt{2M/\mu}$, аналитически продолженное в область — $-E<E<0$.

2. Дисперсионное соотношение для произвольного угла рассеяния мезонов с нуклонами было найдено в работах [33, 34, 36, 37] и строго доказано в работе [33]. Это дисперсионное соотношение имеет наиболее простой вид в системе координат, где суммарный импульс падающего и рассеянного нуклона равен нулю:

$$(\mathbf{p}'+\mathbf{p}=0); \quad p\left(E=\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2},\quad 0,\ 0,\ |\mathbf{p}|\right);$$

$$k\left(k_0=\omega=\sqrt{\mathbf{p}^2+k_x^2+k_y^2+\mu^2},\quad k_x,\quad k_y,\quad -|\mathbf{p}|\right).$$

В этой системе координат дисперсионное соотношение имеет вид [37]:

$$D^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\ \omega,\ \lambda',\ \lambda)-D^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\ \omega_0,\ \lambda',\ \lambda)=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{2\omega' A^{(1)}_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\omega',\lambda',\lambda)\,d\omega}{(\omega'^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega_0^2)};$$

$$D_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\ \omega,\ \lambda',\ \lambda)-\frac{\omega}{\omega_0}D^{(2)}_{\alpha\beta}(\mathbf{p},\ \omega_0,\ \lambda',\ \lambda)=\frac{2\omega(\omega^2-\omega_0^2)}{\pi}\int_0^\infty\frac{A^{(2)}(\mathbf{p},\omega',\lambda',\lambda)\,d\omega'}{(\omega'^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega_0^2)}. \tag{7.17}$$

Из (7.17) получаем следующую связь между мнимой ($A_\pm$) и действительной ($D_\pm$) частями положительного (отрицательного) мезона на протоне без изменения поляризации нуклона:

$$D_+(\omega,\ \mathbf{p})-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega}{\omega_0}\right)D_+(\omega,\mathbf{p})-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)D_-(\omega_0,\ \mathbf{p})=$$
$$=\frac{2(\omega^2-\omega_0^2)}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega' d\omega'}{\omega'^2-\omega_0^2}\left[\frac{A_+(\omega',\mathbf{p})}{\omega'-\omega}+\frac{A_-(\omega',\mathbf{p})}{\omega'+\omega}\right];$$

$$D_-(\omega,\ \mathbf{p})-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega}{\omega_0}\right)D_-(\omega_0,\mathbf{p})-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)D_+(\omega_0,\ \mathbf{p})=$$
$$=\frac{2(\omega^2-\omega_0^2)}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\omega'}{\omega'^2-\omega_0^2}\left[\frac{A_-(\omega',\mathbf{p})}{\omega'-\omega}+\frac{A_+(\omega',\mathbf{p})}{\omega'+\omega}\right]. \tag{7.18}$$

Поскольку мнимая часть амплитуды берется под интегралом при фиксированной энергии нуклона и переменной энергии мезона, то непосредственную связь с физическими фазами рассеяния имеют лишь те $A(\omega', p)$, для которых ω' больше энергии порога $\omega' \geqslant \omega_0=\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2}$. В области энергии от 0 до ω_0, кроме одночастичного («нейтронного») состояния, в интегралы (7.18) вносят вклад целый спектр состояний с энергией от $(m\mu-p^2)/\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}^2}$ до ω_0 («ненаблюдаемая» область). Вклад одночастичного состояния может быть вычислен точно, так как он равен

$$-\pi\left(\bar{u}(p')\Gamma(p',k')u(p'-k')\bar{u}(p'-k')\Gamma(p'-k',p-k'-p)u(p)\right)\times \\ \times\delta\left(u'-\frac{\mu^2+2\mathbf{p}^2}{2(m^2+\mathbf{p}^2)^{1/2}}\right).$$

При этом $\Gamma(p, s)\sim g\gamma_5\tau$, поскольку здесь $p^2=-m^2$, $s^2=-\mu^2$.

Итак, из общих требований теории можно установить спектральную связь действительных и мнимых частей матричных элементов, а из требования унитарности матрицы в принципе установить область аналитичности матричных элементов.

Нахождение спектральных представлений для всевозможных функций Грина существенно не только для дисперсионного метода, но и в рамках обычных уравнений для функций Грина.

Дело в том, что из-за наличия полюсов решения системы зацепляющихся уравнений для функций Грина неоднозначны, что в особенности касается случая наличия связанных состояний. Правила обхода полюсов устанавливаются при этом из спектральных представлений для функций Грина.

Таким образом, система уравнений для функций Грина, эквивалентная динамическому принципу, полностью определена лишь тогда, когда она сформулирована как система уравнений для спектральных плотностей функций Грина.

По-видимому, разумный способ обрыва системы зацепляющих уравнений для функций Грина также может быть сформулирован без противоречия с общими требованиями теории (если лагранжевый метод непротиворечив) только в рамках системы зацепляющихся уравнений для спектральных плотностей функций Грина (существенно при этом не нарушить перекрестную симметрию теории).

§ 8. Решение функционального уравнения для S-матрицы в виде континуального интеграла [2]

В настоящем параграфе[1] рассмотрим взаимодействие нуклонов с мезонами. Будем искать решение системы уравнений для производящего функционала $Z=(\Phi(-\infty)S(\infty)\Phi_0(-\infty))=(\Phi_0(+\infty),\Phi_0(-\infty))$. Эта система имеет вид:

$$\left\{\gamma_\mu\partial_\mu+m-g\gamma\frac{\delta}{\delta I(x)}\right\}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)}=i\eta(x)Z; \qquad (8.1)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta\eta}\left\{-\gamma_\mu\partial_\mu+m-g\gamma\frac{\delta}{\delta I(x)}\right\}=i\bar{\eta}(x)Z; \qquad (8.2)$$

$$(-\partial_\nu^2+\mu^2)\frac{\delta Z}{\delta I(x)}=iI(x)Z-\operatorname{Sp}g\gamma\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(x)\,\delta\eta(x)}. \qquad (8.3)$$

[1] Близкие результаты несколько другими способами получены И. М. Гельфандом и Р. А. Минлосом [5], С. Эдварсом и Р. Пайерлсом [39], Н. Н. Боголюбовым [40], Ю. А. Гольфандом [41], К. Симанзиком [6], Н. П. Клепиковым [7], П. Матьюзом и А. Саламом [42], И. М. Халатниковым [43].

При этом должны выполняться следующие условия:

а) из унитарности S-матрицы следует ограниченность Z при любых внешних источниках;

б) из определения Z следует, что

$$\text{при } \eta = \bar{\eta} = I = 0 \quad Z = 1, \quad \frac{\delta Z}{\delta \eta} = \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}} = \frac{\delta Z}{\delta I} = 0;$$

в) полюса в функции Грина уравнений (8.1) — (8.3) обходятся по правилам Фейнмана.

Удобно в уравнениях (8.1) — (8.3) перейти к импульсному представлению, тогда эти уравнения приобретают вид:

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m)\frac{\delta Z}{\delta \eta (p)} - \frac{g}{(2\pi)^2}\gamma \int \frac{\delta^2 Z}{\delta I(p-k)\,\delta\bar{\eta}(k)} d^4 k = i\eta(p) Z; \qquad (8.4)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(p)}(i\gamma_\mu p_\mu + m) - \frac{g}{(2\pi)^2}\int \frac{\delta^2 Z}{\delta I(k-p)\,\delta\eta(k)} d^4 k \gamma = i\bar{\eta}(p) Z; \qquad (8.5)$$

$$(k^2+\mu^2)\frac{\delta Z}{\delta I(-k)} = iI(k) Z - \frac{g}{(2\pi)^2}\mathrm{Sp}\int \gamma \frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}(p)\,\delta\eta(q)}\delta(p-q-k)\, d^4 p d^4 q. \qquad (8.6)$$

Для решения системы уравнений (8.4) — (8.5) применим метод И. М. Гельфанда и Р. А. Минлоса [5] к мезонному полю, согласно которому следует перейти к решетке в импульсном пространстве, тогда ищем решение для Z в виде

$$Z = c\int e^{i\int I(k) a(k) d^4 k} R(\eta, \eta, a(k_1)\ldots a(k_n)) \prod_k da(k), \qquad (8.7)$$

где c — постоянная, которая выбирается из условия при $Z = 1$; $\eta = \bar{\eta} = I = 0$.

Из (8.4) и (8.7) получим систему уравнений для определения R:

$$\int \left\{(i\gamma_\mu p_\mu + m)\delta(p-k) - \frac{ig}{(2\pi)^2}\gamma a(p-k)\right\}\frac{\delta R}{\delta\bar{\eta}(k)} d^4 k = i\eta(p) R; \qquad (8.8)$$

$$\frac{\delta R}{\delta \eta(p)}(i\gamma_\mu p_\mu + m) - \frac{ig}{(2\pi)^2}\int a(k-p)\frac{\delta R}{\delta\eta(k)}\gamma d^4 k = i\bar{\eta}(p) R; \qquad (8.9)$$

$$i(k^2+\mu^2) a(-k) R = -\frac{\delta R}{\delta a(k)} - \frac{g}{(2\pi)^2}\mathrm{Sp}\int \gamma \frac{\delta^2 R\,\delta(p-q-k)}{\delta\eta(p)\,\delta\bar{\eta}(q)} d^4 p d^4 q, \qquad (8.10)$$

где $a_k = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-ikx} a(x) d^4 x$.

Решение уравнений (8.8) и (8.9) можно представить в виде:

$$\frac{\delta R}{\delta\bar{\eta}(p)} = i\int G(p, k\,|\,a)\,\eta(k)\, d^4 k R; \qquad (8.11)$$

$$\frac{\delta R}{\delta\eta(p)} = i\int \bar{\eta}(k)\, G(k, p\,|\,a)\, d^4 k R, \qquad (8.12)$$

где $G(p, k\,|\,a)$ — функция Грина нуклона во внешнем поле a и удовлетворяет уравнению

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m) G(p, k\,|\,ga) - \frac{ig}{(2\pi)^2}\gamma\int a(p-k') G(k', k\,|\,a)\, d^4 k' = \delta(p-k). \qquad (8.13)$$

Из (8.11) и (8.12) следует

$$R = R_1(a)\exp i\int \bar{\eta}(p)\, G(p, k\,|\,a)\,\eta(k)\, d^4 p d^4 k, \qquad (8.14)$$

где функционал R_1 зависит лишь от a и не зависит от η и $\bar{\eta}$. После подстановки (8.14) в (8.10) получим для R_1 уравнение

$$i(k^2+\mu^2)\,a(-k)\,R_1 = \\ = -\frac{\delta R_1}{\delta a(k)} - \frac{ig}{(2\pi)^2}\operatorname{Sp}\gamma\int G(p, q\,|\,ga)\,\delta(p-q-k)\,d^4p d^4q R_1, \tag{8.15}$$

откуда следует

$$R_1 = \exp\int\Big\{-\frac{i}{2}a(k)(k^2+\mu^2)a(-k) - \\ -\frac{i}{(2\pi)^2}\operatorname{Sp}\gamma\int\int_0^g d\lambda G(p, q\,|\,\lambda a)\,a(k)\,\delta(p-q-k)\,d^4pd^4q\Big\}\,d^4k. \tag{8.16}$$

Следовательно, согласно (8.14), (8.16), (8.7) для Z имеем [2]

$$c^{-1}Z = \int\exp\Big\{\int\Big[iI(k)\,a(k) - \frac{i}{2}a(k)(k^2+\mu^2)\,a(-k) + \\ + i\int\bar{\eta}(p)\,G(p, k\,|\,ga)\,\eta(p)\,d^4p - \\ -\frac{i}{(2\pi)^2}\operatorname{Sp}\gamma\int\int_0^g d\lambda G(p, q\,|\,\lambda a)\,a(k)\,\delta(p-q-k)\,d^4pd^4q\Big]\,d^4k\Big\}\prod_k da(k), \tag{8.17}$$

где $1/c$ равно значению правой части (8.17) при $\eta = \bar{\eta} = I = 0$. Чтобы найти функцию Грина системы n мезонов и m нуклонов, достаточно взять от Z $2n$ функциональных производных по I и m функциональных производных по η и $\bar{\eta}$.

Например, функция Грина системы мезон — нуклон имеет вид

$$G_{12}(k_1k_2k_3k_4) = (\Phi_0(-\infty)\,T\,[\bar{\psi}(k_1)\,\psi(k_2)\,\varphi(k_3)\,\varphi(k_4)]\,\Phi_0(-\infty)). \tag{8.18}$$

Согласно (1.12), G выражается через Z формулой

$$G_{12}(k_1k_2k_3k_4) = (-i)^4\frac{\delta^4 Z}{\delta I(k_4)\,\delta I(k_3)\,\delta\eta(k_2)\,\delta\bar{\eta}(k_1)}. \tag{8.19}$$

Полученные результаты легко могут быть перенесены на случай любого взаимодействия ферми- и бозе-частиц.

§ 9. Операторное решение задачи взаимодействия двух квантованных полей [44]

В этом параграфе мы рассмотрим операторное решение функциональных уравнений (8.1) для производящего функционала Z. Эти уравнения имеют вид [1]:

$$\Big\{\gamma_\mu\partial_\mu + m - g\gamma\frac{\delta}{\delta I(x)}\Big\}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)} = i\eta(x)\,Z; \tag{9.1}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta\eta(x)}\Big\{-\gamma_\mu\partial_\mu + m - g\gamma\frac{\delta}{\delta I(x)}\Big\} = -i\bar{\eta}(x)\,Z; \tag{9.2}$$

$$\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} + \varkappa^2\Big)\frac{\delta Z}{\delta I(x)} = iI(x)\,Z - g\operatorname{Sp}\gamma\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(x)\,\delta\bar{\eta}(x)}, \tag{9.3}$$

[1] В этом параграфе нам удобно определить функциональные производные по η и $\bar{\eta}$ в смысле «слева» [2].

где $I(x)$ — источник мезонного поля; η и $\bar\eta$ — антикоммутирующие источники нуклонного поля. При этом

$$Z=1, \qquad \frac{\delta Z}{\delta \eta}=\frac{\delta Z}{\delta \bar\eta}=\frac{\delta Z}{\delta I}=0, \tag{9.3a}$$

когда $I=\eta=\eta=0$.

Решение системы уравнений (9.1) — (9.3) для случая свободных полей ($g=0$) тривиально и имеет вид

$$Z(g=0)=Z_0=\exp i\int\left\{\bar\eta(x)S_F(x-y)\eta(y)+\frac{I(x)}{2}D_F(x-y)I(y)\right\}d^4x d^4y, \tag{9.4}$$

где

$$S_F(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ip(x-y)}}{i\gamma_\mu p_\mu+m}d^4p,\quad D_F(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+\varkappa^2}d^4p.$$

Для случая $g\neq 0$ решение будем искать в виде

$$Z=AZ_0, \tag{9.5}$$

где A — оператор, зависящий от функциональных производных $\frac{\delta]}{\delta I}$, $\frac{\delta}{\delta\eta}$, $\frac{\delta}{\delta\bar\eta}$.

После подстановки (9.5) в (9.1) — (9.3) получим следующие соотношения для определения неизвестного оператора A:

$$[A, \bar\eta(x)]=iAg\frac{\delta}{\delta I(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma; \tag{9.6}$$

$$[A, \eta(x)]=-iAg\gamma\frac{\delta}{\delta I(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}; \tag{9.7}$$

$$[A, I(x)]=iAg\,\mathrm{Sp}\,\gamma\frac{\delta^2}{\delta\eta(x)\delta\bar\eta(x)}. \tag{9.8}$$

Из (9.6) — (9.8) следует

$$A=\exp\int\left\{ig\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\bar\eta_\beta(x)}\frac{\delta}{\delta I(x)}d^4x\right\}. \tag{9.9}$$

Окончательно, учитывая (9.4), (9.5), получим для Z решение [44, 45]:

$$cZ=\exp ig\int\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\gamma\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\frac{\delta}{\delta I(x)}d^4x\times$$
$$\times\exp i\left\{\int\bar\eta(x)S_F(x-y)\eta(y)+\frac{I(x)D_F(x-y)I(y)}{2}\right\}d^4xd^4y, \tag{9.10}$$

где c — постоянная, равная значению правой части (9.10) при $\eta=\bar\eta=I=0$.

Легко убедиться, что в общем случае любого взаимодействия имеет место следующее правило нахождения оператора A в решении (9.5):

$$A=\exp iL_{\text{вз}}, \tag{9.11}$$

где $L_{вз}$ — лагранжиан взаимодействия, в котором $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$, $\varphi(x)$ заменены соответственно операторами[1]

$$-i\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)}, \quad i\frac{\delta}{\delta\eta(x)}, \quad -i\frac{\delta}{\delta I(x)}. \tag{9.12}$$

В формуле (9.10) можно легко выполнить функциональное дифференцирование по переменным одного из взаимодействующих полей. Так, используя свойства оператора смещения в пространстве $I(x)$, легко видеть, что после выполнения дифференцирования по мезонным переменным получим

$$cZ = \exp i\int\left\{\left(I(x) + ig\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}_\beta(x)}\right)\frac{D_F(x-y)}{2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(I(y) + ig\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}_\beta(x)}\right)\right\}d^4xd^4y\exp i\int\overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\,d^4xd^4y. \tag{9.13}$$

Из (9.10) можно также исключить функциональные производные по нуклонным переменным (η и $\overline{\eta}$). Однако проще получать такие решения непосредственно из системы (9.1) — (9.3) в виде

$$Z = \frac{1}{c}R\left(\eta, \overline{\eta}, \frac{\delta}{\delta I}\right)\exp\left\{i\int I(x)\frac{D_F(x-y)}{2}I(y)\,d^4xd^4y\right\}, \tag{9.14}$$

где c — постоянная, которая определяется из условия (9.3а).

Подставив (9.14) в (9.1) и (9.2), получим

$$\frac{1}{R}\frac{\delta R}{\delta\overline{\eta}(x)} = i\int G\left(x, y\,\middle|\,\frac{\delta}{\delta I}\right)\eta(y)\,d^4y; \tag{9.15}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\delta R}{\delta\eta(y)} = -i\int\overline{\eta}(x)G\left(x, y\,\middle|\,\frac{\delta}{\delta I}\right)d^4x, \tag{9.16}$$

где $G\left(x, y\,\middle|\,\frac{\delta}{\delta I}\right)$ — функция Грина электрона во внешнем поле $a(x)$ с последующей заменой $a(x)$ через $\frac{\delta}{\delta I(x)}$, причем $G(x, y\,|\,a)$ удовлетворяет уравнению

$$[\gamma_\mu\partial_\mu + m - ig\gamma a(x)]\,G(x, y\,|\,a) = \delta(x-y). \tag{9.17}$$

Из (9.15) — (9.16) следует

$$R = \exp i\int\overline{\eta}(x)G\left(x, y\,\middle|\,\frac{\delta}{\delta I}\right)\eta(y)\,d^4xd^4yR_1\left(\frac{\delta}{\delta I}\right). \tag{9.18}$$

Оператор R_1 зависит лишь от $\frac{\delta}{\delta I}$ и определяется из уравнения (9.3). После подстановки (9.18) в (9.3) получим

$$[R, I] = -g\,\mathrm{Sp}\,\gamma\left[G\left(x, x\,\middle|\,\frac{\delta}{\delta I}\right) - i\int G\left(x, y\,\middle|\,\frac{\delta}{\delta I}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\eta(y)\,d^4y\int\overline{\eta}(y)G\left(y, x\,\middle|\,\frac{\delta}{\delta I}\right)d^4y\right]R. \tag{9.19}$$

---

[1] В том случае, когда производные по $\overline{\eta}$ понимаются в смысле «слева», а производные по η — в смысле «справа», мы получаем тот же окончательный результат, так как при этом необходимо в $L_{вз}$ заменить

$$\psi\to\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}, \quad \overline{\psi}\to\frac{\delta}{i\delta\eta}, \quad \varphi\to\frac{\delta}{i\delta I},$$

предварительно переставив операторы ψ и $\hat{\psi}$ так, чтобы ψ стояло слева от $\overline{\psi}$.

Учитывая (9.18), получим

$$[R_1, I] = -R_1 g \,\mathrm{Sp}\, \gamma G\left(x, x \,|\, g \frac{\delta}{\delta I}\right),$$

откуда для R_1 имеем[1]

$$R_1 = \exp\left[-\int\int_0^g dg' \,\mathrm{Sp}\, \gamma G\left(x, x \,\middle|\, g' \frac{\delta}{\delta I}\right) \frac{\delta}{\delta I(x)}\right] d^4x. \tag{9.20}$$

Окончательно из (9.14), (9.18), (9.20) имеем

$$cZ = \exp i \int \bar{\eta}(x) G\left(x, y \,|\, g \frac{\delta}{\delta I}\right) \eta(y)\, d^4x d^4y \times$$
$$\times \exp - \int\int_0^g \mathrm{Sp}\, \gamma G\left(x, x \,|\, g' \frac{\delta}{\delta I}\right) dg' \frac{\delta}{\delta I(x)} d^4x \times$$
$$\times \exp \int iI(x) \frac{D_F(x, y)}{2} I(y)\, d^4y d^4x, \tag{9.21}$$

где c — нормировочная постоянная; она равна значению правой части (9.21) при $\eta = \bar{\eta} = I = 0$.

С помощью (1.17) и (1.18) легко написать операторное решение и для $S(I, \eta)$-матрицы при наличии источников:

$$S(I, \eta) = :\exp \Omega: Z|_{I=\eta=0} = Z[I(x) + (\mu_e^2 - \partial_\mu^2)\varphi_{in}(x),$$
$$\bar{\eta}(x) + \bar{\psi}_{in}(x)(-\gamma_\mu\partial_\mu + m), \eta(x) + (\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi_{in}(x)]. \tag{9.22}$$

Обычная S-матрица получается из $S(I, \eta)$ в предельном случае, когда $I = \eta = \bar{\eta} = 0$.

Разлагая в ряд по g^2 операторное или континуальное решение, получим все фейнмановские диаграммы теории возмущений. Однако ценность полученного решения вовсе не заключается лишь в компактности записи всех диаграмм Фейнмана, а в принципиальной возможности построения методов, отличных от теории возмущений.

Заметим, что при построении таких методов мы сталкиваемся с двумя математическими трудностями:

1) необходимо найти решение для функции Грина в произвольном внешнем поле;

2) континуальные интегралы вычисляются элементарно только лишь для очень узкого класса функций (гауссовского типа).

[1] Заметим, что уравнение (9.17) может быть решено символически в виде

$$G\left(x, y \,\middle|\, \frac{\delta}{\delta I}\right) = \frac{S_F}{1 - gS_F\gamma \frac{\delta}{\delta I}},$$

тогда

$$\int_0^g dg' \,\mathrm{Sp}\, \gamma G\left(x, x \,\middle|\, g' \frac{\delta}{\delta I}\right) \frac{\delta}{\delta I} = \ln\left(1 - gS_F\gamma \frac{\delta}{\delta I}\right),$$

где ln необходимо понимать также символически, в виде суммы бесконечного матричного ряда по заряду g.

Можно, однако, поставить задачу более узко, а именно: для интересующих нас функций Грина в определенной энергетической области найти хорошую аппроксимацию для функций Грина во внешнем поле и с помощью этой функции Грина получить асимптотическое поведение интересующих нас величин в искомой области энергии. В последующих двух параграфах мы убедимся, что в ряде случаев указанную программу удается осуществить.

При этом в тех случаях, когда удается найти решение для функций Грина во внешнем поле, одновременно удается провести также и функциональное интегрирование (дифференцирование).

§ 10. Зависимость функций Грина от продольной части электромагнитного поля [10]

Рассмотрим взаимодействие электронов с электромагнитным полем производной калибровки [1]. Разобьем поле A_μ на поперечную и продольную (в четырехмерном смысле) части:

$$A_\mu = A_\mu^t + A_\mu^l = A_\mu^t + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}, \tag{10.1}$$

где

$$\varphi = \int \frac{ik_\nu A_\nu(k)}{k^2} e^{ik_\mu x_\mu} d^4k. \tag{10.2}$$

Лагранжиан взаимодействия с внешним источником поля A_μ тогда примет вид

$$\int I_\mu A_\mu d^4x = \int I_\mu^t(x)\, A_\mu^t(x)\, d^4x + \int \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} I_\mu^l d^4x = \int I_\mu^t(x)\, A_\mu^t(x)\, d^4x - \int \varphi j\, d^4x, \tag{10.3}$$

где

$$j = \frac{\partial I_\mu^l(x)}{\partial x_\mu}.$$

Легко убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$\begin{aligned}\int \{I_\mu(x)\, D_{\mu\nu}(x-y)\, I_\mu(y)\}\, d^4x d^4y &= \\ &= \int \{I_\mu^t(x)\, D_{\mu\nu}^t(x-y)\, I_\nu^t(y) + I_\mu^l(x)\, D_{\mu\nu}^l(x-y)\, I_\nu^l(y)\}\, d^4x\, d^4y = \\ &= \int \{I_\mu^t(x)\, D_{\mu\nu}^t(x-y)\, I_\nu^t(y) + j(x)\, \Delta^l(x-y)\, j(y)\}\, d^4x\, d^4y,\end{aligned} \tag{10.4}$$

где

$$D_{\mu\nu}^l(x-y) = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \Delta^l(x-y) = +\int k_\mu k_\nu \Delta^l(k)\, e^{ik(x-y)}\, d^4k. \tag{10.5}$$

В частности, для свободного поля $\Delta^l = \frac{1}{(k^4 - i\varepsilon k^2)}$. Используя операторное решение или решение в виде континуального интеграла, можно точно оттрансформировать продольную часть электромагнитного взаимодействия и получить явную зависимость всех функций Грина от этой продольной части. Замкнутое операторное решение для производящего функционала

[1] Общий метод отделения продольной части был развит в работах Ландау и Халатникова [12], автора [10], Боголюбова и Ширкова [3].

в этом случае может быть записано в виде

$$cZ = \exp\int\left\{-\int_0^e de' \operatorname{Sp}\gamma_\mu G\left(x, x \mid \frac{e'\delta}{\delta I}\right)\frac{\delta}{\delta I_\mu(x)} + \right.$$

$$\left. + i\int\overline{\eta}(x) G\left(x, y \mid \frac{e\delta}{\delta I}\right)\eta(y)\, d^4y\right\} d^4x \exp\frac{i}{2}\int\{I^t_\mu(x) D^t_{\mu\nu}(x-y) \times$$

$$\times I^t_\nu(y) + I^l_\mu(x) D^l_{\mu\nu}(x-y) I^l_\nu(y)\}\, d^4x\, d^4y, \quad (10.6)$$

где функция Грина $G\left(x, y \mid \frac{\delta}{\delta y}\right)$ есть функция Грина электрона в произвольном внешнем поле A_μ, т. е. $G(x, y \mid A)$ $(A_\mu = A^t_\mu + A^l_\mu)$, с последующей заменой $iA \to \frac{\delta}{\delta I_\mu} = \left(\frac{\delta}{\delta I^t_\mu} + \frac{\delta}{\delta I^l_\mu}\right)$, точнее $iA^t_\mu \to \delta/\delta I^t_\mu$; $iA^l_\mu \to \delta/\delta I^l_\mu$. Функция Грина $G(x, y \mid A)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - ie\gamma_\mu\left(A^t_\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\right] G(x, x' \mid A) = \delta(x - x'). \quad (10.7)$$

Из (10.7) можно получить явную зависимость $G(x, x' \mid A)$ от продольного поля φ, а именно:

$$G(x, x' \mid A) = G(x, x' \mid ieA^t)\, e^{ie[\varphi(x)-\varphi(x')]}. \quad (10.8)$$

Следовательно,

$$G\left(x, x' \middle| \frac{\delta}{\delta I}\right) = G\left(x, x' \middle| e\frac{\delta}{\delta I^t}\right) e^{\left[\frac{\delta}{\delta j(x')} - \frac{\delta}{\delta j(x)}\right]^e}. \quad (10.9)$$

Из (10.9) видим, что $G\left(x, x \middle| \frac{\delta}{\delta I}\right)$ зависит лишь от $\frac{\delta}{\delta I^t}$ и не зависит от продольного поля.

Подставляя решение для G в (10.6),

$$Z = \exp\int -\left\{\int_0^e de' \operatorname{Sp}\left(\gamma_\mu G\left(x, x \mid e'\frac{\delta}{\delta I^t}\right)\frac{\delta}{\delta I^t_\mu(x)}\right) + \right.$$

$$\left. + \int\overline{\eta}(x) G\left(x, y \mid \frac{\delta}{\delta I^t}\right)\eta(y) \exp e\left[\frac{\delta}{\delta j(y)} - \frac{\delta}{\delta j(x)}\right] d^4y\right\} d^4x \times$$

$$\times \exp\frac{i}{2}\left\{\int I^t_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) I^t_\nu(y) + j(x)\Delta^l(x-y) j(y)\right\} d^4x d^4y. \quad (10.10)$$

Используя свойства оператора смещения, получим окончательное выражение [10]:

$$cZ = \exp\left\{-\iint_0^e de' \operatorname{Sp}\left(\gamma_\mu G\left(x, x' \mid e'\frac{\delta}{\delta I^t}\right)\frac{\delta}{\delta I^t_\mu(x)}\right) d^4x\right\} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^\infty \frac{i^k}{k!}\int dx_1 \ldots dx_k dx'_1 \ldots dx'_k \overline{\eta}(x_1) G\left(x_1; x'_1 \middle| \frac{\delta}{\delta I^t}\right)\eta(x'_1)\ldots$$

$$\ldots \overline{\eta}(x_k) G\left(x_k; x'_k \mid e\frac{\delta}{\delta I^t}\right)\eta(x'_k) \exp\frac{ie}{2}\left\{\sum_{(n, m)}^k e\left[\Delta^l(x_m - x_n) + \right.\right.$$

$$+ \Delta^l(x'_m - x'_n) - \Delta^l(x'_m - x_n) - \Delta^l(x_m - x'_n)] + 2\sum_{m=1}^k \int\left[\frac{\partial\Delta^l(x_m - z)}{\partial z_\mu} - \right.$$

$$-\frac{\partial\Delta^l(x_m'-z)}{\partial z_\mu}\Big] I^l_\mu(z)\,d^4z\Big\}\exp\frac{i}{2}\Big\{\int I^t_\mu(x)\,D^t_{\mu\nu}(x-y)\,I^t_\nu(y)+$$
$$+I^l_\mu(x)\,D^l_{\mu\nu}(x-y)\,I^l_\mu(y)\Big\}\,d^4x d^4y. \qquad (10.11)$$

Таким образом, всю зависимость от продольного поля удалось явно вычислить, остались лишь функциональные производные от поперечного поля. Функциональным дифференцированием по внешним источникам фотонного поля получим зависимость соответствующих функций Грина от продольного поля. В частности, отсюда получим [12, 10]

$$G(x,y)=G(x,y)_0\exp\{ie^2(\Delta^l(0)-\Delta^l(x-y))\};\quad \frac{\delta G(x,y)}{\delta I_\mu(z)}=\frac{\delta G(x,y)}{\delta I^t_\mu(z)}+$$
$$+\frac{\delta G(x,y)}{\delta I^l_\mu(z)}=\left(\frac{\delta G(x,y)}{\delta I^t_\mu(z)}\right)_0\exp ie^2\,(\Delta^l(0)-\Delta^l(x-y))+ieG(x-y)_0\times$$
$$\times\left[\frac{\partial\Delta^l(x-z)}{\partial z_\mu}-\frac{\partial\Delta^l(y-z)}{\partial z_\mu}\right], \qquad (10.12)$$

где индекс «нуль» означает, что данная величина берется при условии, что продольная часть взаимодействия полностью отсутствует. Из (10.8) следует, что $\frac{\delta G(x,x)}{\delta I_\mu(z)}$ не зависят от продольного поля, а потому никаким градиентным преобразованием нельзя ликвидировать бесконечность, обусловленную поперечной частью взаимодействия в поляризационном операторе (по той простой причине, что этот оператор не зависит от продольной части).

После того как в явном виде найдена зависимость от продольной части электромагнитного поля, асимптотика Ландау, Абрикосова и Халатникова получается с помощью общего решения (10.11) элементарным образом, а именно: необходимо в выражение $\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu G(x,x|A)$ подставить функцию Грина электрона во внешнем поле в первом приближении теории возмущений, т. е.

$$G(x,x\,|\,A^t)\approx ie\int G_0(x-y)\,\gamma_\mu A^t_\mu(y)\,G_0(y-x)\,d^4y. \qquad (10.13)$$

Переходя к импульсному представлению и заменяя $iA\to\frac{\delta}{\delta I}$, получим:

$$\int_0^e de'\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu\,G\left(x,x\,\Big|\,\frac{\delta}{\delta I^t}\right)\frac{\delta}{\delta I^t}\,d^4x\approx\frac{1}{2}\int\overset{0}{\Pi}_{\mu\nu}(k)\,\frac{\delta}{\delta I^t_\mu(k)}\,\frac{\delta}{\delta I^t_\nu(-k)}\,d^4k, \qquad (10.14)$$

где $\overset{0}{\Pi}_{\mu\nu}(k)$ — поляризационный оператор в первом приближении по e^2. Проведя перенормировку и функциональное дифференцирование, получим для $\langle s\rangle$ выражение (10.11) с той лишь разницей, что поляризационный оператор Π учтен в первом приближении. Это приводит к тому, что всюду функция распространения фотонов $D^t_{\mu\nu}$ заменяется на $D^+_{\mu\nu}$, где

$$D^+_{\mu\nu}=\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)[k^2-\Pi^0(k)]^{-1}.$$

При $k^2 \gg m^2$

$$D^+_{\mu\nu} = \frac{\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)}{k^2\left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\ln\frac{k^2}{m^2} - \frac{ie^2}{12\pi}\theta(-k^2-4m^2)\right]}. \tag{10.15}$$

Последовательным дифференцированием по внешним источникам получим все функции Грина в этом приближении.

§ 11. К вопросу об инфракрасной асимптотике в квантовой электродинамике

Функциональные методы § 8 и 9 дают принципиальную возможность нахождения точных функций Грина. Однако для этого необходимо знать функцию Грина в произвольном внешнем поле, тогда можно выполнить функциональное дифференцирование (интегрирование).

Найти функцию Грина в произвольном внешнем поле в общем случае не удается, однако удается найти приближенное решение, пригодное для исследования инфракрасной асимптотики для функций Грина в квантовой электродинамике. Для исследования инфракрасной асимптотики для функции Грина необходимо найти асимптотику $G(x, x'|a)$ при импульсах $i\hat{p} \sim -m$.

Рассмотрим функцию Грина электрона в произвольном внешнем электромагнитном поле. Уравнение для $G(x, y\,|\,a)$ имеет вид

$$(\gamma_\mu\partial_\mu + m - ie\gamma_\mu a_\mu(x))\,G(x, x'\,|\,a) = \delta(x - x'). \tag{11.1}$$

Перейдем к p-представлению по отношению к разности координат, т. е.

$$G(x, x'\,|\,a) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ip(x-x')}\,G(p, x\,|\,a)\,d^4p. \tag{11.2}$$

Для $G(p, x|a)$ получаем уравнение

$$[i\gamma_\mu p_\mu + m - ie\gamma_\mu a_\mu(x) + \gamma_\mu\nabla_\mu]\,G(p, x\,|\,a) = 1. \tag{11.3}$$

Умножим уравнение (11.3) на $-i\gamma_\mu p_\mu + m$. Тогда получим

$$[p^2 + m^2 - 2ep_\mu a_\mu - 2ip_\mu\nabla_\mu + (\gamma_\mu\nabla - ie\gamma_\mu a_\mu)\times$$
$$\times(i\gamma_\mu p_\mu + m)]\,G(p, x\,|\,a) = -i\gamma_\mu p_\mu + m. \tag{11.4}$$

Поскольку нас будет интересовать область импульсов в окрестности $-i\gamma_\mu p_\mu \sim m$, то, согласно (11.4), в этой области можо взять следующее приближенное уравнение для G:

$$(p^2 + m^2 - 2ep_\mu a_\mu - 2ip_\mu\nabla_\mu)\,G(p, x\,|\,a) = -i\gamma_\mu p_\mu + m. \tag{11.5}$$

Нетрудно найти общее решение этого уравнения. Опуская выкладки, приведем это решение:

$$G(p, x\,|\,a) = i(-i\gamma_\mu p_\mu + m)\int_0^\infty a\nu e^{-i\nu(p^2+m^2-i\varepsilon)+iF(\nu, a)}; \tag{11.6}$$

$$F(\nu, a) = \frac{1 - e^{-2\nu p_\mu\nabla_\mu}}{2p_\mu\nabla_\mu}\,[2ep_\mu a_\mu(x)] =$$
$$= \int_0^\nu d\nu' e^{-2\nu' p\nabla}\,2ep_\mu a_\mu(x) = \int_0^\nu 2ep_\mu a_\mu(x - 2\nu' p)\,d\nu'. \tag{11.7}$$

Функция $F(\nu, a)$ имеет особо простой вид в импульсном представлении:

$$F(\nu, a(x)) = \frac{-1}{(2\pi)^2}\int\left\{ep_\mu a_\mu(k)\left(\frac{e^{-2i\nu p_\mu k_\mu}-1}{ip_\mu k_\mu}\right)e^{ik_\mu x_\mu}\right\}d^4k =$$

$$= +\frac{2e}{(2\pi)^2}\int p_\mu a_\mu(k)\int_0^\nu e^{-2i\nu'(pk)}d\nu' e^{ik_\mu x_\mu}\,d^4k, \qquad (11.8)$$

где $a_\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int a_\mu(x)\,e^{-ik_\mu x_\mu}\,d^4x$.

Используя замкнутое операторное решение для производящего функционала (§ 9) или континуальное решение (§ 8), можно найти асимптотику функций Грина в инфракрасной области. Для этого достаточно подставить выражение для функции Грина во внешнем поле, например, в решение (9.21), предварительно заменив $ia(x) \to \frac{\delta}{\delta I(x)}$, и провести функциональное дифференцирование по $\delta/\delta I$ во всех членах, кроме поляризационного[1] ($\mathrm{Sp}\,\gamma G$). Тогда получим следующее выражение для производящего функционала Z:

$$cZ = \exp-\left[\int d^4x\int_0^e de'\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu G\left(x, x\mid e'\frac{\delta}{\delta I(x)}\right)\frac{\delta}{\delta I(x)}\right]\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\prod_{n=1}^{k}\iint_0^{\infty}\bar\eta(p^{(n)})(-i\gamma_\mu p_\mu^{(n)}+m)\,\eta(x_n)\,e^{-ip^{(n)}x_n}\frac{d^4p^{(n)}d^4x_n d\nu_n}{(2\pi)^2}\times\right.$$

$$\times\exp\left\{i\int\frac{1}{2}I_\mu(x)\,D_{\mu\nu}(x-y)\,I_\nu(y)\,d^4x\,d^4y+\right.$$

$$+2ie\iint_0^{\nu_n}p_\mu^{(n)}D_{\mu\nu}(x_n-2\nu_n'p^{(n)}-y)\,I_\nu(y)\,d^4y\,d\nu_n'+$$

$$+2ie^2\sum_{m=0}^{k}\int_0^{\nu_n}d\nu_n'\int_0^{\nu_m}d\nu_m'\,(p_\mu^{(n)}D_{\mu\nu}(x_n-x_m-2\nu_n'p^{(n)}+2\nu_m'p^{(m)})\,p_\nu^{(m)})-$$

$$\left.\left.-i\nu_n\left((p^{(n)})^2+m^2-i\varepsilon\right)\right\}\right]. \qquad (11.9)$$

Итак, мы получили асимптотику для всех функций Грина в инфракрасной области энергии; как видим, для получения асимптотики определенной функции Грина достаточно провести соответствующее число дифференцирований по $i\eta$, $i\bar\eta$ и iI (столько раз, сколько $\bar\psi$, ψ и φ находятся под знаком T-произведения в интересующей нас функции Грина) и затем положить $\eta = \bar\eta = I = 0$. Так, в частности, получим инфракрасную асимптотику функции Грина электрона при наличии внешнего источника фотонного поля[2]:

---

[1] Заметим, что в инфракрасной области этим членом можно пренебречь.

[2] Методом обычной теории возмущений для функций Грина во внешнем поле можно учесть приближенно и поляризационные добавки. Эффективно дело сводится к тому, что всюду вместо D нужно подставить

$$D = \frac{1}{k^2 - \Pi}.$$

$$G^{(I)}(p, p') = i(-i\gamma_\mu p_\mu + m)\iint\limits_0^\infty d\nu \exp - i(p^2 + m^2 - i\varepsilon)\nu \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{2}\int I(x')\,D(x'-y')\,I(y')\,d^4x'\,d^4y - \right.$$
$$-2ie\int\limits_0^\nu d\nu' I_\mu(x')\,D_{\mu\nu}(x'-x-2\nu' p)\,p_\nu\,d^4x +$$
$$\left. +2ie^2\int\limits_0^\nu d\nu'\int\limits_0^\nu d\nu'' p_\mu D_{\mu\nu}\left[2(\nu''-\nu')p\right]p_\nu\right\} e^{-i(p'-p)x}\frac{d^4x}{(2\pi)^4}, \qquad (11.10)$$

где

$$G^{(I)}(p, p') = i\int T(\psi(x), \overline{\psi}(x'))\,e^{ipx-ip'x'}\frac{d^4x'\,d^4x}{(2\pi)^8} = -i\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(p)\,\delta\overline{\eta}(p')}\right]_{\eta=0}.$$

Перейдем к импульсному представлению для $D_{\mu\nu}$. Выполнив интегрирование по ν', ν'', мы получим

$$G(p, p') = \int e^{+i(p-p')x}\frac{d^4x}{(2\pi)^4}(-i\gamma_\mu p_\mu + m)\int\limits_0^\infty d\nu \exp - i\nu(p^2 + m^2 - i\varepsilon) \times$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{2}\int I_\mu(k)\,D_{\mu\nu}(k)\,I_\nu(-k)\,d^4k + \right.$$
$$+ e\int\frac{(e^{2i\nu(pk)} - 1)}{(2\pi)^2(pk)}\,p_\mu D_{\mu\nu}(k)\,I_\nu(k)\,e^{+i(kx)}\,d^4k +$$
$$\left. + \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{1 - e^{2i\nu(pk)}}{(pk)^2}\,p_\mu D_{\mu\nu}(k)\,p_\nu\,d^4k\right]. \qquad (11.11)$$

В частности, в случае $I = 0$ из (11.11) следует, что для одночастичной функции Грина электрона[1] $[G(p, p') = G(p)\,\delta(p'-p)]$

$$G(p) = i(-i\gamma_\mu p_\mu + m)\int\limits_0^\infty d\nu \exp - i\nu(p^2 + m^2 - i\varepsilon) + F(\nu, p); \qquad (11.12)$$

$$F(\nu, p) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{1 - e^{2i\nu(pk)}}{(pk)^2}\,p_\mu D_{\mu\nu}(k)\,p_\nu\,d^4k =$$
$$= \frac{-4ie^2}{(2\pi)^4}\int\limits_0^\nu d\nu'\int\limits_0^{\nu'} d\nu'' p_\mu D_{\mu\nu}(k)\,p(k)\,e^{-2ipk(\nu'-\nu'')}. \qquad (11.13)$$

Дальнейшие выкладки проведем, взяв $D_{\mu\nu}$ с произвольной продольной частью, т. е.

$$D_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)d^t + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\,d^l; \qquad (11.14)$$
$$d^t = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon}, \quad d^l = \frac{1}{k^2 - i\varepsilon}\,\Delta^l(k).$$

Интеграл по k в формуле (11.13) вычисляется особенно просто, если перейти к эвклидовому k-пространству. Интеграл расходится при боль-

---

[1] Удобнее для вычисления $G(p)$ пользоваться не выражением (11.13), а его обобщением, которое более корректно учитывает большие k, а именно (см. Приложение 2):

$$F(\nu, p) = \frac{-4ie^2}{(2\pi)^4}\int\left[\frac{e^{-i(k^2-2pk)} - 1}{(k^2-2pk)^2} + \frac{i\nu}{k^2-2pk}\right]p_\mu D_{\mu\nu}(k)\,p_\nu\,d^4k.$$

ших k, что соответствует обычным ультрафиолетовым расходимостям, которые исключаются перенормировкой, а потому до проведения перенормировки будем интегрировать по k не до бесконечности, а до L. На нижнем пределе выражение F в целом не имеет бесконечности. Опуская выкладки, приведем результат интегрирования в асимптотической области — $p^2 \approx m^2$:

$$F(\nu, p) \approx \frac{e^2}{8\pi^2}(3-\Delta^l)\ln \nu L p \approx \frac{e^2}{8\pi^2}(3-\Delta^l)\ln \nu L m. \tag{11.15}$$

Подставляя F в формулу (11.12) для G, получим

$$G(p) = Z_2 \frac{(-i\gamma_\mu p_\mu + m)}{p^2+m^2} \frac{1}{\left|\frac{p^2}{m^2}+1\right|^\alpha} f. \tag{11.16}$$

Выражение для f после введения новых переменных имеет вид

$$f = i\int_0^\infty dx\, x^{(e^2/8\pi^2)(3-\Delta^l)} e^{-ix-\varepsilon x} \quad \text{для } p^2 > -m^2;$$

$$f = i\int_0^\infty dx\, x^{(e^2/8\pi^2)(3-\Delta^l)} e^{ix-\varepsilon x} \quad \text{для } p^2 < -m^2.$$

В области $p^2 \approx -m^2$ и $e^2 \ll 1$, $f \approx 1$, $Z_2 = \left(\frac{L}{m}\right)^{(e^2/8\pi^2)(3-\Delta^l)}$ (z_2— перенормировочная постоянная, и при переходе к перенормированному значению G она выпадает). Таким образом, мы простым способом получили известный результат [46, 47]: полюс функции Грина электрона в инфракрасной области более сильный, чем для свободной частицы, а именно: вместо

$$\frac{1}{p^2+m^2} \quad \text{имеем} \quad \frac{1}{(p^2+m^2)^{1+(e^2\ldots/8\pi^2)(3-\Delta^l)}}.$$

Однако в отличие от других методов здесь мы не используем модельного гамильтониана взаимодействия электронов с фотонами. Потому мы можем принципиально развить последовательный метод теории возмущения по параметру малости $\frac{p^2+m^2}{m^2}$. Рассмотренный метод, кроме того, позволяет получить асимптотику сразу для всех функций Грина. Так, в частности, из (11.11) легко получить асимптотику для $\frac{\delta G}{\delta I}$ или для Γ (правда, для получения асимптотики этих величин достаточно воспользоваться обобщенным соотношением Уорда и найденной асимптотикой для G).

В качестве другого примера рассмотрим асимптотику в инфракрасной области для функции Грина двух электронов. Нас интересует двухчастичная функция Грина

$$T(\psi(x)\psi(y)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(y')) = \left[\frac{\delta^4 \langle S\rangle}{\delta\bar{\eta}(y)\delta\bar{\eta}(x)\delta\eta(y')\delta\eta(x')}\right]_{\eta=\bar{\eta}=I=0} = G_{12}(xyx'y').$$

Согласно (11.9), для G_{12} получим следующее выражение:

$$G_{12}(p, p_1; p', p_1) = G(p, p_1; p', p_1') - G(p, p_1; p_1', p'); \tag{11.17}$$

$$G(p, p_1; p', p_1') = -(-i\gamma_\mu p_\mu + m)(-i\gamma_\mu p_{1\mu} + m)\int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\nu'\, \Phi(p, p_1; \nu, \nu') \times$$
$$\times \exp[-i\nu'(p_1^2+m^2-i\varepsilon) - i\nu(p^2+m^2-i\varepsilon)]; \tag{11.18}$$

$$\Phi(p, p_1; \nu, \nu') = \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x\, d^4x_1 e^{-i(p-p')x-i(p_1-p_1')x_1} \times$$
$$\times \exp\left\{\int_0^\nu d\nu_1 \int_0^\nu d\nu_2\, 2iep_\mu D_{\mu\nu}[2(\nu_1-\nu_2)p]\, p_\nu + \right.$$
$$+\int_0^{\nu'} d\nu_1 \int_0^{\nu'} d\nu_2\, 2iep_{1\mu} D_{\mu\nu}[2(\nu_1-\nu_2)p_1]\, p_{1\nu} +$$
$$\left.+\int_0^{\nu} d\nu_1 \int_0^{\nu'} d\nu_2 4iep_\mu D_{\mu\nu}(x-x_1-2\nu_1 p+2\nu_2 p_1)\, p_{1\nu}\right\}. \qquad (11.19)$$

В заключение заметим, что более корректный учет больших виртуальных импульсов k в формулах (11.7—11.19) может быть получен в рамках приведенных выражений простой заменой

$$D_{\mu\nu}(x_m - x_n + 2\nu_n' p^{(n)} - 2\nu_m' p^{(m)}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x_m - x_n + 2\nu_n' p^{(n)} - 2\nu_m' p^{(m)})} D_{\mu\nu}(k)$$

на функцию

$$D^+_{\mu\nu}(x_m - x_n + 2\nu_n' p^{(n)} - 2\nu_m' p^{(m)}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(k)\, e^{ik(x_m - x_n + 2\nu_n' p^{(n)} - 2\nu_m' p^{(m)}) - ik^2(\nu_n' + \nu_m')}$$

Приведенное правило следует из результатов, полученных ниже (см. также Приложение 2). В самом деле, рассмотрим уравнение для функции Грина $G(p, x|a)$ в импульсном представлении (ср. формулу (10.16) гл. 2 в случае, когда химический потенциал равен нулю):

$$G(p, x|a)\left(i\gamma_\mu p_\mu + m - ie\gamma_\mu a_\mu\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right)\right) = 1. \qquad (11.20)$$

Будем искать $G(p, x)$ в виде

$$G(p, x|a) = G_1(p, x)\left(-i\gamma_\mu p_\mu + m + ie\gamma_\mu a_\mu\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right)\right). \qquad (11.21)$$

При этом из (11.20—11.21) получим следующее уравнение для G_1 (в лоренцовой калибровке):

$$G_1(p, x)\left[p^2 + m^2 - 2ep_\mu a_\mu\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right) + e^2 a_\mu^2\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right) + \right.$$
$$\left.+\frac{e}{2} i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\frac{\partial}{\partial x_\mu} a_\nu\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right)\right] = 1. \qquad (11.22)$$

Из (11.22) имеем

$$G_1(p, x|a) = i\int_0^\infty d\nu \Phi(\nu) \exp - i\nu(p^2 + m^2 - i\varepsilon); \qquad (11.23)$$

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \left[e_1^2 \int d^4k d^4k' a_\mu(k)\, a_\mu(k') \exp[i(k+k')x - i(k+k')^2\nu - \right.$$
$$\left. - 2p(k+k')i\nu]\, e^{(k+k')\frac{\partial}{\partial p}} - e_1 \int (2p_\mu + \gamma_\rho\gamma_\mu k_\rho)\, a_\mu(k)\, e^{ikx - i(k^2 + 2pk)\nu} d^4k e^{k\frac{\partial}{\partial p}}\right]\Phi(\nu), \qquad (11.24)$$

где $e_1^2 = \dfrac{e^2}{(2\pi)^2}$.

Из (11.24) получаем следующее решение для Φ:

$$\Phi(\nu) = T\exp - i\int\limits_0^\nu d\nu' \left\{e_1^2\int d^4kd^4k' a_\mu(k) a_\mu(k') \exp[i(k+k')x - i(k+k')^2\nu' - 2pi(k+k')\nu']\, e^{(k+k')\frac{\partial}{\partial p}} - e\int d^4k(2p_\mu - \gamma_\rho\gamma_\mu k_\rho) a_\mu(k) e^{ikx - i(k^2+2pk)\nu'} d^4ke^{k\frac{\partial}{\partial p}}\right\}. \tag{11.25}$$

Полученное выражение для Φ, содержащее a_μ и a_μ^2 под знаком T-экспоненты, делает возможным провести функциональное осреднение и тем самым получить явное выражение для производящего функционала Z. Поскольку нас интересует инфракрасная асимптотика, то существенно правильно ухватить вклад от малых виртуальных импульсов в выражении для функции Грина во внешнем поле [1]. При этом из (11.21—11.25) с помощью операторного (или континуального) решения для Z получим следующее приближенное выражение для производящего функционала:

$$cZ \approx \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}n!}\prod_{s=1}^{n}\int d^4p^{(s)}d^4x_s e^{ip^{(s)}x_s}\bar\eta(p^{(s)})(-i\gamma_\mu p_\mu + m)\eta(x_s) e^{-i\nu_s((p^{(s)})^2+m^2-i\varepsilon)}\times$$

$$\times\exp - \left\{\frac{-i}{2}\int I_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) I_\nu(y) d^4xd^4y + \right.$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{2}{(2\pi)^2}\int p_\mu^{(s)} D_{\mu\nu}(k) I_\nu(k) e^{ikx_s}\frac{e^{-i(k^2-2p^{(s)}k)\nu}-1}{k^2-2p^{(s)}k} d^4k +$$

$$+\sum_{s\neq m}^{n}\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int p_\mu^{(s)}D_{\mu\nu}(k)p_\nu^{(m)}\left(\frac{e^{-i(k^2-2p^{(s)}k)\nu_s}-1}{(k^2-2p^{(s)}k)}\,\frac{e^{-i(k^2+2p^{(m)}k)\nu_m}-1}{(k^2+2p^{(m)}k)}\right)e^{ik(x_m-x_s)}d^4k +$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n}\int\frac{4ie^2}{(2\pi)^4}p_\mu^{(s)}D_{\mu\nu}(k)p_\nu^{(s)}\left(\frac{e^{-i(k^2-2p^{(s)}k)\nu_s}-1}{(k^2-2p^{(s)}k)^2}+\frac{i\nu_s}{k^2-2p^{(s)}k}\right)d^4k\right\}. \tag{11.26}$$

Из (11.26) следует выражение для одночастичной функции Грина, приведенное в сноске на стр. 46. Для двухчастичной функции Грина G_{12} из (11.26) получим следующее выражение [ср. формулу (11.19)]:

$$\begin{cases} G_{12}(p, p_1; p', p_2') = G(p, p_1; p', p_1') - G(p, p_1; p_1', p'); \quad G(p, p_1; p', p_1') = \\ = -(-i\gamma_\mu p_\mu + m)(-i\gamma_\mu p_{1\mu} + m)\int\limits_0^\infty d\nu\int\limits_0^\infty d\nu' e^{-i\nu(p^2+m^2-i\varepsilon)-i\nu'(p_1^2+m^2-i\varepsilon)}\Phi(p, p_1), \end{cases} \tag{11.27}$$

где

$$\Phi(p, p_1) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4x\, d^4x_1 e^{-i(p-p')x - i(p_1-p_1')x_1}\varphi(p, p_1);$$

[1] В том случае, когда существенны лишь малые виртуальные импульсы k, решение (11.25) можно записать в виде

$$\Phi(\nu) \approx \exp - \left\{\int d^4k\,\frac{e^{+i(k^2+2pk)\nu}-1}{k^2+2pk}\,2e_1p_\mu a_\mu(k) e^{ikx} - \int d^4kd^4k'\,\frac{e^{-i(k+k')^2\nu - 2ip(k+k')\nu}-1}{(k+k')^2+2p(k+k')}\,e_1^2 a_\mu(k) a_\mu(k') e^{i(k+k')x}\right\}.$$

$$\varphi(p, p_1) = \exp - \left\{ \frac{4e^2 i}{(2\pi)^4} \int p_\mu D_{\mu\nu}(k)\, p_{1\nu} \left(\frac{(e^{-i(k^2-2pk)\nu} - 1)}{(k^2 - 2pk)} \frac{(e^{-i(k^2+2p_1k)\nu'} - 1)}{(k^2 + 2p_1k)} \right) e^{ik(x_1 - x)} d^4k + \right.$$
$$+ \frac{4ie^2}{(2\pi)^4} \int \left[p_\mu D_{\mu\nu}(k)\, p_\nu \left[\frac{e^{-i(k^2-2pk)\nu} - 1}{(k^2 - 2pk)^2} + \frac{i\nu}{k^2 - 2pk} \right] + \right.$$
$$\left. \left. + p_{1\mu} D_{\mu\nu}(k)\, p_{1\nu} \left[\frac{e^{-i(k^2-2p_1k)\nu'} - 1}{(k^2 - 2p_1k)^2} + \frac{i\nu'}{(k^2 - 2p_1k)} \right] \right] d^4k \right\}.$$

ГЛАВА II

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

Введение

За последнее время большое внимание уделяется разработке методов, отличных как от обычной термодинамической теории возмущений в статистике, так и от обычной теории возмущений в теории многих частиц. Мы не будем здесь перечислять все работы в этом направлении, отметим лишь, что существующие методы разнообразны и для своего обоснования требуют довольно громоздких выкладок. Естественно попытаться найти более общий подход к решению задач квантовой статистики, не связанный с теорией возмущений.

Таким подходом оказался метод функций Грина, который уже был с успехом применен для случая $T = 0$ [48].

Т. Матцубара [49] впервые сформулировал метод Фейнмана и ввел функцию Грина для случая $T \neq 0$.

Однако задача построения замкнутых уравнений для этих функций Грина в x-пространстве не была доведена до конца и, главное, переход к p-пространству, который облегчает возможность практического решения уравнений, не был рассмотрен.

Развитие физики высоких энергий требует развития аппарата квантовой статистики с учетом, вообще говоря, как релятивистских поправок, так и вторичного квантования гамильтониана системы.

Настоящая глава посвящена последовательной формулировке метода функций Грина в квантовой статистике. В основу этой главы положены работы автора [50—54].

Существенные результаты в этой области были независимо получены в работах Ю. Швингера и Р. Мартина [55], А. А. Абрикосова, Л. П. Горькова и И. Е. Дзялошинского [56], Н. Н. Боголюбова и С. В. Тябликова [57], В. Л. Бонч-Бруевича и Ш.М. Когана [58] (подробный список литературы по теории многих частиц и квантовой статистике имеется в работе Швингера и Мартина [55]).

§ 1. Функциональное уравнение и операторное решение для статистической суммы [50]

Матрица плотности канонического ансамбля имеет вид

$$\rho = \exp\{-\beta(H - \mu N)\}, \tag{1.1}$$

где $\beta = \frac{1}{kT}$; H — полный гамильтониан системы, состоящий из гамильтониана свободных полей H_0 и гамильтониана взаимодействия H_1; μ — химический потенциал; N — оператор полного числа сохраняющихся частиц (например, разность числа электронов и числа позитронов).

Не нарушая общности, будем рассматривать случай взаимодействия одного ферми-поля ψ (массы m) с бозе-полем (массы $\varkappa$).

Гамильтониан взаимодействия в этом случае имеет вид

$$H_1 = -\int j(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,d^3x;$$

$$j(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\, ig\, \mathrm{Sp}\,\gamma\, [\bar{\psi}(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\,\bar{\psi}(\mathbf{x})]; \tag{1.2}$$

$$N = \frac{1}{2}\int \mathrm{Sp}\,\gamma_4\, [\bar{\psi}(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})\,\bar{\psi}(\mathbf{x})]\, d^3x. \tag{1.3}$$

Мы не уточняем вид взаимодействия γ и вариантность поля φ (например, для электродинамики $\gamma = \gamma_\mu$, $\varphi = A_\mu$). Обычными методами теории поля получим

$$\left.\begin{aligned} &\rho(\beta) = \rho_0(\beta)\, S(\beta), \quad \rho_0(\beta) = \exp\{-\beta(H_0 - \mu N)\};\\ &S(\beta) = T\exp\left\{-\int_0^\beta dx_4 \int H_1(x_4, \mathbf{x})\, d^3x\right\};\\ &H_1(\mathbf{x}, x_4) = -(j(\mathbf{x}, x_4)\,\varphi(\mathbf{x}, x_4)), \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

где T — упорядоченное по времени расположение операторов, причем любой оператор $f(\mathbf{x}, x_4)$ определяется соотношением

$$f(\mathbf{x}, x_4) = \rho_0(-x_4)\, f(\mathbf{x})\, \rho_0(x_4). \tag{1.5}$$

По аналогии с квантовой теорией поля [1] обобщим гамильтониан взаимодействия, включив добавочное взаимодействие с внешними источниками бозе- (I) и ферми-полей (η), а именно $H_1 \to H_1^{\text{в}}$:

$$\begin{aligned} H_1^{\text{в}}(\mathbf{x}, x_4) = -\{[j(\mathbf{x}, x_4) + I(\mathbf{x}, x_4)]\,\varphi(\mathbf{x}, x_4) + \\ + \bar{\eta}(\mathbf{x}, x_4)\,\psi(\mathbf{x}, x_4) + \bar{\psi}(\mathbf{x}, x_4)\,\eta(\mathbf{x}, x_4)\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) следуют соотношения:

а) для x_4 в интервале от 0 до β

$$\begin{gathered} \frac{\delta\rho(\beta)}{\delta I(\mathbf{x}, x_4)} = \rho_0(\beta)\, S(\beta)\, S(-x_4)\,\varphi(\mathbf{x}, x_4)\, S(x_4) = \rho(\beta)\,\varphi'(\mathbf{x}, x_4),\\ \frac{\delta\rho}{\delta\bar{\eta}(\mathbf{x}, x_4)} = \rho\psi'(\mathbf{x}, x_4), \qquad \frac{\delta\rho}{\delta\eta(\mathbf{x}, x_4)} = \rho\bar{\psi}'(\mathbf{x}, x_4),\\ \frac{\delta^2\rho}{\delta\bar{\eta}(\mathbf{x}, x_4)\,\delta\eta(\mathbf{x}', x_4')} = \rho T\,[\psi'(\mathbf{x}, x_4),\ \bar{\psi}'(\mathbf{x}', x_4')]; \end{gathered} \tag{1.7}$$

б) для x_4 вне интервала от 0 до β все функциональные производные равны нулю.

Любой оператор $f'(\mathbf{x}, x_4)$ связан с оператором $f(x)$ соотношением

$$f'(\mathbf{x}, x_4) = \rho^{-1}(x_4)\, f(\mathbf{x})\, \rho(x_4). \tag{1.8}$$

Вариации по η и $\bar{\eta}$ следует понимать в смысле вариаций справа и слева соответственно, т. е.

$$\delta\rho = \int d^4x \left(\delta\bar{\eta}\,\frac{\delta\rho}{\delta\bar{\eta}} + \frac{\delta\rho}{\delta\eta}\,\delta\eta\right). \tag{1.9}$$

Используя правила коммутации ψ и φ, можно получить следующие функциональные уравнения для интеграла состояния Z:

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m - ig\gamma \frac{\delta}{\delta I}\right) \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} = \eta(x) Z;$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} + \varkappa^2\right) \frac{\delta Z}{\delta I(x)} = I(x) Z - ig \operatorname{Sp} \gamma \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(x)}, \qquad (1.10)$$

где $Z = \sum\limits_n \Phi_n^* \rho \Phi_n = \operatorname{Tr}[\rho(\beta)]$; Φ_n — волновая функция полного гамильтониана системы;

$$\partial_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} - \mu; \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k};$$

греческие индексы пробегают четыре значения ($\nu = 1, 2, 3, 4$); латинские индексы принимают три значения ($k = 1, 2, 3$). При этом функциональные производные отличны от нуля лишь для x_4 в области от 0 до β.

Из (1.10) методом работы [44] найдем следующее операторное решение [50, 53] для интеграла состояния:

$$Z = Z_0 \exp\left\{-ig \operatorname{Sp} \gamma \int d^4x \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta I(x)}\right\} \times$$

$$\times \exp \int \left\{\frac{1}{2} I(x) D_0(x-y) I(y) + \bar{\eta}(x) G_0(x-y) \eta(y)\right\} d^4x d^4y, \qquad (1.11)$$

где

$$Z_0 = \prod_{rk} (1 + \exp \beta(\mu - \varepsilon_r))(1 + \exp[-\beta(\mu + \varepsilon_r)])(1 - \exp[-\beta w_k])^{-1}; \qquad (1.12)$$

$$D_0(x-x') = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2w_k} \{(f_k + 1) \exp[ik(x - x') - w_k |x_4 - x_4'|] +$$
$$+ f_k \exp[-ik(x-x') + w_k |x_4 - x_4'|]\}; \qquad (1.13)$$

$$G_0(x-x') = (\gamma_\mu \partial_\mu - m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\varepsilon_k} \left\{ \frac{(N_k^+ - 1) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - (\varepsilon_k - \mu)(x_4 - x_4')] + N_k^- \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + (\varepsilon_k + \mu)(x_4 - x_4')] \; (x_4 > x_4')}{N_k^+ \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') - (\varepsilon_k - \mu)(x_4 - x_4')] + (N_k^- - 1) \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + (\varepsilon_k + \mu)(x_4 - x_4')] \; (x_4 < x_4')} \right. ; \qquad (1.14)$$

$$N_k^\pm = \frac{1}{1 + \exp(\varepsilon_k \mp \mu)\beta}; \quad f = \frac{1}{\exp(w_k \beta) - 1};$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}; \quad w_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \varkappa^2}, \quad k = |\mathbf{k}|;$$

D_0 и G_0 — статистические функции Грина свободных бозе- и ферми-полей, они легко находятся с помощью (2.10) — (2.11) или (2.12) — (2.13); $N_k^+ (N_k^-)$ — среднее число электронов (позитронов) в состоянии с энергией ε_k. Исключая мезонные производные из (1.11), получим[1]

$$Z = Z_0 \exp \int \left\{\left[I(x) - ig \operatorname{Sp} \gamma \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)}\right] \frac{1}{2} D_0(x-y) \times\right.$$

$$\left. \times \left[I(y) - ig \operatorname{Sp} \gamma \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(y)} \frac{\delta}{\delta \eta(y)}\right]\right\} d^4x d^4y \exp \int \bar{\eta}(x) G_0(x-y) \eta(y) d^4x d^4y.$$

(1.15)

[1] В формуле (1.11) в дальнейшем интеграл по четвертой компоненте берется в пределах от 0 до β.

Можно найти и выражение для Z, где остаются лишь функциональные производные по мезонному источнику. Так, исключая фермионные функциональные производные, получим [50]

$$Z = Z_0 \exp \int \left\{ \bar{\eta}(x)\, G\left(x, y \mid g \frac{\delta}{\delta I}\right) \eta(y)\, d^4 y - \right.$$

$$\left. - i \operatorname{Sp} \int_0^g \gamma G\left(x, x \mid g' \frac{\delta}{\delta I}\right) \frac{\delta}{\delta I(x)}\, dg' \right\} d^4 x \cdot \exp \int \frac{1}{2} I(x) D_0(x-y) I(y) d^4 x d^4 y, \quad (1.16)$$

где $G\left(x, y \mid g \frac{\delta}{\delta I(x)}\right)$ определяется из уравнения для функции Грина $G(x, y \mid g\varphi)$ электрона во внешнем поле [1] с последующей, формальной заменой $\varphi(x)$ на $\frac{\delta}{\delta I(x)}$.

Дифференцируя $\ln Z$ по заряду, получим следующее операторное решение для термодинамического потенциала Ω [52]:

$$\Omega = \Omega|_{g=0} + \int_0^g \frac{i dg'}{\beta Z} \operatorname{Sp} \gamma \int d^4 x \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta I(x)} Z. \quad (1.17)$$

Выражения (1.15) и (1.17) можно разложить в ряд по степени g, при этом каждый член ряда совпадает с соответствующим приближением по методу Фейнмана.

Наш метод более удобен, в особенности для высших приближений, поскольку здесь не надо перебирать всевозможные графики Фейнмана, а вся задача сводится к последовательному проведению функционального дифференцирования в нужном порядке по заряду. Среднее значение любой T-упорядоченной функции от операторов поля $f(\psi, \bar{\psi}, \varphi)$ вычисляется по правилу

$$\langle f \rangle = \left[\frac{\operatorname{Tr}(\rho f)}{Z} \right]_{I=\eta=0} = \left[\frac{1}{Z} f\left(\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta I} \right) Z \right]_{I=\eta=0}, \quad (1.18)$$

например,

$$\langle T[\psi(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x')\bar{\psi}(x_1')] \rangle = \left[\frac{1}{Z} \frac{\delta^4 Z}{\delta \bar{\eta}(x)\, \delta \bar{\eta}(x_1)\, \delta \eta(x')\, \delta \eta(x_1')} \right]_{I=\eta=0}. \quad (1.19)$$

§ 2. Система уравнений для функций Грина [51]

Введем «одночастичные» функции Грина [2] фермионов G и бозонов D, которые, согласно (1.18), можно записать в виде

$$G(x, y) = \left[\frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta}(x)\, \delta \eta(y)} \right]_{\bar{\eta}=\eta=0},$$

$$D(x, y) = \left[\frac{\delta^2 \ln Z}{\delta I(x)\, \delta I(y)} \right]_{\bar{\eta}=\eta=0}. \quad (2.1)$$

[1] При этом функция Грина ферми-частицы во внешнем поле φ определяется выражением

$$G(x, y \mid g\varphi) = G_0(x-y) + ig \int G_0(x-y')\, \gamma\varphi(y')\, G(y', y \mid g\varphi)\, d^4 y'. \quad (1.16a)$$

[2] Впервые функции Грина при $T \neq 0$ ввел Матцубара [49]. Наши функции Грина отличаются тем, что восстановлена полная симметрия между μN и H, т. е. все величины зависят от $H - \mu N$ (в то время как у Матцубара x_4 входило лишь с множителем H). Как будет видно из дальнейшего, это и позволит сделать переход в уравнениях для функций Грина к p-представлению.

С помощью (1.10) получим следующую систему уравнений для G и D:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m - ig\gamma \langle \varphi(x) \rangle) G(x, y) + \int \sum^* (x, z) G(z, y) d^4z = \delta(x-y), \tag{2.2}$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} + \varkappa^2\right) \langle \varphi(x) \rangle = -\frac{1}{2} ig \operatorname{Sp} \gamma [G(\mathbf{x}, x_4; \mathbf{x}, x_4 - \varepsilon) + G(\mathbf{x}, x_4; \mathbf{x}, x_4 + \varepsilon)]_{\varepsilon \to 0}, \tag{2.3}$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2} + \varkappa^2\right) D(x, y) - \int \Pi(x, z) D(z, y) d^4z = \delta(x-y); \tag{2.4}$$

$$\sum^* (x, y) = g^2 \int \gamma G(x, z) \Gamma(z, y, y') D(y', x) d^4z\, d^4y'; \tag{2.5}$$

$$\Pi(x, y) = g^2 \operatorname{Sp} \int \gamma G(x, z) \Gamma(z, y', y) G(y', x) d^4z\, d^4y'; \tag{2.6}$$

$$\Gamma(x, y, y') = \gamma \delta(x-y) \delta(y-y') - \frac{\delta \Sigma^*(x, y)}{\delta ig \langle \varphi(y') \rangle}. \tag{2.7}$$

«Одночастичные» функции Грина определяются уравнениями (2.2) и (2.7) для x_4 только в интервале от $-\beta$ до β. Вне этого интервала эти функции могут быть определены любым образом. Наложим на функции условия периодичности с периодом 2β и разложим эти функции в ряд Фурье:

$$G(x) = \frac{1}{\beta (2\pi)^3} \sum_{p_4} \int d^3p G(p, p_4) \exp(ip_\nu x_\nu),$$

$$D(x) = \frac{1}{\beta (2\pi)^3} \sum_{p_4} \int d^3p D(p, p_4) \exp(ip_\nu x_\nu), \tag{2.8}$$

$$\Gamma(x, y, z) = \Gamma(x-y, x-z) =$$
$$= \frac{1}{\beta^2 (2\pi)^6} \sum_{p_4 k_4} \int \Gamma(p, k) \exp[ip_\nu (x-y)_\nu - ik_\nu (y-z)_\nu] d^3p d^3k.$$

Можно показать, что 1) частота p_4 для ферми-частиц принимает значения $(2n+1)\pi/\beta$, в то время как частота p_4 для бозе-частиц принимает[1] значения $2n\pi/\beta$, где n пробегает все целые значения от $-\infty$ до $+\infty$; 2) для G и D имеют место следующие соотношения:

$$G(x_4 = \pm 0) = -G(x_4 = \pm \beta);$$

$$\dot{D}(x_4 = 0) = \dot{D}(x_4 = \pm \beta) \left(\dot{D} = \frac{\partial D}{\partial x_4}\right). \tag{2.9}$$

Это следует из спектральных представлений для G и D, которые имеют вид:

$$G(x, x') = \frac{1}{Z} \sum_{m,n} \psi_{m,n}(0) \psi_{n,m}(0) \exp[(\mu N_m - E_m)\beta +$$
$$+ (E_m - E_n + \mu N_n - \mu N_m)(x_4 - x_4') + i(\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n)(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \text{ при } x_4 > x_4'; \tag{2.10}$$

[1] То обстоятельство, что в случае $T \neq 0$ термодинамические величины выражаются в виде ряда по $\varepsilon_n = \varepsilon(2n\pi/\beta)$, было показано в другой связи в работе Е. М. Лифшица [59].

$$G(x, x') = -\frac{1}{Z}\sum_{m,n}\overline{\psi}_{n,m}(0)\,\psi_{m,n}(0)\exp\left[(\mu N_n - E_n)\beta + \right.$$
$$\left. + (E_m - E_n + \mu N_n - \mu N_m)(x_4 - x_4') + i(\mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n)(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\right] \text{ при } x_4 < x_4';$$

$$D(x, x') = \frac{1}{Z}\sum_{m,n}|\varphi_{n,m}(0)|^2\exp\left[-\beta E_n + \right.$$
$$\left. + (E_n - E_m)|x_4 - x_4'| + i(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m)(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\right]. \qquad (2.11)$$

То обстоятельство, что для функции Грина G имеем лишь нечетные, а для функции D — лишь четные частоты (в единицах π/β), приводит к тому, что при интегрировании по x_4 возникает кронекеровская δ-функция (закон сохранения «квазиэнергии» в каждом узле фейнмановских диаграмм).

В p-представлении система уравнений для функций Грина значительно упрощается и принимает следующий вид [51]:

$$\left[ip_\nu\gamma_\nu - \gamma_4\mu + m + \sum\nolimits^*(p)\right]G(p) = \sum_n \delta\left(p_4 - \frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right); \qquad (2.12)$$

$$[k_\nu^2 + \varkappa^2 - \Pi(k)]\,D(k) = \sum_n \delta\left(k_4 - \frac{2n\pi}{\beta}\right); \qquad (2.13)$$

$$\Sigma^*(p) = \frac{g^2}{(2\pi)^3\beta}\int\sum_{k_4}\gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k, k)\,D(k)\,d^3k; \qquad (2.14)$$

$$\Pi(k) = \frac{g^2}{(2\pi)^3\beta}\,\mathrm{Sp}\int\sum_{p_4}\gamma\,G(p+k)\,\Gamma(p+k, k)\,G(p)\,d^3p; \qquad (2.15)$$

$$\Gamma(p, s) = \sum_{n,m}\gamma\delta\left(p_4 - \frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)\delta\left(s_4 - \frac{2m\pi}{\beta}\right) + \Lambda(p, s); \qquad (2.16)$$

$$\Lambda(p, s) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3\beta}\sum\int d^3k G(p+k)\{[\Gamma(p+k, s)\,G(p+k-s)\,\Gamma(p+k-s, k) +$$
$$+ \Gamma^{(1)}(p+k;\, p-s, s, k)]\,D + \Gamma(p+k, k)\,D^{(1)}(k, s)\}. \qquad (2.16\text{a})$$

где $\delta\left(k_4 - \frac{m\pi}{\beta}\right)$ — кронекеровская δ-функция; Λ — совокупность всех графиков вершинной части, кроме простой вершины.

Как и следовало ожидать, из (2.12) и (2.16) следует, что в $\Gamma(p, p-k, k)$ аргументы p_4 и $p_4 - k_4$ (соответствующие «квазиэнергиям» ферми-частиц) принимают только нечетные значения $(2n+1)\,\pi/\beta$, а аргумент k_4 (соответствующий «квазиэнергии» бозе-частиц) принимает только четные значения $2n\pi/\beta$. Термодинамический потенциал с помощью (1.17) выражается также через «одночастичные» функции:

$$\Omega = \Omega|_{g=0} - \frac{v}{(2\pi)^3\beta}\sum_{k_4}\int\int_0^g \frac{dg'\,\Pi(k)}{g'(k^2 + \varkappa^2 - \Pi(k))}\,d^3k =$$
$$= \Omega|_{g=0} - \frac{v}{(2\pi)^3\beta}\,\mathrm{Sp}\sum_{k_4}\int d^3k\int_0^g \frac{dg'}{g'}\sum\nolimits^*(k)\,G(k), \qquad (2.17)$$

где v — объем системы.

В заключение этого раздела отметим, что переход к нерелятивистскому приближению совершается следующим образом: надо всюду $i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4\mu + m$ заменить на $ip_4 - \mu_1 + \mathbf{p}^2/2m$ и $G_{\alpha,\beta'}$ на $G\delta_{\alpha\beta'}$. В самом деле, из уравнения (2.12) легко видеть, что достаточно рассмотреть переход к нерелятивистскому пределу только для функции Грина без взаимодействия

$$G_0 = \frac{\sum \delta\left(p_4 - (2n+1)\pi/\beta\right)}{i\gamma_\nu p_\nu - \gamma_4\mu + m} = \frac{\left(-i\gamma_\nu p_\nu + \gamma_4\mu + m\right)\sum \delta\left(p_4 - \frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)}{(p_4 + i\mu)^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.18)$$

В нерелятивистском приближении имеем $\mu = m + \mu_1$; $\gamma = 0$; $\gamma_4 = \delta_{\alpha\beta}$, и все величины малы по сравнению с m. Оставляя члены первого порядка малости, получим указанное правило перехода к нерелятивизму:

$$G_0 = \frac{2m\delta_{\alpha\beta'}\sum \delta\left[p_4 - (2n+1)\pi/\beta\right]}{2ip_4 m - m^2 - 2\mu_1 m + m^2 + \mathbf{p}^2} = \frac{\delta_{\alpha\beta}\sum \delta\left(p_4 - \frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)}{ip_4 - \mu_1 + \mathbf{p}^2/2m}. \quad (2.19)$$

§ 3. Перенормировка уравнений для функций Грина [53]

Система уравнений (2.12)—(2.16) получена с помощью неперенормированного гамильтониана взаимодействующих полей. Последнее проявляется, в частности, в том, что все величины выражены через затравочные значения для массы (m и $\varkappa$) частиц и через затравочный заряд (g). Между тем, уже в рамках механики одной физической частицы экспериментальные значения для указанных величин отличаются от затравочных значений, что является следствием взаимодействия частицы с нулевыми колебаниями бозе- и ферми-полей. Учитывая трудности современной теории, очень существенно проделать эту перенормировку в самих уравнениях для функций Грина. Более точно это означает — получить с помощью (2.12) — (2.16) новую систему уравнений, которая содержала бы только перенормированные (конечные) функции Грина, выраженные через экспериментальные значения для массы m_e и заряда g_e. При этом необходимо отметить, что в квантовой статистике мы сталкиваемся со второй перенормировкой из-за взаимодействия большого числа реальных частиц между собой, эффективные значения массы и заряда так называемых квазичастиц отличаются от соответствующих экспериментальных величин. Связь между эффективными и экспериментальными значениями нетрудно установить в общем виде; поскольку здесь не встречаются бесконечности, то нет необходимости это проделать в самих уравнениях для функций Грина.

Для проведения перенормировки в системе уравнений для функций Грина достаточно перейти к перенормированному гамильтониану взаимодействующих полей. Это эквивалентно следующей программе перенормировок для функций Грина.

1) Необходимо перейти к новым переменным G_1, D_1, Γ_1, ψ_1, φ_1, η_1, g_e, связанным с прежними переменными следующим образом:

$$\begin{aligned} &\psi_1 = \psi/z_2^{1/2}, \quad G_1 = G/z_2, \quad \eta_1 = z_2^{1/2}\eta, \quad \Gamma_1 = z_1\Gamma, \\ &\varphi_1 = \varphi/z_3^{1/2}, \quad I_1 = z_3^{1/2}I, \quad D_1 = Dz_3^{-1}, \quad g_e = z_1^{-1}z_2 z_3^{1/2} g. \end{aligned} \quad (3.1)$$

2) Постоянное z_n и m_e определяются через массовый оператор Σ_0, поляризационный оператор Π_0 и вершинную часть Γ_0 одночастичных функций Грина в квантовой теории поля:

$$z_1^{-1} = 1 - \Lambda(p^0, p^0, 0), \qquad z_2 = 1 + \frac{\partial \Sigma_0(p^0)}{\partial i\gamma_\mu p_\mu^0}, \qquad z_3 = 1 - \frac{\partial \Pi_0(k^0)}{\partial (k^0)^2},$$

$$m_e = m + \frac{\Sigma_0(p^0)}{z_2}, \qquad \varkappa_e^2 = \varkappa^2 - \frac{\Pi_0(k^0)}{z_3}, \qquad (k^0)^2 = k^2 + k_4^2 = -\varkappa_e^2, \tag{3.2}$$

$$(p^0)^2 + m_e^2 = 0.$$

Можно показать, что массовый и поляризационный операторы, а также вершинная часть «одночастичных» функций Грина в квантовой теории поля совпадают с аналитическим продолжением соответствующих величин для «одночастичных» функций Грина квантовой статистики при $\beta \to \infty$ и $\mu \to 0$ (см. гл. IV), т. е. при замене в последних $p_4 \to ip_0 \times \times \left(1 - \frac{i\varepsilon}{|p_0|}\right)$, что эквивалентно замене $p_4 \to ip_0$, $m \to m - i\varepsilon$.

Следует заметить, что, вообще говоря, при таком аналитическом продолжении функции Грина приобретают мнимые части для временно-подобных векторов.

Однако перенормировочные константы и добавки к массе m и заряду q [см. (3.2)] являются действительными величинами и точно равны соответствующим статистическим значениям при $\beta = \infty$ и $\mu = 0$ при формальной замене в окончательном результате $p_4 \to ip_0$. Учитывая последнее замечание и подставляя (3.1) и (3.2) в (2.12) и (2.16), получим следующую систему перенормированных уравнений для функций Грина в квантовой статистике [53] (индекс 1 в дальнейшем опущен):

$$[ip_\nu\gamma_\nu - \gamma_4\mu + m_e + \textstyle\sum_1^*(p)]\, G(p) = \sum\limits_n \delta\left(p_4 - \frac{2n+1}{\beta}\pi\right); \tag{3.3}$$

$$(k_\nu^2 + \varkappa_e^2 - \Pi_1(k)\, D(k)) = \sum_n \delta\left(k_4 - \frac{2n\pi}{\beta}\right); \tag{3.4}$$

$$\textstyle\sum_1^*(p) = \sum^*(p) - \left\{\sum_0^*(p^0) + (i\gamma_\nu p_\nu - \gamma_4\mu + m_e)\dfrac{\partial \sum_0^*(p^0)}{\partial i\gamma p^0}\right\}; \tag{3.5}$$

$$\Gamma(p, p_1) = \Gamma^R(p, p_1) + \Lambda(p, p_1) - \Lambda_0(p, p_1); \tag{3.6}$$

$$\Pi_1(k, k_4) = \Pi(k) - \Pi_0(k) + \Pi_0^R(k); \tag{3.7}$$

$$\textstyle\sum^*(p) = \dfrac{g_e^2}{(2\pi)^3\beta}\displaystyle\int \sum_{k_4} z_1\gamma G(p+k)\,\Gamma_1(p+k, k)\, D_1(k)\, d^3k; \tag{3.8}$$

$$\Pi(k^2) = \frac{g_e^2}{(2\pi)^3\beta}\,\mathrm{Sp}\, z_1 \int \sum_{p_4} \gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k, k)\, G(p)\, d^3p. \tag{3.9}$$

При этом $\sum_0^*$, Π_0, Λ_0 (равные соответственно $\sum^*$, Π, Λ при $\beta^{-1} = \mu = 0$) после перенормировки равны соответственно $\sum_0^R$, Π_0^R, Λ_0^R. Легко видеть, что $\sum_0^R$, Π_0^R, Λ_0^R совпадают с перенормированными $\sum^R$, Π^R, Λ^R — обычной теорией поля в эвклидовых переменных (см. § 1—3 гл. IV, где приведено выражение для указанных величин). Необходимо лишь учесть, что входящие в $\sum_0^R$, Π_0^R, Λ_0^R четвертые компоненты (p_4, k_4) внешних импульсов принимают дискретные значения $\left(\text{бозе-импульс } k = \frac{2\pi n}{\beta}\right.$, ферми-импульс $\left. p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)$. Так же как в обычной теории, после проведения программы перенормировок остается множитель Z_1; исключение этого множителя может быть проведено здесь тем же способом, что и в § 4 гл. 1. В нерелятивистском приближении перенормируется лишь масса ферми-частиц, а $z_1 = z_2 = z_3 = 1$. С помощью электромагнитного поляризационного оператора в статистике (Π_{44}) можно найти выражение для плотности числа частиц системы $\rho_1 = \frac{\langle N \rangle}{v}$, где v — объем системы,

$$\rho_1 = \int_0^{\mu} \left(\frac{-1}{e^2} \Pi_{44} (\mu', k=0) \right) d\mu'. \tag{3.10}$$

§ 4. Система частиц, взаимодействующих по закону Кулона (однородное распределение ионов [52])

Рассмотрим систему электронов и ионов, взаимодействующих по закону Кулона.

В этом случае гамильтониан взаимодействия с точностью до несущественных членов собственной энергии может быть записан в виде

$$H_1 = -\frac{e^2}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} \int j_4^{(\lambda_1)}(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, j_4^{(\lambda_1)}(\mathbf{x}')\, d^3x d^3x', \tag{4.1}$$

где z_λ — заряд частиц сорта λ; $e^2/4\pi c\hbar = \frac{1}{137}$. Нетрудно усмотреть, согласно формуле (1.15), что рассматриваемая система эквивалентна системе заряженных частиц, взаимодействующих с четвертой компонентой векторного поля φ_μ, причем

$$D^0(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = v(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta(x_4 - x_4'). \tag{4.2}$$

Поэтому мы можем сразу выписать уравнения для функций Грина для системы частиц, взаимодействующих по закону Кулона.

Предположим, что ионы распределены равномерно (система трансляционно-инвариантная).

В этом случае система уравнений для функций Грина имеет вид:

$$[i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4 \mu_\lambda + m_\lambda + \textstyle\sum_\lambda^*(p)]\, G_\lambda(p) = \sum_n \delta\left(p_4 - \frac{2n+1}{\beta}\pi\right); \tag{4.3}$$

$$D(k) = D_0(k) + D_0(k)\,\Pi(k)\,D(k); \tag{4.4}$$

$$\sum_\lambda^*(p) = \frac{e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3 \beta} \int \sum_{k_4} \gamma_4 G_\lambda(p+k)\, \Gamma_4^{(\lambda)}(p+k, p, k)\, D(k)\, d^3k; \tag{4.5}$$

$$\Pi(k) = \sum_\lambda \frac{e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3 \beta} \operatorname{Sp} \int \sum_{p_4} \gamma_4 G_\lambda(p+k)\, \Gamma_4^{(\lambda)}(p+k, p, k)\, G_\lambda(p)\, d^3p; \tag{4.6}$$

$$\Gamma_4^{(\lambda)}(p, p-k, k) = \gamma_4 + \Lambda^{(\lambda)}(p, p-k, k), \tag{4.7}$$

где G_n — «одночастичные» функции Грина частиц с зарядом z_n; $D(k)$ — функция распространения продольного фотона с учетом наличия плазмы.

а) В рассматриваемом случае приближение Хартри (когда $\Sigma = \Pi = \Lambda = 0$) совпадает со случаем невзаимодействующих частиц. Приближение же самосогласованного поля Хартри — Фока в терминах приведенных уравнений соответствует следующему: массовые операторы определяются выражением (4.5) с пренебрежением Π и Λ (т. е. полагается $\Pi = \Lambda = 0$).

б) Из-за особенности $D_0(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2}$ при малых импульсах существенны и высшие по e^2 приближения к D (так называемые корреляционные добавки), а именно в первую очередь те, которые ликвидируют особенность в $D(k)$-функции при малых импульсах (k). Практически главную часть корреляционной энергии мы учтем, вычисляя Π в первом приближении по e^2, т. е.

$$\Pi'(k) = \sum_\lambda \frac{e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3\beta} \operatorname{Sp} \int \sum_{p_4} \gamma_4 G_\lambda^{(0)}(p+k)\gamma_4 G_\lambda^{(0)}(p)\, d^3p. \tag{4.8}$$

С помощью $\Pi^{(1)}$ по формуле (2.17) можно получить в этом приближении следующие выражения для термодинамического потенциала:

$$\Omega = \Omega|_{e=0} + \frac{v}{2\beta(2\pi)^3}\sum_{k_4}\int \ln\left(1 - \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi^{(1)}(k)\right) d^3\mathbf{k} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3\beta}\int_{-\infty}^{\mu} d\mu' \sum_{p_4} \operatorname{Sp}\gamma_4 \int G^0(p, \mu')\, d^3p. \tag{4.9}$$

Выделив самосогласованную часть, т. е. $\Pi^{(1)}(k)/k^2$, получим следующее выражение для «корреляционной» части термодинамического потенциала:

$$\Omega_{\text{кор}} = \frac{V}{2(2\pi)^3\beta}\int\sum_{k_4}\left[\ln\left(1 - \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi^{(1)}(k)\right) + \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi^{(1)}(k)\right] d^3\mathbf{k}. \tag{4.10}$$

Дальнейшее рассмотрение будет проведено в нерелятивистском приближении, где $\Pi^{(1)}$ имеет вид

$$\Pi^{(1)}(k) = \sum_\lambda \frac{2e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3\beta}\int\sum_{p_4} G_\lambda^{(0)}(p+k)\, G_\lambda^{(0)}(p)\, d^3p; \tag{4.11}$$

$$G_\lambda^{(0)}(p) = \frac{1}{ip_4 - \mu_\lambda + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}; \quad p_4 = \frac{2n+1}{\beta}\pi. \tag{4.12}$$

В классическом пределе $(\hbar \to 0,\ e^2\beta h^{1/3} \ll 1)$ мы получим теорию Дебая — Хюккеля. Этому соответствует приближение, когда $\Pi^{(1)}(k)$ заменяется через $\Pi^{(1)}(0)$. В этом случае получим, в частности, известные выражения для дебаевского радиуса λ_d; он определяется следующим соотношением:

$$\lambda_d^{-2} = -\Pi^{(1)}(0) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^3}\sum_\lambda z_\lambda^2 \int \frac{\partial f^{(\lambda)}(\mathbf{k})}{\partial \varepsilon_k^{(0)}}\, d^3k = e^2 \sum_\lambda \frac{\partial n_\lambda}{\partial \mu_\lambda} z_\lambda^2, \tag{4.13}$$

где n_λ — средняя плотность частиц сорта λ.

С помощью (4.11) получим из (4.9) и (4.10) не только результаты теории Дебая — Хюккеля, но и все последующие поправки к термодинамическому потенциалу (по параметру малости теории Дебая — Хюккеля, т. е. по $e^2\beta n^{1/3}$):

$$\Omega = \Omega_{e=0} - \frac{2\pi^{1/2}}{3}\beta^{1/2} n_e^{3/2}(z+1)^{3/2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^{3/2} - \frac{1}{4}e^2\beta\hbar^2 n_e^2 m_e^{-1} + c\beta^{3/2} n_e^2 m_e^{-1/2} + a \quad (4.14)$$

$$c = \frac{e^4\hbar}{16\pi^{1/2}}\left(\ln 2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$a = \frac{\pi}{3}(z^2-1)\beta^2\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^3 n_e^2 \ln\left(\frac{m^{1/2}\lambda_d}{\beta^{1/2}\hbar}\right).$$

Существенно, что и другой предельный случай, когда справедливо приближение Гелл-Манна — Бракнера $\left(\text{параметр малости } \frac{me^2}{\hbar^2 n^{1/3}}\right)$, также содержится в указанном приближении $\Pi^{(1)}$. В самом деле, подставляя (4.11) в (4.10), получим:

$$\Omega_{e,\text{кор}} = v\int\frac{d^3q}{2(2\pi)^3\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{2e^2}{\mathbf{q}^2(2\pi)^3}\int\frac{\omega_{\mathbf{p}}(f_{\mathbf{p}}-f_{\mathbf{p+q}})\,d^3p}{\omega_{\mathbf{p}}^2+\left(\frac{2\pi n}{\beta}\right)^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2e^2}{\mathbf{q}^2(2\pi)^3}\int\frac{\omega_{\mathbf{p}}(f_{\mathbf{p}}-f_{\mathbf{p+q}})}{\omega_{\mathbf{p}}^2+(2\pi n/\beta)^2}\,d^3p\right], \quad (4.15)$$

где

$$\omega_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p+q}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(0)}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad f_p = [1+\exp(\varepsilon_{\mathbf{p}}^{(0)}-\mu)\beta]^{-1}. \quad (4.16)$$

Из (4.15) при $\beta\to\infty$ получим для корреляционной энергии $E_{e,\text{кор}}$ следующее выражение:

$$E_{e,\text{кор}} = v\int\frac{d^4q}{2(2\pi)^4}\left\{\ln\left(1+\frac{2e^2}{\mathbf{q}^2(2\pi)^3}\int\frac{\omega_{\mathbf{p}}(f_{\mathbf{p}}^{(0)}-f_{\mathbf{p+q}}^{(0)})\,d^3p}{\omega_{\mathbf{p}}^2+q_4^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2e^2}{\mathbf{q}^2(2\pi)^3}\int\frac{\omega_{\mathbf{p}}(f_{\mathbf{p}}^{(0)}-f_{\mathbf{p+q}}^{(0)})\,d^3p}{\omega_{\mathbf{p}}^2+q_4^2}\right\}, \quad (4.17)$$

где

$$f_p^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{когда } \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(0)} > \mu \\ 1, & \text{когда } \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(0)} < \mu. \end{cases}$$

Разлагая (4.17) по указанному выше параметру малости, получим все результаты приближения Гелл-Манна — Бракнера.

Не представляет труда найти поляризационный оператор в приближении Хартри — Фока. Для этого достаточно найти функцию Грина электронов в этом же приближении:

$$G(p) = \frac{1}{ip_4 - \mu + \Sigma(p) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}; \quad p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad (4.18)$$

где

$$\Sigma^*(p) = \frac{e^2z^2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{p_4'}\int\frac{d^3p_1}{ip_4'-\mu+\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}+\Sigma^*}\frac{1}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p})^2} = -\frac{e^2z^2}{(2\pi)^3}\int d^3p' f^0(\varepsilon_{p'})\frac{1}{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})^2};$$

$$f^{(0)}(\varepsilon_p) = \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)\beta}; \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \sum\nolimits^* (p) \approx \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2 z^2}{(2\pi)^3} \int d^3 p' f^{(0)} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right) \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2}. \qquad (4.20)$$

Подставив в выражение для Π найденное выражение для G, получим

$$\Pi(q) = \sum_\lambda \frac{2e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3} \int \frac{f_\lambda^{(0)}(\varepsilon'_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) - f_\lambda^{(0)}(\varepsilon'_{\mathbf{p}})}{-iq_4 - \varepsilon'_{\mathbf{p}} + \varepsilon'_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} d^3 p, \qquad (4.21)$$

где

$$\varepsilon'_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Sigma^*(\mathbf{p}). \qquad (4.22)$$

Найденный поляризационный оператор не исчерпывает все добавки, пропорциональные e^4. В самом деле, в этом приближении мы имеем три диаграммы для поляризационного оператора, представленные на рис. 1. Диаграммы a и b соответствуют тому, что в приближении e^2 мы учли массовую добавку к функции Грина G.

а *в* *с*

Рис. 1

Эти добавки к Π могут быть получены из выражения (4.21) для $\Pi(q)$, если выделить члены, пропорциональные e^4. Нетрудно найти диаграммы типа c, которые учитывают «обрастание» Г-функции. Эти диаграммы (см. рис. 1) включают G в приближении Хартри — Фока [см. (4.18) и (4.20)]:

$$\Pi_e(q) = -\sum_\lambda \frac{2e^4 z_\lambda^4}{(2\pi)^6 \beta^2} \sum_{p_4 p'_4} \int d^3 p\, d^3 p' G(p+q) G(p) D(p-p') G(p'+q) G(p') =$$

$$= -\sum_\lambda \frac{2e^4 z_\lambda^4}{(2\pi)^3} \int d^3 p \int d^3 p' \frac{[f_\lambda(\varepsilon'_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) - f_\lambda(\varepsilon'_{\mathbf{p}})]\,[f_\lambda(\varepsilon'_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}) - f_\lambda(\varepsilon'_{\mathbf{p}})]}{(\varepsilon'_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon'_{\mathbf{p}} - iq_4)(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)^2 (\varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'} - iq_4)}. \qquad (4.23)$$

В случае малых $\mathbf{q}$ имеем

$$\Pi_e(q) = -\sum_\lambda \frac{2e^4 z_\lambda^4}{(2\pi)^3} \int d^3 p\, d^3 p' \frac{\left(\mathbf{q} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{q} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}'}\right)}{\left(\mathbf{q} \frac{\partial \varepsilon'(p)}{\partial p} - iq_4\right)\left(\mathbf{q} \frac{\partial \varepsilon'(p')}{\partial \mathbf{p}'} - iq_4\right)(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}. \qquad (4.24)$$

Полагая в формуле (4.23) $\varepsilon'_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \varepsilon_p^0$, получим поправки, пропорциональные e^4, т. е. вычислим диаграмму c.

Окончательно имеем

$$\Pi_a + \Pi_b + \Pi_c \approx \sum_\lambda \frac{2e^4 z_\lambda^4}{(2\pi)^3} \int d^3 p\, d^3 p' \frac{[f_\lambda(\varepsilon^0_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) - f_\lambda(\varepsilon^0_{\mathbf{p}})]}{(\varepsilon^0_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon^0_{\mathbf{p}} - iq_4)^2} \times$$

$$\times \frac{[f_\lambda(\varepsilon^0_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}) - f_\lambda(\varepsilon^0_{\mathbf{p}'})]\,[\varepsilon^0_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}} - \varepsilon^0_{\mathbf{p}'} + \varepsilon^0_{\mathbf{p}} - \varepsilon^0_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}]}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 (\varepsilon^0_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon^0_{\mathbf{p}'} - iq_4)}. \qquad (4.25)$$

Как будет показано в гл. 3, § 3, полученные выражения для Π [формулы (4.11) и (4.25)] достаточны для получения энергетического спектра плазмонов. Для получения энергетического спектра ферми-возбуждений необходимо найти массовый оператор и вершинную часть в соответствующем приближении, что для случая однородной плазмы не представляет особого труда.

§ 5. Система частиц, взаимодействующих по закону Кулона (неподвижные ионы [53])

Представляет интерес и другой предельный случай, когда ионы так коррелированы со своими электронами, что имеет место существенное нарушение трансляционной инвариантности. Последнее осуществляется, например, в статистической теории атома. В этом случае ионы можно считать в первом приближении неподвижными в своих ячейках (атомах) и их приближенно рассматривают как внешнее кулоновское поле. Эта задача может быть сведена к взаимодействию электронов со скалярной компонентой электромагнитного поля. [D_0 по-прежнему определяется соотношением $D_0(x, y) = V(x-y)$.] Поскольку распределение ионов существенно неравномерно, «одночастичные» функции Грина уже не зависят только от разности пространственных координат (зависимость от четвертых компонент по-прежнему разностная). Таким образом, необходимо получить систему уравнений для функций Грина при наличии внешнего поля, нарушающего трансляционную инвариантность системы.

Для простоты рассмотрим приближение, когда $\Gamma = \gamma$ (это практически хорошее приближение для атомных систем). Можно показать, что в этом случае уравнения для функций Грина имеют следующий вид [52]:

$$\{i(p_4 + i\mu + ie\langle\varphi(x)\rangle)\,\gamma_4 + m + \gamma\nabla_x\}\,G(p_4, \mathbf{x}, \mathbf{x}') +$$
$$+ \int \textstyle\sum^*(p_1, x, y)\,G(p_4, \mathbf{y}, \mathbf{x}')\,d^3y = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta\left(p_4 - \frac{2n+1}{\beta}\pi\right); \tag{5.1}$$

$$-\Delta\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle = e\rho_{\text{ион}} + \frac{e}{\beta}\,\mathrm{Sp}\,\gamma_4\sum_{p_4} G(p_4, \mathbf{x}, \mathbf{x}); \tag{5.2}$$

$$-\Delta D(k_4, \mathbf{x}, \mathbf{x}') - \int \Pi(k_4, \mathbf{x}, \mathbf{y})\,D(k_4, \mathbf{y}, \mathbf{x}')\,d^3y = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'); \tag{5.3}$$

$$\textstyle\sum^*(p_4, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^2}{\beta}\sum_{k_4}\gamma_4 G(p_4 + k_4, \mathbf{x}, \mathbf{y})\,\gamma_4 D(k_4, \mathbf{y}, \mathbf{x}); \tag{5.4}$$

$$\Pi(k_4, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^2}{\beta}\,\mathrm{Sp}\sum_{p_4}\gamma_4 G(p_4 + k_4, \mathbf{x}, \mathbf{y})\,\gamma_4 G(p_4, \mathbf{y}, \mathbf{x}). \tag{5.5}$$

Перейдем к p-представлению относительно разности координат, т. е.

$$G(p_4, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int G(p_4, \mathbf{x}, \mathbf{p})\,e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,d^3p. \tag{5.6}$$

Опуская необходимые выкладки, приведем окончательный вид уравнения для функций Грина в рассматриваемом случае [53]:

$$[i\gamma_\nu p_\nu^* - \gamma_4\mu + m - e\gamma_4\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle + \textstyle\sum^*(x, p)]\,G(x, p) = \sum_n \delta\left(p_4 - \frac{2n+1}{\beta}\pi\right); \tag{5.7}$$

$$-\Delta\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle = e\rho_{\text{ион}} + \frac{e}{(2\pi)^3\beta}\,\mathrm{Sp}\int\gamma_4\int\sum_{p_4} G(\mathbf{x}, p)\,d^3p; \tag{5.8}$$

$$[(\mathbf{p}-i\nabla)^2-\Pi(\mathbf{x},p)]\,D(\mathbf{x},p)=1; \tag{5.9}$$

$$\sum\nolimits^{*}(\mathbf{x},p)=\frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\int\sum_{k_4}\gamma_4 G(\mathbf{x},p^*+k)\gamma_4 D(\mathbf{x},k)\,d^3k; \tag{5.10}$$

$$\Pi(\mathbf{x},k)=\frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{p_4}\mathrm{Sp}\int\gamma_4 G(\mathbf{x},p+k^*)\gamma_4 G(\mathbf{x},p)\,d^3p, \tag{5.11}$$

причем оператор ∇ действует на функции, расположенные справа от от него; $p_k^*=p_k-i\nabla_k$ для $k=1,2,3$, $p_4^*=p_4$.

Приближение Хартри в терминах полученных уравнений соответствует $\Gamma=\Pi=\Sigma^*=0$. В этом случае можно для G написать следующее символическое решение:

$$G(x,p)=\frac{\sum\limits_{n}\delta\left(p_4-\frac{2n+1}{\beta}\pi\right)}{i\gamma_\nu p_\nu^*-\gamma_4\mu+m-\gamma_4\langle e\varphi(x)\rangle}. \tag{5.12}$$

Нетрудно показать, что

$$-\frac{1}{2\beta}\mathrm{Sp}\sum_{p_4}G(x,p)=-\frac{1}{2\beta}\mathrm{Sp}\sum_{p_4}\frac{1}{ip_4-\mu+H}=$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\left[\frac{1}{1+\exp(H-\mu)\beta}-\frac{1}{1+\exp(\mu-H)\beta}\right], \tag{5.13}$$

где

$$H=\gamma_4(m-i\gamma_k p_k^*)-e\langle\varphi(x)\rangle,\ k=1,2,3. \tag{5.14}$$

В квазиклассическом приближении имеем

$$H^{\pm}=\pm\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}-e\langle\varphi(x)\rangle; \tag{5.15}$$

$$-\frac{1}{2\beta}\mathrm{Sp}\,\gamma_4 G(\mathbf{x},p)=\frac{1}{1+\exp(H^+-\mu)\beta}-\frac{1}{1+\exp(\mu-H^-)\beta}. \tag{5.16}$$

Таким образом, в приближении Хартри получаем следующее символическое уравнение для $\langle\varphi\rangle$ [53]:

$$\Delta\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle=-e\rho_{\text{ион}}+\frac{2e}{(2\pi)^3}\int\rho(\varepsilon_p)\,d^3p, \tag{5.17}$$

где $\rho=-\frac{1}{2\beta}\mathrm{Sp}\,\gamma_4\sum_{p_4}G(\mathbf{x},p)$ определяется формулой (5.13).

Мы получили обобщенную модель Томаса — Ферми со всеми квантовыми и релятивистскими добавками. В нерелятивистском приближении (5.13) и (5.16) и уравнения (5.17) совпадают по форме с операторными уравнениями, полученными Д. А. Киржницем [60].

Самосогласованное приближение с учетом принципа Паули соответствует тому, что по сравнению с приближением Хартри учитывается еще добавочно массовый оператор в первом приближении (в том смысле, что в массовом операторе полагаем $D=D_0$). При этом мы получаем в операторной форме обобщенную модель Томаса — Ферми — Дирака, со всеми квантовыми и релятивистскими добавками. Для простоты проведем необходимые выкладки в нерелятивистском приближении. В этом приближении $D_0(\mathbf{p})=\frac{1}{\mathbf{p}^2}$, а поэтому, повторяя предыдущие выкладки, получим

$$\sum\nolimits^{*}(p,x)=\frac{-2e^2}{(2\pi)^3}\int\rho(\varepsilon')\frac{1}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2}\,d^3p, \tag{5.18}$$

где
$$\rho(\varepsilon_p') = \frac{1}{1+\exp \varepsilon_p'\beta};$$
$$\varepsilon_p' = \frac{(\mathbf{p}-i\nabla)^2}{2m} - \left[\mu + e\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle - \Sigma^*(\mathbf{p}, \mathbf{x})\right]. \tag{5.19}$$

Для $\langle\varphi\rangle$ получаем следующее символическое уравнение обобщенной модели Томаса — Ферми — Дирака [1] (см. также [60]):
$$\Delta\langle\varphi\rangle = -e\rho_{\text{ион}} + \frac{2e}{(2\pi)^3}\int\rho(\varepsilon_p')\,d^3p. \tag{5.20}$$

Выше было приведено выражение для ρ в символической форме (в операторном виде); в квазиклассическом приближении это выражение приобретает простой вид
$$\rho_0 = \frac{1}{1+\exp\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e\langle\varphi\rangle + \Sigma^*(\mathbf{p},\mathbf{x}) - \mu\right]\beta}. \tag{5.21}$$

Квантовые добавки к ρ_0 могут быть найдены, если раскрыть полученную символическую операторную формулу для ρ. Однако в ряде случаев более удобным оказывается получить квантовые добавки (обусловленные внешним полем) непосредственно для функции Грина, используя для этого уравнение (5.7), после чего нахождение квантовых добавок к ρ_0 сводится к суммированию по p_4 выражения для G.

Для получения квантовых добавок к G удобно переписать уравнения для G в виде
$$G(p, \mathbf{x}) = G_{(0)}(p, \mathbf{x}) + G_{(0)}(p, x)\,LG(p, \mathbf{x}), \tag{5.22}$$

где в релятивистском случае
$$G_0(p, x) = \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4\mu + m - \gamma_4 e\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle + \Sigma^*(\mathbf{x}, p)}; \tag{5.23}$$
$$L = -\gamma_k\nabla_k - \left(\sum\nolimits^*(\mathbf{x}, p^*) - \sum\nolimits^*(\mathbf{x}, p)\right); \tag{5.24}$$

в нерелятивистском случае
$$G_0(p, \mathbf{x}) = \frac{1}{ip_4 - \mu - e\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle + \frac{p^2}{2m} + \sum^*(x, p)}; \tag{5.25}$$
$$L = \frac{\nabla^2}{2m} + \frac{i\mathbf{p}\nabla}{m}. \tag{5.26}$$

Методом последовательных приближений легко найти G в виде ряда, обусловленного квантовыми добавками поля $\langle\varphi\rangle$. При этом в качестве нулевого приближения для G берется функция G_0, которая в свою очередь является точным решением для функции Грина $G(p, x)$ в квазиклассическом приближении. В зависимости от конкретных условий можно выбирать различные значения для G_0 (содержащее Σ и φ или только φ

---

[1] В релятивистском случае $\rho = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\left[\frac{1}{1+\exp(H-\mu)\beta} - \frac{1}{1+\exp(\mu-H)\beta}\right]$, где $H = \gamma_4(m + i\gamma_k P_k^* + \Sigma^*(x, p^*) - e\langle\varphi\rangle)$, $k = 1, 2, 3$; Σ^* определяется формулой (5.10) в приближении Хартри — Фока.

и т. д., при этом, естественно, изменяется соответственно и L). Мы не станем здесь приводить указанные элементарные операции для получения n-ого члена ряда для G; отметим лишь, что с помощью полученного ряда квантовые добавки к ρ получаются тривиальным образом, поскольку $\rho = -\frac{1}{\beta}\sum_{p_4} G(\mathbf{x}, p)$, а суммирование по p_4 приводится элементарно, поскольку p_4 входит лишь через G_0.

В некоторых случаях оказывается существенным просуммировать все члены типа $\mathbf{p}\nabla\varphi$ (например, для нахождения поведения функции распределения системы вблизи границы Ферми [61]). Это можно сделать операторным методом, но более удобно получить непосредственно из уравнения для G. Для этого необходимо решать уравнение для функции Грина с учетом члена $\mathbf{p}\frac{\nabla}{m}$, т. е. следующее приближенное уравнение:

$$\left[ip_4 - \mu + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - i\frac{\mathbf{p}\nabla}{m} - e\varphi(\mathbf{x}) + \sum\nolimits^*(\mathbf{p}, \mathbf{x})\right]G = 1, \tag{5.27}$$

здесь по сравнению с точным уравнением для G в нерелятивистском приближении мы пренебрегли[1] членом $\frac{\nabla^2}{2m}$. Нетрудно убедиться, что уравнение (5.27) имеет следующее решение:

$$G(\mathbf{x}, p) = i\int_0^\infty d\nu\left[\theta(-p_4)e^{-i\nu\left((ip_4-\mu+\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right)-iF(\nu,\mathbf{p},\mathbf{x})} - \right.$$

$$\left. - \theta(p_4)\, e^{i\nu\left(ip_4-\mu+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)-iF(-\nu,\mathbf{p},\mathbf{x})}\right]; \tag{5.28}$$

$$F(\nu, \mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{-e^{-\nu\frac{\nabla\mathbf{p}}{m}}+1}{\frac{\mathbf{p}}{m}\nabla}\left[e\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle - \sum\nolimits^*(\mathbf{x}, \mathbf{p})\right] =$$

$$= \int_0^\nu d\nu'\left[\sum\nolimits^*\left(\mathbf{x} - \nu'\frac{\mathbf{p}}{m}, \mathbf{p}\right) - e\varphi\left(\mathbf{x} - \frac{\nu'\mathbf{p}}{m}\right)\right]. \tag{5.29}$$

В импульсном представлении имеем

$$F(\nu, \mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{m}{(2\pi)^{3/2}}\left[e\langle\varphi(\mathbf{k})\rangle - \sum\nolimits^*(\mathbf{k}, \mathbf{p})\right]\frac{e^{-i\nu\frac{\mathbf{pk}}{m}}-1}{i\mathbf{pk}}. \tag{5.30}$$

---

[1] Этот член может быть учтен методом последовательного приближения, где в качестве нулевого приближения взято решение для $G(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, полученное из уравнения (5.27). Заметим, что частично этот член легко учесть в рамках решения (5.30), а именно: необходимо в (5.30) сделать замену $\mathbf{pk} \to \mathbf{pk} + \mathbf{k}^2/2$ и соответственно (5.31) принимает при этом вид

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu}{\operatorname{sh}\frac{\pi\nu}{\beta}}\exp\left\{i\nu\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\left[e\varphi(\mathbf{k}) - \sum\nolimits^*(\mathbf{k}, \mathbf{p})\right]\frac{e^{i\nu\left(\frac{\mathbf{kp}}{m}+\frac{\mathbf{k}^2}{2m}\right)}-1}{\frac{\mathbf{kp}}{m}+\frac{\mathbf{k}^2}{2m}}\, e^{ikx}.\right.$$

Не представляет труда найти в этом приближении выражение для ρ; после проведения суммирования по p_4 получим

$$-\frac{1}{2}+\rho(\mathbf{x},\mathbf{p})=-\frac{1}{\beta}\sum_{p_4}G(\mathbf{x},p)=\frac{i}{2\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu}{\operatorname{sh}\frac{\pi\nu}{\beta}}\exp\times$$

$$\times\left[i\nu\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\mu\right)-iF(-\nu,\mathbf{p},\mathbf{x})\right]=\frac{i}{2\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu}{\operatorname{sh}\frac{\pi\nu}{\beta}}\exp\left\{i\nu\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\mu\right)-\right.$$

$$\left.-i\int\limits_0^{-\nu}d\nu'\left[e\left\langle\varphi\left(\mathbf{x}-\frac{\nu'\mathbf{p}}{m}\right)\right\rangle-\sum\nolimits^*\left(\mathbf{x}-\frac{\nu'\mathbf{p}}{m},\mathbf{p}\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{i}{2\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu}{\operatorname{sh}\frac{\pi\nu}{\beta}}\exp\left\{i\nu\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\mu\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{m}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\left[e\langle\varphi(\mathbf{k})\rangle-\sum\nolimits^*(\mathbf{k},\mathbf{p})\right]\frac{(e^{i\nu\frac{\mathbf{kp}}{m}}-1)}{(\mathbf{kp})}e^{ikx}\right\}. \tag{5.31}$$

В частности, разлагая $F(\nu, \mathbf{p}, \mathbf{x})$ в ряд по ν и удерживая первый член ряда, получим квазиклассическое приближение, если ограничиться только двумя членами ряда, то получим для ρ выражение, совпадающее с результатом, полученным операторным методом, когда просуммированы все члены с первым коммутатором $[\frac{\mathbf{p}\nabla}{m},\varphi]$ (см. формулу (12) в работе [61]). В этом случае

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{p})=\frac{1-is}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ist^2}\times$$

$$\times\frac{dt}{1+\exp\beta\left\{\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\mu-e\varphi(\mathbf{x})+\sum^*(\mathbf{p},\mathbf{x})+2t\left|\mathbf{p}\nabla\left(e\varphi-\sum^*\right)\right|^{1/2}\right\}}, \tag{5.32}$$

где $s=\dfrac{\mathbf{p}\nabla(e\varphi(\mathbf{x})-\sum^*(\mathbf{x},\mathbf{p}))}{|\mathbf{p}\nabla(e\varphi(\mathbf{x})-\sum^*(\mathbf{x},\mathbf{p}))|}$.

Корреляционные добавки в рассматриваемом случае имеют еще более существенное значение [62], и для нахождения их достаточно найти поляризационный оператор в первом приближении. Так, согласно (5.11) и (5.25), в нерелятивистском случае в квазиклассическом пределе получим

$$\Pi'_n(q,\mathbf{x})=\frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{f_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-f_{\mathbf{p}}}{\varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}-\varepsilon_{\mathbf{p}}-i\frac{2\pi n}{\beta}}d^3p, \tag{5.33}$$

где

$$f_{\mathbf{p}}=\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)\beta}$$

[при малых температурах более точно взять выражение для $f_{\mathbf{p}}$ по формуле (5.31) или (5.32)];

$$\varepsilon_{\mathbf{p}}=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-e\langle\varphi(\mathbf{x})\rangle-\frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int f_{\mathbf{p}'}\frac{d^3p}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}. \tag{5.34}$$

С помощью $\Pi_\Lambda^{(1)}$ и φ нетрудно найти термодинамический потенциал, который в случае наличия внешнего поля может быть записан в виде

$$\Omega = \Omega|_{e=0} - \frac{2}{(2\pi)^3}\int_0^e de' f(\mathbf{p}) \langle\varphi(\mathbf{x})\rangle d^3p\, d^3x -$$
$$- \frac{1}{(2\pi)^3\beta}\int_0^e \frac{de'}{e'} \sum_n \prod_n^{(1)} (p, \mathbf{x}) D_n(p, \mathbf{x})\, d^3p d^3x. \qquad (5.35)$$

Приближенно в квазиклассическом пределе имеем

$$\Omega_{\text{кор}} = \Omega - \Omega_{\text{Хартри—Фока}} = \frac{1}{2(2\pi)^3\beta} \sum_n \int \Big[\ln\Big(1 - \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi_n^{(1)}(k^2, \mathbf{x})\Big) +$$
$$+ \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi_n^{(1)}(k^2, \mathbf{x})\Big] d^3k d^3x. \qquad (5.36)$$

В заключение заметим, что в том случае, когда корреляционные добавки существенны, необходимо их учесть в уравнении для $\langle\varphi\rangle$. Для этого необходимо в уравнении для G взять массовый оператор Σ в приближении, где $D = \frac{1}{k^2 - \Pi^{(1)}}$, и, вообще говоря, учесть также влияние Γ.

Используя спектральную формулу для G, можно формально получить точное уравнение для $\langle\varphi\rangle$. В самом деле, $G(p_4, \mathbf{x})$ можно представить в виде

$$G(p_4, \mathbf{x}) = \int \frac{f(\mathbf{x}, s)}{s - \mu + ip_4}\, ds, \quad p_4 = \frac{2n+1}{\beta}\pi, \qquad (5.37)$$

где $f(\mathbf{x}, s)$ зависит от $\varphi(\mathbf{x})$ и эта зависимость определяется совместной системой уравнений для G, D, φ. Уравнение для $\langle\varphi\rangle$, согласно (5.2), приобретает следующий вид:

$$\Delta\varphi = -e\rho_{\text{ион}} + e\int_0^\infty \rho(s, \mathbf{x})\, ds, \qquad (5.38)$$

где

$$\int \rho(s, x)\, ds = -\frac{1}{\beta}\operatorname{Sp}\gamma_4 G(x, x) =$$
$$= \int \frac{1}{2}\operatorname{Sp}\{\gamma_4 f(\mathbf{x}, s)\}\left[\frac{1}{1+\exp(s-\mu)\beta} - \frac{1}{1+\exp(\mu+s)\beta}\right] ds. \qquad (5.39)$$

Полученное уравнение является обобщением модели Томаса — Ферми с учетом квантовых, обменных и корреляционных добавок.

§ 6. Система частиц с короткодействующим потенциалом [53]

Рассмотрим систему ферми-частиц с короткодействующим потенциалом взаимодействия V. Плотность гамильтониана взаимодействия имеет вид

$$\frac{1}{2} g\psi_s^*(x)\psi_{s_1}^*(y) V(x-y)\psi_{s_1}(y)\psi_s(x). \qquad (6.1)$$

Следуя § 1, можно в этом случае получить операторное решение для интеграла состояния

$$z = z_0 \exp - \frac{1}{2}\left\{g\beta v \sum_{pp'q} \frac{\delta}{\delta\eta_s^*(p+q)} \frac{\delta}{\delta\eta_{s_1}^*(p'-q)} V(q) \frac{\delta}{\delta\eta_{s_1}(p')} \frac{\delta}{\delta\eta_s(p)}\right\} \times$$
$$\times \exp\frac{1}{v\beta}\sum_p \eta_s^*(p) G_{ss_1}^0(p)\eta_{s_1}(p), \qquad (6.2)$$

$$G^0_{ss_1} = \frac{\delta_{ss_1} \sum^n \delta\left(p_4 - \frac{2n+1}{\beta}\pi\right)}{ip_4 - \mu + \frac{\mathbf{p}^2}{m}}, \quad q_4 = \frac{2n\pi}{\beta}; \quad p_4 = \frac{2n+1}{\beta}\pi. \tag{6.3}$$

Разлагая z или Ω [см. (1.17)] в ряд по g, получим в p-представлении все фейнмановские диаграммы для этого взаимодействия. Из (1.15) и (6.2) видим, что формально любое четырехфермионное взаимодействие может быть сведено к взаимодействию посредством промежуточного бозе-поля, причем функция распространения свободного бозе-поля $D_0(q) = V(q)$. Следовательно, и в этом случае можно получить для функций Грина систему уравнений типа (4.3) и (4.7).

Однако в случае короткодействующего потенциала становятся существенны высшие добавки по g к вершинной части Г. Это особенно важно в тех случаях, когда существуют связанные состояния для высших функций Грина, при этом более удобно решать систему зацепляющихся уравнений [1] для функций Грина. Такую систему зацепляющихся уравнений легко получить непосредственно из гейзенберговских уравнений для операторов поля или из функционального уравнения для z.

Эта система зацепляющихся уравнений для функций Грина имеет вид (спиновые индексы мы здесь не выписываем):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - \mu - \frac{\nabla_x^2}{2m}\right) G_1(x, x') - g\int V(x-y)\, G_2(x, y, y, x')\, d^4y = \delta(x - x'); \tag{6.4}$$

$$G_1(x, x')\left(-\frac{\partial}{\partial x_4'} - \mu - \frac{\nabla_{x'}^2}{2m}\right) - g\int G_2(x, y, y, x')\, V(y - x')\, d^4y = \delta(x - x'); \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - \mu - \frac{\nabla_x^2}{2m}\right) G_n(x, y_1, \ldots, y_{n-1}; y'_{n-1}, \ldots, y'_1 x') - \\ - g\int V(x - y_n)\, G_{n+1}(x, y_1, \ldots, y_n; y_n', \ldots, y_1' x)\, d^4y_n = \\ = \delta(x - x')\, G_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}; y'_{n-1}, \ldots, y'_n) + \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \delta(x - y'_m)\, G_{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}; y'_{n-1}, \ldots, y'_{m+1}, y'_{m-1}, \ldots, x')(-1)^m,\end{aligned} \tag{6.6}$$

где

$$G_n(y_1, \ldots, y_n; y'_n, \ldots, y'_1) = \langle T(\psi(y_1) \ldots \psi(y_n)\, \psi(y'_n) \ldots \psi(y'_1))\rangle. \tag{6.7}$$

С помощью этой системы уравнений мы можем получить для G_1 и G_2 систему двух уравнений. Массовый оператор выразится через двухчастичную функцию Грина G_2, причем для двухчастичной функции Грина получаем уравнение типа Бете — Сальпетера:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - \mu - \frac{\Delta}{2m}\right) G_{ss_1}(x, x') - g\int V(x-y)\, G_{ss_2s_2s_1}(x, y, y, x')\, d^4y = \delta_{ss_1}\delta(x - x'); \tag{6.8}$$

[1] Метод зацепляющихся уравнений применительно к статистике был сформулирован Н. Н. Боголюбовым [63].

$$G_{s_1s_2s_3s_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -G_{s_1s_3}(x_1, x_3)\,G_{s_2s_4}(x_2, x_4) + G_{s_1s_4}(x_1, x_4)\,G_{s_2s_3}(x_2, x_3) - \\ - g\int G_{s_1s_5}(x_1, x_5)\,G_{s_2s_6}(x_2, x_6)\,I_{s_5s_6s_7s_8}(x_5, x_6, x_7, x_8)\times \\ \times G_{s_7s_8s_3s_4}(x_7, x_8, x_3, x_4)\,d^4x_5\,d^4x_6\,d^4x_7\,d^4x_8. \quad (6.9)$$

Эффективный потенциал может быть найден в общем виде (см. [1]) в первом приближении [1]:

$$I(xyx'y') = D(x-y)\,\delta(x-x')\,\delta(y-y') \simeq \\ \simeq V(x-y)\,\delta(x_4-y_4)\,\delta(x-x')\,\delta(y-y');$$

система уравнений (6.8) и (6.9) принимает в p-представлении следующий вид [53]:

$$\left(ip_4-\mu+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+\sum\nolimits^{*}(p)\right)G_{s_1s_2}(p) = \sum_n \delta\left(p_4-\frac{2n+1}{\beta}\pi\right)\delta_{s_1s_2}; \quad (6.10)$$

$$\sum(p) = -\frac{g}{(2\pi)^6\beta^2}\sum_{p_4q_4}\int V(q)\,G_{s_1sss_2}(p+q, p'-q', p', p)\,G^{-1}_{s_1s_2}(p)\,d^3q\,d^3p; \quad (6.10a)$$

$$G_{s_1s_2s_3s_4}(p_1p_2p_3p_4) = (2\pi)^3\beta\,[G_{s_1s_4}(p_1)\,G_{s_2s_3}(p_2)\,\delta(p_1-p_4)\,\delta(p_2-p_3) - \\ - G_{s_1s_3}(p_2)\,G_{s_2s_4}(p_2)\,\delta(p_1-p_3)\,\delta(p_2-p_4)] - \\ - G_{s_1s_5}(p_1)\,G_{s_2s_6}(p_2)\,\frac{g}{(2\pi)^3\beta}\sum_{q_4}\int d^3q V(q)\,G_{s_5s_6s_3s_4}(p_1+q, p_2-q, p_3, p_4). \quad (6.11)$$

Поскольку $G(p)$ диагональна относительно спиновых индексов, то двухчастичная функция Грина отлична от нуля, когда $s_1 = s_3$, $s_2 = s_4$, или $s_1 = s_4$, $s_2 = s_3$. Рассмотрим более подробно случай, когда $s_1 = s_4$, $s_2 = s_3$. Перейдем к относительным импульсам p, p' и импульсу центра тяжести P:

$$p = \frac{1}{2}(p_1-p_2), \quad p' = \frac{1}{2}(p_4-p_3), \quad (6.12)$$
$$P = p_1+p_2 = p_3+p_4.$$

Получим уравнение

$$S_1(p, p', P) \equiv G\left(\frac{1}{2}P+p, \frac{1}{2}P-p, \frac{1}{2}P-p', \frac{1}{2}P+p'\right)\times \\ \times G^{-1}\left(\frac{1}{2}P+p'\right)G^{-1}\left(\frac{1}{2}P-p'\right) = \beta(2\pi)^3\delta(p-p') - \\ - G\left(\frac{1}{2}P+p\right)G\left(\frac{1}{2}P-p\right)\frac{g}{2\pi^3\beta}\sum_{q_4}\int d^3qV(q)\,S_1(p-q, p', P). \quad (6.13)$$

Поскольку потенциал $V(q)$ не зависит от q_4, то достаточно знать функцию $S_1(p, p', P)$, просуммированную по четвертой координате. Обозна-

---

[1] Заметим, что в том случае, когда потенциал одновременно слабо затухает на больших расстояниях, лучшее приближение получим, если взять в формуле (6.11) вместо $V(q)$ фукцию $D(q)$. Определяем ее из уравнения

$$D(q) = \frac{V(\mathbf{q})}{1-V(\mathbf{q})\,\Pi(\mathbf{q}, q_4)};$$

$$\Pi(\mathbf{q}, q_4) = \frac{2e^2}{(2\pi)^3}\int d^3p\,\frac{f_{\mathbf{p}}-f_{\mathbf{p+q}}}{\varepsilon_0(\mathbf{p}+\mathbf{q})-\varepsilon_0(\mathbf{p})-iq_4},$$

где $\varepsilon_0(p)$ — энергия квазичастиц с импульсом p.

чим эту функцию $S(p, p', P)$ и суммируя (6.13) по p_4, найдем

$$S(p_1p', P) - \frac{g}{(2\pi)^3}\Phi(p, P)\int V(p-q)S(q_1p', P)\,d^3q = \delta(p-p')(2\pi)^3, \quad (6.14)$$

где

$$\Phi(p, P) = \frac{1}{\beta}\sum_{p_4} G\left(\frac{1}{2}P + p\right)G\left(\frac{1}{2}P - p\right). \quad (6.15)$$

Целесообразно ввести эффективный потенциал $\Gamma(p, p', P)$, связанный с $S(p, p', P)$ соотношением

$$\Gamma(p, p', P) = \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3qV(p-q)S(q, p', P). \quad (6.16)$$

Для этой функции с помощью (6.14) получим уравнение

$$\Gamma(pp'P) - \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3qV(\mathbf{p}-\mathbf{q})\Phi(qP)\Gamma(qp'P) = gV(p-p'). \quad (6.17)$$

Опуская необходимые выкладки, приведем систему уравнения для функций Грина в рассматриваемом приближении:

$$\left(ip_4 - \mu + \frac{p^2}{2m} + \sum\nolimits^*(p)\right)G(p) = \sum_n \delta\left(p_n - \frac{2n+1}{\beta}\pi\right); \quad (6.18)$$

$$\sum\nolimits^*(p) = \frac{-2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{P_4}\int G(P-p)\Gamma\left(p - \frac{1}{2}P,\ p - \frac{1}{2}P,\ P\right)d^3P +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3\beta}\sum_{P_4}\int G(P-p)\Gamma\left(p - \frac{1}{2}P,\ \frac{1}{2}P - p,\ P\right)d^3P. \quad (6.19)$$

Причем Γ определяется уравнениями (6.17) и (6.15). С помощью этих уравнений можно построить ряд приближений для Γ, выразив, в частности, Γ через амплитуду рассеяния в среде (или в вакууме) при температуре, равной нулю.

В том случае, когда потенциал V слабо изменяется в импульсном пространстве $[V(q) \approx V_0]$, легко найти с помощью (6.17) выражение для Γ. В самом деле, в этом случае из (6.17) получим

$$x(P, p') - g_0V_0a(P)x(P, p') = gV_0a(P), \quad (6.20)$$

где $x(p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Phi(p, P)\Gamma(p, p', P)\,d^3p$,

$$a(P) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \Phi(p, P)\,d^3p. \quad (6.21)$$

Из (6.2) получаем

$$x(P, p') = \frac{\frac{g}{(2\pi)^3}V_0\int \Phi(p, P)\,d^3p}{1 - \frac{g}{(2\pi)^3}V_0\int \Phi(p, P)\,d^3p}. \quad (6.22)$$

Для $\Gamma(p,p',P)$ в этом случае, согласно (6.17), имеем

$$\Gamma(p, p', P) = gV(p-p') + V_0x(P, p') = \frac{gV_0}{1 - \frac{g}{(2\pi)^3}V_0\int \Phi(p, P)\,d^3p}. \quad (6.23)$$

Нетрудно найти приближенное решение уравнения (6.17) и в том случае, когда потенциал $V(q)$ имеет резкий максимум в узкой области значений q.

Решая совместно систему уравнений (6.17) и (6.19), полагая при этом в уравнениях (6.17) и (6.19) $G = G^0$, получим результаты «газового» приближения при температуре, отличной от нуля. В «газовом» приближении получаем следующую систему уравнений [53]:

$$\left(ip_4 - \mu + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \sum^*(p)\right) G(p) = \sum_n \delta\left(p_n - \frac{2n+1}{\beta}\pi\right); \tag{6.24}$$

$$\sum^*(p) = -\frac{2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{P_4}\int G_0(P-p)\,\Gamma\left(p-\frac{1}{2}P,\ p-\frac{1}{2}P,\ P\right)d^3P +$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^3\beta}\sum_{P_4}\int G_0(P-p)\,\Gamma\left(p-\frac{1}{2}P,\ \frac{1}{2}P-p,\ P\right)d^3P; \tag{6.25}$$

$$\Gamma(p, p', P) = gV(\mathbf{p}-\mathbf{p}') + g\int V(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,\Phi(q, P)\,\Gamma(q, p', P)\,d^3q, \tag{6.26}$$

где

$$\Phi(p, P) = \frac{1}{\beta}\sum_{p_4} G_0\left(\frac{1}{2}P + p\right) G_0\left(\frac{1}{2}P - p\right) = \frac{N(\mathbf{p}, \mathbf{P})}{-iP_4 - \frac{1}{4m}\mathbf{P}^2 - \frac{\mathbf{p}^2}{m} + 2\mu}; \tag{6.27}$$

$$N(\mathbf{p}, \mathbf{P}) = 1 - f^0_{\frac{1}{2}\mathbf{P}+\mathbf{p}} - f^0_{\frac{1}{2}\mathbf{P}-\mathbf{p}}; \qquad f^0 = \left[1 + \exp\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu\right)\beta\right]^{-1}.$$

Отсюда при температуре, равной нулю, получается система уравнений для функции Грина, выведенная В. М. Галицким [64].

В проблеме сверхпроводимости потенциал $V(q)$ отличен от нуля только вблизи поверхности Ферми и приблизительно постоянен.

С помощью (6.22) можно показать, что в этом случае при температуре, близкой к нулю, возникает связанное состояние двух «дырок» («частиц» в сфере Ферми) с наименьшей энергией при противоположных спинах и импульсах.

Поэтому при $\beta^{-1} \to 0$ образуется «конденсат» из таких пар. Существенно, что в данном случае из-за перестройки ферми-распределения недопустимо функцию $G(p)$ заменять на $G_0(p)$. Полученные результаты непосредственно обобщаются на случай взаимодействия бозе-частиц. Уравнения этого параграфа остаются в этом случае по виду почти одинаковыми, с той лишь разницей, что, во-первых, четвертые компоненты импульсов равны соответственно $\frac{2n\pi}{\beta}$ (для ферми-частиц они равны $\frac{2n+1}{\beta}\pi$) и, во-вторых, поскольку в этом случае операторы поля (а также внешние источники поля) коммутируют между собой, все функции Грина в правой части (6.6) (и соответственно в дальнейших формулах) входят с одинаковым знаком.

Вследствие того, что четвертые компоненты импульсов принимают значения $\frac{2n\pi}{\beta}$, функция распределения f^0 принимает в этом случае вид $f^0_{\mathbf{p}} = [1 - \exp(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\beta]^{-1}$. Формально все результаты могут быть записаны одинаково для обеих статистик, если писать $f^0_{\mathbf{p}}$ в виде $f^0_{\mathbf{p}} = \frac{1}{1-\exp[(\varepsilon - \mu)\beta + ip_4\beta]}$.

§ 7. Некоторые общие соотношения в статистической квантовой электродинамике [54]

Как известно, система уравнений для функций Грина квантовой статистики отлична как по форме, так и по содержанию от аналогичной системы уравнений для функций Грина обычной теории поля. Однако, как будет показано ниже, ряд общих соотношений, связанных с градиентной инвариантностью квантовой электродинамики, имеет место не только в обычной квантовой электродинамике, но и в статистической квантовой электродинамике.

В справедливости полученных ниже соотношений нетрудно убедиться по теории возмущений, анализируя простейшие фейнмановские диаграммы для квантовой статистики, однако более полное и строгое доказательство этих соотношений будет дано ниже с помощью точных уравнений для функций Грина квантовой статистики.

1. Соотношения типа Уорда для квантовой статистики

С помощью полученных ранее результатов можно вывести систему уравнений для функций Грина при наличии внешнего источника фотонного поля. Эта функция в импульсном представлении имеет вид

$$G^{-1}(p,\ p') = [+i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4\mu + m]\,\delta(p-p') - ie\gamma_\mu\langle A_\mu(p-p')\rangle + \Sigma^*(p,p'); \tag{7.1}$$

$$D_{\mu\nu}(k,\ k') = D^0_{\mu\nu}(k)\,\delta(k-k') + D^0_{\mu\nu_1}(k)\sum_{S_4}\int \Pi_{\nu_1\nu_2}(k,s)\,D_{\nu_2\nu}(s,\ k')\,d^3s; \tag{7.2}$$

$$\langle A_\mu(k)\rangle = D^0_{\mu\nu}(k)\,I_\nu(k) - D^0_{\mu\nu}(k)\frac{ie}{(2\pi)^3\beta}\operatorname{Sp}\gamma_\mu\sum_{p_4}\int G(p+k,\ p)\,d^3p; \tag{7.3}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k,\ k') = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\operatorname{Sp}\sum\int \gamma_\mu G(k+s,\ s_1)\,\Gamma_\nu(s_1,\ s_2,\ k')\,G(s_2,\ s)\,d^3s_1d^3s_2d^3s; \tag{7.4}$$

$$\Sigma^*(p,\ p') = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\sum\int \gamma_\mu G(p+s,\ s_1)\,\Gamma_\nu(s_1,\ p',\ s_2)\,D(s_2,\ s)\,d^3s\,d^3s_1d^3s_2; \tag{7.5}$$

$$\Gamma_\mu(p,\ p',\ k) = -\frac{\delta G^{-1}(p,\ p')}{\delta\langle ieA_\mu(k)\rangle} = \gamma_\mu\delta(p-p'-k) - \frac{\delta\Sigma^*(p,\ p')}{\delta ie\langle A_\mu(k)\rangle}. \tag{7.6}$$

В формулах (7.3) и (7.4) суммирование идет по четвертым компонентам импульсов, последние равны соответственно $\frac{2\pi n}{\beta}$ для фотонов и $\frac{2n+1}{\beta}\pi$ для фермионов:

$$\delta(k-k') = \delta(k-k')\,\delta(k_4-k_4'),\quad \text{где}\ \delta(k_4-k_4') = \begin{cases}1 & \text{при}\ k_4=k_4',\\ 0 & \text{при}\ k_4\neq k_4'.\end{cases}$$

Из (7.1) и (7.5), разлагая все величины в ряд теории возмущений, можно убедиться, что имеет место соотношение

$$G^{-1}(p-k,\ p') - G^{-1}(p,\ p'+k) = k_\mu\frac{\delta G^{-1}(p,\ p')}{\delta e\langle A_\mu(k)\rangle}. \tag{7.7}$$

Ниже мы покажем, что точная система уравнений (7.1) и (7.6) (не прибегая к теории возмущений) тоже допускает в качестве одного из своих следствий соотношение (7.7). В самом деле, образовав из (7.1) выражение для левой части (7.7), имеем

$$G^{-1}(p-k,\ p')-G^{-1}(p,\ p'+k)=-i\gamma_\rho k_\rho\delta(p-k-p')+$$
$$+\frac{e^2 i}{(2\pi)^3\beta}\sum\int\gamma_\mu\left[G(p-k+s,\ s_1)\frac{\delta G^{-1}(s_1,\ p')}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}-\right.$$
$$\left.-G(p+s,s_1)\frac{\delta G^{-1}(s_1,\ p'+k)}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}\right]D_{\nu\mu}(s_2,\ s)\,d^3s d^3s_1 d^3s_2. \qquad (7.8)$$

С другой стороны, из (7.1) и (7.6) для правой части (7.7) получим

$$k_\rho\frac{\delta G^{-1}(p,\ p')}{\delta e\langle A_\rho(k)\rangle}=-i\gamma_\rho k_\rho\delta(p-k-p')+\frac{e^2 i}{(2\pi)^3\beta}\sum\int\gamma_\mu\left[k_\rho\frac{\delta G(p+s,\ s_1)}{\delta e\langle A_\rho(k)\rangle}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\delta G^{-1}(s_1,\ p')}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}-G(p+s,\ s_1)\,k_\rho\frac{\delta^2 G^{-1}(s_1,\ p')}{\delta e\langle A_\rho(k)\rangle\,\delta e\langle A_\mu(s_2)\rangle}\right]\times$$
$$\times D_{\nu\mu}(s_2,\ s)\,d^3s d^3s_1 d^3s_2+\frac{e^2 i}{(2\pi)^3\beta}\sum\int\gamma_\mu G(p+s,\ s_1)\frac{\delta G^{-1}(s_1,\ p')}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}\times$$
$$\times k_\rho\frac{\delta D_{\nu\mu}(s_2,\ s)}{\delta e\langle A_\rho(k)\rangle}\,d^3s d^3s_1 d^3s_2=R. \qquad (7.9)$$

Согласно (7.7), левые части (7.8) и (7.9) равны. Докажем, что и правые части (7.8) и (7.9) тождественно равны.

Рассмотрим правую часть (7.9). Из-за закона сохранения четырехмерного тока имеем (см. § 2)

$$k_\mu\frac{\delta D_{\nu\rho}(s_1,\ s)}{\delta e\langle A_\mu(k)\rangle}=0.$$

Согласно (7.7), имеем

$$k_\rho\frac{\delta^2 G^{-1}(s_1,\ p')}{\delta e\langle A_\rho(k)\rangle\,\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}=\frac{\delta G^{-1}(s_1-k_1;\ p')}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}-\frac{\delta G^{-1}(s_1;\ p'+k)}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}. \qquad (7.7а)$$

После подстановки (7.7) и (7.7а) в правую часть (7.9) получим выражение

$$R=-i\gamma_\rho k_\rho\delta(p-k-p')-\frac{e^2 i}{(2\pi)^3\beta}\sum\int\gamma_\mu G(p+s,\ s_3)[G^{-1}(s_3-k,\ s_4)-$$
$$-G^{-1}(s_3,\ s_4+k)]\,G(s_4,\ s_1)\frac{\delta G^{-1}(s_1,\ p')}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}D_{\nu\mu}(s_2;\ s)\,d^3s\prod_{i=1}^{4}d^3s_i+$$
$$+\frac{e^2 i}{(2\pi)^3\beta}\sum\int\gamma_\mu G(p+s,\ s_1)\left[\frac{\delta G^{-1}(s_1-k,\ p')}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}-\right.$$
$$\left.-\frac{\delta G^{-1}(s_1,\ p'+k)}{\delta e\langle A_\nu(s_2)\rangle}\right]D_{\nu\mu}(s_2,\ s)\,d^3s_1 d^3s_2 d^3s. \qquad (7.9а)$$

После приведения подобных членов в (7.9а) получим, что правая часть (7.9а) тождественно совпадает с правой частью (7.8), тем самым мы показали, что точные уравнения для функций Грина в статистической квантовой электродинамике допускают в качестве одного из своих следствий соотношение (7.7).

Соотношение (7.7) эквивалентно бесконечному ряду соотношений, которые получаются из (7.7) путем последовательного дифференцирования по $\langle A\rangle$ и последующего приравнивания $\langle A\rangle=0$. Так, в частности, получим соотношения типа тождества Уорда применительно к квантовой статистике:

$$G^{-1}(p) - G^{-1}(p-k) = ik_\rho \Gamma_\rho(p, p-k, k);$$
$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_\nu} = i \lim_{\delta_\nu \to 0} \Gamma_\nu(p, p-\delta_\nu, \delta_\nu), \qquad (7.10)$$

где δ_ν — четырехвектор, у которого только ν-я компонента отлична от нуля. Анализ общего доказательства соотношения (7.7) позволяет, в частности, указать для каждой фейнмановской диаграммы G^{-1} (точнее для Σ^*) совокупность диаграмм вершинной части Γ, обеспечивающих выполнение соотношений (7.10). Это сделано на рис. 2, где диаграммы (до e^4) разбиты на группы, внутри которых выполнены соотношения (7.10).

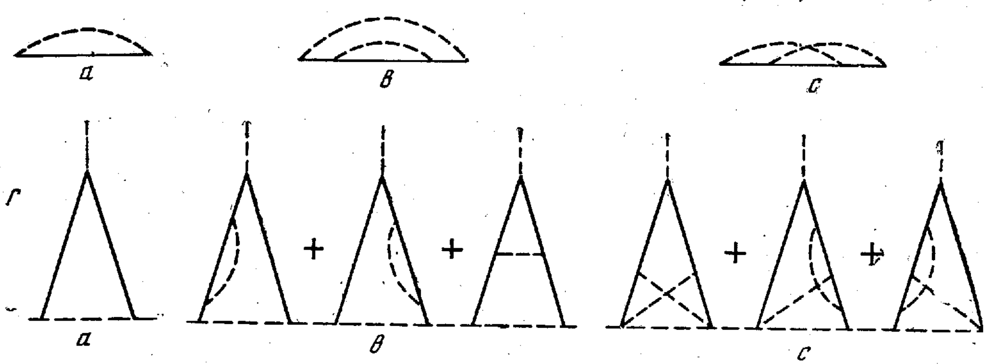


Рис. 2

Учитывая, что химический потенциал μ входит в $G^{-1}(p)$ в комбинации с ieA_4, можно показать, что другой предел для Γ, когда $k_4 < < k \to 0$, совпадает с $\frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu}$, т. е.

$$-\frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu} = \Gamma_4(p, p, 0). \qquad (7.11)$$

2. Некоторые соотношения для поляризационного оператора

а) Нетрудно показать, что нечетные производные по $\langle A \rangle$ от поляризационного оператора (т. е. замкнутые петли с нечетным числом внешних фотонных линий) в статистике равны нулю лишь в том случае, когда $\mu = 0$; в противном случае они пропорциональны нечетным степеням химического потенциала μ. В самом деле, следуя [4] из зарядово-симметричности теории, получим соотношение

$$\Pi_{\mu\nu}(k, k') = \frac{e^2}{2(2\pi)^3\beta} \mathrm{Sp} \left\{ \sum_{p_4} \int \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta e \langle A_\nu(k') \rangle} [G(p+k, k) - G^c(p+k, k)] \, d^3p \right\},$$

где G^c — функция Грина зарядово-сопряженного уравнения. Поскольку G^c как функционал от $\langle A \rangle$ отличается от G лишь знаком перед $\langle A \rangle$ и μ [т. е. $G^c(p, p_1 | A, \mu) = G(p, p_1 | -A, -\mu)$], то $\left[\frac{\delta \Pi_{\mu\nu}}{\delta \langle A(k_1) \rangle \ldots \delta \langle A(k_{2n+1}) \rangle} \right]_{\langle A \rangle = 0} \approx \approx \mu^{2n+1}$ и исчезают при $\mu = 0$ (аналог теоремы Фарри).

б) Четырехмерная дивергенция тензора поляризации $\Pi_{\mu\nu}$ равна нулю. Это имеет место и при наличии источника фотонного поля, когда $\langle A\rangle \neq 0$. В самом деле, согласно (7.4) и (7.7), имеем

$$k_\nu \Pi_{\mu\nu}(p, k) = \frac{ie^2}{(2\pi^2)\beta}\mathrm{Sp}\Big\{\sum_{p_4}\int \gamma_\mu G(p+s, s_1)\,[G^{-1}(s_1, s_2-k) - G^{-1}(s_1+k, s_2)]\,G(s_2, s)\,d^3s d^3s_1 d^3s_2\Big\} \equiv 0. \tag{7.12}$$

Дифференцируя (7.12) по $\langle A\rangle$ и полагая затем, что $\langle A\rangle = 0$, получим бесконечный ряд соотношений, эквивалентных операторному закону сохранения полного заряда. (Дальнейшее рассмотрение относится к случаю, когда $\langle A\rangle = 0$.) В обычной квантовой электродинамике из (7.12) следует, что тензор $\Pi_{\mu\nu}$ примет вид

$$\Pi_{\mu\nu} = (k_\mu k_\nu - k^2\delta_{\mu\nu})\,\Pi(k^2). \tag{7.13}$$

Другое положение имеет место в статистике. В этом случае $\Pi_{\mu\nu}(k)$ зависит от двух векторов: от текущего вектора и от вектора скорости среды u.

Поэтому из (7.12) следует, что тензор $\Pi_{\mu\nu}$ в системе покоя среды [только в этой системе координат справедливы уравнения (7.1) и (7.6)] имеет вид NB

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\right) A(\mathbf{k}^2, k_4^2) + \Pi_{44}\frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\frac{k_4^2}{\mathbf{k}^2},$$
$$\Pi_{\mu 4} = \Pi_{4\mu} = -\Pi_{44}\frac{k_\mu k_4}{\mathbf{k}^2}, \quad \text{где } \nu, \mu = 1, 2, 3. \tag{7.14}$$

В движущейся системе координат $\Pi_{\mu\nu}$ имеет следующий общий вид:

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(\frac{-k_\mu k_\nu}{k^2} + \delta_{\mu\nu}\right) A + \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \frac{k_\mu u_\nu}{(ku)} - \frac{k_\nu u_\mu}{(ku)} + \frac{u_\nu u_\mu k^2}{(ku)^2}\right) B, \quad (7.14')$$
$$\text{где } \nu, \mu = 1, 2, 3, 4.$$

в) Используя предыдущие результаты, можно получить следующие соотношения (без теории возмущений) для поляризационного оператора в нуле, а именно: все $\Pi_{\mu\nu}(0) = 0$, за исключением $\Pi_{44}(0)$, который оказывается равным

$$\Pi_{44}(0) = -e^2\frac{\partial}{\partial\mu}\rho(x=0), \tag{7.15}$$

где ρ — средняя плотность заряда в x-пространстве. Докажем соотношение (7.15).

Согласно (7.3) и (7.11), имеем

$$\Pi_{44}(k_4 = 0, k\to 0) = \Pi_{44}(0) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\mathrm{Sp}\left\{\int\sum\gamma_4 G(s)\times \Gamma_4(s, s, 0)\,G(s)\,d^3s\right\} = -\frac{e^2}{(2\pi^3)\beta}\mathrm{Sp}\left\{\int\sum\gamma_4 G(s)\frac{\partial G^{-1}(s)}{\partial\mu}G(s)d^3s\right\} =$$
$$= e^2\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{1}{(2\pi)^3\beta}\mathrm{Sp}\sum\int\gamma_4 G(s)\,d^3s\right]. \tag{7.16}$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, в формуле (7.16), есть плотность заряда в импульсном пространстве системы с обратным знаком, тем самым соотношение (7.15) доказано. Отсюда получаем точное выражение для дебаевского радиуса λ:

$$\lambda^{-2} = e^2 \frac{\partial}{\partial\mu} \rho (x = 0). \qquad (7.17)$$

При наличии частиц разного сорта n имеем (ez_n — заряд частицы):

$$\lambda^{-2} = e^2 \sum_{n=1}^{m} z_n^2 \frac{\partial \rho_n (x=0)}{\partial \mu_n}. \qquad (7.18)$$

Тем самым показано, что связь между λ_m и ρ, установленная в первом приближении по e^2 [см. формулу (4.13)], остается справедливой во всех приближениях с учетом корреляционных, квантовых и релятивистских добавок.

То обстоятельство, что в квантовой статистике все величины зависят добавочно от временно-подобного вектора скорости u среды, и приводит к тому, что при $k \to 0$ мы получаем, вообще говоря, разные результаты в зависимости от способа стремления k к нулю ($k^2 > k_4^2$ или $k^2 < k_4^2$). Так, например,

$$\lim_{k_4 < k \to 0} \Pi (k_4, k) \neq 0, \quad \lim_{k < k_4 \to 0} \Pi (k_4, k) = 0, \quad \text{где } k = \sqrt{\mathbf{k}^2}.$$

Следует заметить, что формально из-за дискретности k_4 имеет смысл лишь предел $\Pi_{44}(0, k)$ при $k \to 0$ и только этот предел совпадает с найденным значением (7.15).

§ 8. Статистическая электродинамика частиц со спином нуль

Для исследования электромагнитных свойств скалярных частиц и доказательства некоторых общих соотношений удобно исходить не из скалярного уравнения второго порядка, а из уравнения первого порядка в форме Кеммера — Дюфена.

Формально в этом случае теория очень сходна с уравнениями для электронов в обычной электродинамике, с той лишь разницей, что всюду вместо матриц Дирака γ_μ входят матрицы β_μ с перестановочным соотношением

$$\beta_\mu \beta_\rho \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\rho \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\nu\rho} + \beta_\nu \delta_{\rho\mu}. \qquad (8.1)$$

Алгебра, соответствующая β, имеет, как известно, два представления: первое (пятирядное) соответствует частицам спина нуль, второе (десятирядное) — частицам со спином единица. В дальнейшем будем заниматься только мезонами со спином нуль, а потому будем иметь дело с пятирядным представлением для β-матрицы[1]. Оператор полного заряда в этом слу-

---

[1] При вычислении матричных элементов полезны следующие формулы, имеющие место в этом случае:

$$\beta_\mu \beta_\rho \beta_r \beta_\mu = \delta_{\rho r}, \; \mathrm{Sp}\, 1 = 5, \; \mathrm{Sp}\, \frac{\beta_\lambda \beta_\lambda - 1}{3} = 1;$$

$$\mathrm{Sp}\, \beta_\lambda \beta_\mu = 2\delta_{\lambda\mu}; \; \mathrm{Sp}\, \beta_\lambda \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho = \delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\lambda\rho}\delta_{\mu\nu}; \; \beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\nu.$$

чае равен

$$N = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\beta_4\psi + \psi\beta_4\bar{\psi})\, d^3x. \tag{8.2}$$

При этом гейзенберговский оператор

$$\psi(x, \tau) = e^{+\tau(H-\mu N)}\psi(\mathbf{x})\, e^{-\tau(H-\mu N)};$$

$$\bar{\psi}(x, \tau) = e^{+\tau(H-\mu N)}\bar{\psi}(\mathbf{x})\, e^{-\tau(H-\mu N)},\quad \bar{\psi} = \psi^*\eta_4,$$

где H — полный гамильтониан; $\eta_4 = 2\beta_4^2 - I$; I — единичная матрица.

Аналогично, как в обычной теории частиц со спином нуль в β-формализме [3а], можно получить систему уравнений для функций Грина в случае статистики, которая в импульсном представлении имеет вид

$$\left[+ip_\nu\beta_\nu - \beta_4\mu + m + \sum^*(p)\right]G(p) = \sum_n \delta\left(p_4 - \frac{2n\pi}{\beta}\right); \tag{8.3}$$

$$D_{\nu\rho}(k) = D^0_{\nu\rho}(k) + D^0_{\nu\rho_1}(k)\,\Pi_{\rho_1\rho_2}D_{\rho_2\rho}(k); \tag{8.4}$$

$$\sum^*(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{p_4}\int \beta_\mu G(p+k)\,\Gamma_\mu(p+k, k)\,D_{\nu\mu}(k)\,d^3k; \tag{8.5}$$

$$\Pi_{\rho\nu}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\,\mathrm{Sp}\sum_{p_4}\int \beta_\rho G(p+k)\,\Gamma_\nu(p+k, k)\,G(p)\,d^3p; \tag{8.6}$$

$$\Gamma_\nu = \beta_\nu + \Lambda_\nu(p, k). \tag{8.7}$$

Система уравнений (8.3) и (8.7) по форме совпадает с электродинамикой частиц со спином $^1/_2$ с тем только отличием, что из-за коммутации бозе-полей (в случае спина $^1/_2$ операторы поля антикоммутируют) ток j_μ в уравнении для электромагнитного поля выражается через $\mathrm{Sp}\,\beta_\mu\, G(x, x)$ со знаком плюс (в случае спина $^1/_2$ этот член входит со знаком минус). Вследствие этого поляризационный оператор входит с другим знаком по сравнению с обычной электродинамикой. После проведения перенормировки получим следующую систему уравнений ($i\beta_\nu p^0{}_\nu$ нужно заменить на $-m_e$):

$$\left[ip_\nu\beta_\nu - \beta_4\mu + m_e + \sum\nolimits_1^*(p)\right]G(p) = \sum_n \delta\left(p_4 - \frac{2\pi n}{\beta}\right); \tag{8.8}$$

$$D_{\nu\rho}(k) = D^{(0)}_{\nu\rho}(k) + D^{(0)}_{\nu\rho_1}\Pi^{(1)}_{\rho_1\rho_2}(k)\,D_{\rho_2\rho}(k); \tag{8.9}$$

$$\sum\nolimits_1^*(p) = \sum^*(p) - \sum^*(p)\Big|_{\beta^{-1}=\mu=0} + \sum^R(p) + \beta_4\mu\,\frac{\partial\,\Sigma^*(p^0)}{\partial i\,\beta_\nu p^0{}_\nu}\Big]_{\beta^{-1}=\mu=0}; \tag{8.10}$$

$$\Gamma_\rho(p, k) = \Lambda_\rho(p, k) - \Lambda_\rho(p, k)\,|_{\beta^{-1}=\mu=0} + \Gamma^R_\rho(p, k); \tag{8.11}$$

$$\Pi^{(1)}_{\rho\nu} = \Pi_{\rho\nu}(k) - \Pi_{\rho\nu}(k)\,|_{\beta^{-1}=\mu=0} + \Pi^R_{\rho\nu}(k); \tag{8.12}$$

$$\sum^*(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\,z_1\sum_{k_4}\int \beta_\mu G(p+k)\,\Gamma_\nu(p+k, k)\,D_{\nu\mu}(k)\,d^3k; \tag{8.13}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\,\mathrm{Sp}\sum_{p_4} z_1\int \beta_\mu G(p+k)\,\Gamma_\nu(p+k, k)\,G(p)\,d^4k, \tag{8.14}$$

где $\Pi^R(k)$, $\sum^R_{(p)}\Gamma^R_{(p,k)}$ — перенормированные операторы в случае $\beta^{-1} = \mu = 0$ (см. гл. 4), в которых $k_4 = \frac{2\pi n}{\beta}$, $p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$; $\Gamma^R_\rho = \beta_\rho + \Lambda^R_\rho$ — перенормированная вершинная часть при $\beta^{-1} = \mu = 0$, т. е. перенорми-

?

Сравни с (8.3)

рованная вершина в обычной теории поля в эвклидовых переменных, зависящая от статистических импульсов p, k, четвертые компоненты которых дискретны.

Повторяя рассуждения § 7, можно показать, что градиентная инвариантность теории приводит к тому, что и в этом случае имеют место следующие соотношения:

$$G^{-1}(p) - G^{-1}(p-k) = ik_\rho \Gamma_\rho (p,\ p-k,\ k); \tag{8.15}$$

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial p_\nu} = i \lim \Gamma_\nu (p,\ p-k,\ k)\,|_{k_\mu < k_4 \to 0}; \tag{8.16}$$

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial \mu} = -\lim_{k_4<k\to 0} \Gamma_4 (p,\ p-k,\ k); \tag{8.17}$$

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}(p,\ k) = 0; \tag{8.18}$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \delta_{\mu\nu}\right) A\,(k,\ ku) + \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \frac{k_\mu u_\nu + k_\nu u_\mu}{ku} + \frac{u_\nu u_\mu k^2}{(ku)^2}\right) B\,(k^2,\ ku), \tag{8.19}$$

где u — четырехмерный вектор скорости среды;

$$\Pi_{44}(k_4 \to 0,\ 0) = 0,$$

$$-\Pi_{44}(0,\ k\to 0) = e^2 \frac{\partial}{\partial\mu} \operatorname{Sp}\left[\frac{1}{(2\pi)^3\beta} \sum_{p_4} \int \beta_4 G(p)\, d^3p\right] = e^2 \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\int n\,(p)\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\right] = e^2 \frac{\partial}{\partial\mu} N\,(\mathbf{x}=0), \tag{8.20}$$

где $N\,(x)$ — разность плотностей частиц и античастиц.

В заключение этого параграфа найдем поляризационный оператор в первом приближении по заряду e^2 (случай $\mu = 0$):

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3\beta} \operatorname{Sp} \sum_{p_4} \int \beta_\mu G^0\,(p+k)\, \beta_\nu G^0\,(p)\, d^3p, \tag{8.21}$$

где

$$G^0\,(p) = \frac{1}{i\beta_\mu p_\mu + m} = \frac{p^2 + m^2 + i\beta_\mu p_\mu\,(i\beta_\mu p_\mu + m)}{m\,(p^2+m^2)}. \tag{8.22}$$

Вычислив шпур, получим $\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu$

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{-2e^2}{(2\pi)^3\beta} \sum_{p_4} \int \frac{\delta_{\mu\nu}(p^2+m^2+kp+k^2) - k_\mu k_\nu - k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu - 2p_\mu p_\nu}{(p^2+m^2)\,[(p+k)^2+m^2]}\, d^3p \tag{8.23}$$

Опуская выкладки, приведем окончательное выражение для $\Pi_{\mu\nu}$ в первом приближении по e^2:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi^R_{\mu\nu} + \Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) + \frac{1}{2}\Pi^{(e)}_{\mu\nu}(k); \tag{8.24}$$

$$\Pi^R_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - k^2\delta_{\mu\nu}) \frac{e^2}{8\pi^2}\left[1 + \frac{4m^2+k^2}{3k^2}\left(1 - \sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}\, \operatorname{Arcth} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}}\right)\right]; \tag{8.25}$$

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu}(k) = (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \frac{e^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\varepsilon_p} \frac{1}{(\exp \varepsilon_p\beta - 1)} \times \frac{1}{|p|\,|k|} \ln \frac{(|k|^2 - 2|p|\,|k| + k_4^2)^2 + 4k_4^2\varepsilon_p^2}{(|k|^2 + 2|p|\,|k| + k_4^2)^2 + 4k_4^2\varepsilon_p^2}, \tag{8.26}$$

где

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\mathbf{p}^2}, \quad |\mathbf{k}| = \sqrt{\mathbf{k}^2};$$

$\Pi^{c}_{\mu\nu}(k)$ совпадает со статистическим поляризационным оператором для электронов [см. (9.6—9.10)], в котором ферми-распределение $\frac{1}{\exp \varepsilon_p\beta + 1}$ заменяется бозе-распределением $\left(\frac{1}{\exp \varepsilon_p\beta - 1}\right)$.

§ 9. Поляризационный оператор в квантовой статистике

Для нахождения термодинамических переменных и корреляционных функций необходимо знать поляризационный оператор.

В этом параграфе мы и найдем поляризационный оператор в случае электродинамики и мезодинамики (в первом приближении по квадрату заряда).

Естественно, что такой расчет имеет количественное значение лишь в электродинамике, что же касается мезодинамики, то в лучшем случае такой расчет может передать лишь качественную сторону явлений.

1. Электродинамика

В случае статистической квантовой электродинамики поляризационный оператор в первом приближении по e^2 имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\,\mathrm{Sp}\sum_{p_4}\int \frac{\gamma_\mu(-i\gamma_\rho p^*_\rho + m)\,\gamma_\nu(-i\gamma_\rho p^*_\rho + m - i\gamma_\rho q_\rho)}{[(p^* + q)^2 + m]\,[p^{*2} + m^2]}\,d^3p \qquad (9.1)$$

V

где

$$p^*_\mu = \begin{cases} p_\rho & \text{для } \rho = 1, 2, 3, \\ p_4 + i\mu & \text{для } \rho = 4. \end{cases}$$

Вычислив шпур, получим

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{4e^2}{(2\pi)^3\beta}\sum_{p_4}\int \frac{[p^{*2} + (p^*q) + m^2]\,\delta_{\mu\nu} - (2p^*_\mu p^*_\nu + p^*_\nu q_\mu + q_\nu p^*_\mu)}{[(p^* + q)^2 + m^2]\,[p^{*2} + m^2]}\,d^3p. \qquad (9.2)$$

Вычислив сумму по p_4, получим

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi^{(0)}_{\mu\nu}(q) + \pi^{(c)}_{\mu\nu}(q), \qquad (9.3)$$

$\Pi^{e}_{\mu\nu} \neq \pi^{e}_{\mu\nu}$

где $\Pi^{(0)}_{\mu\nu}$ — есть значение поляризационного оператора в эвклидовых переменных с формальной заменой $q_4 \to \frac{2n\pi}{\beta}$ (см. гл. 4, § 2). После перенормировки получаем для $\Pi^{(0)}_{\mu\nu}$ следующее выражение [см. (3.14) гл. IV]:

стр 110

$$(\Pi^0_{\mu\nu})^R = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\Pi^R(q); \qquad (9.4)$$

$$\Pi^R(q) = \frac{e^2}{12\pi^2}(q^2 + q_4^2)^2 \int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{dz^2\left(1 + 2\frac{m^2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{4m^2}{z^2}\right)^{1/2}}{z^2(z^2 + q^2 + q_4^2)}, \qquad (9.5)$$

где $q_4 = \frac{2\pi n}{\beta}$

$$\begin{aligned} \pi^{(c)}_{\mu\nu}(q) &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)A + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\,\frac{q_4^2}{q^2}\,\pi^{(c)}_{44}; \\ \pi^{(c)}_{\mu 4} &= \pi^{(c)}_{4\mu} = -\frac{q_4 q_\mu}{q^2}\,\pi^{(c)}{}_{44}; \\ \mu, \nu &= 1, 2, 3; \end{aligned} \qquad (9.6)$$

$$\pi_{44}^{(c)}(q) = -\frac{e^2}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\varepsilon_p}\left[\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p+\mu)\beta} + \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p-\mu)\beta}\right]\times$$
$$\times\left\{1 + \frac{q^2+q_4^2-4\varepsilon_p^2}{8pq}\ln a - i\,\frac{q_4\varepsilon_p}{2pq}\ln(b)\right\}; \tag{9.7}$$

$$A(q) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\varepsilon_p}\left[\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p+\mu)\beta} + \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p-\mu)\beta}\right]\times$$
$$\times\left\{1 - \frac{q_4^2}{q^2} + \frac{q^4-q_4^4+4\varepsilon_p^2 q_4^2+4p^2q^2}{8pq^3}\ln a -\right.$$
$$\left. - \frac{iq_4\varepsilon_p}{2pq^3}(q^2+q_4^2)\ln b\right\}, \tag{9.8}$$

где

$$a = \frac{(q^2-2pq+q_4^2)^2+4q_4^2\varepsilon_p^2}{(q^2+2pq+q_4^2)^2+4q_4^2\varepsilon_p^2}, \tag{9.9}$$

$$b = \frac{(q^2+q_4^2)^2-4(pq+iq_4\varepsilon_p)^2}{(q^2+q_4^2)^2-4(pq-iq_4\varepsilon_p)^2}. \tag{9.10}$$

Здесь и далее $\varepsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}, \quad q = \sqrt{\mathbf{q}^2} \quad p = \sqrt{\mathbf{p}^2}.$

Остановимся на асимптотике поляризационного оператора (при этом поскольку Π^R достаточно изучено в обычной теории, то здесь мы рассмотрим лишь статистическую часть поляризационного оператора).

1. При высокой температуре имеет место соотношение

$$-\pi_{44}^{(c)}(q)_{q_4<q\to 0} = \lambda_d^{-2} = \frac{e^2}{3\beta^2}. \tag{9.11}$$

Таким образом, с увеличением температуры дебаевский радиус уменьшается обратно пропорционально температуре. Уменьшение экранирующего радиуса с увеличением температуры объясняется здесь эффектом образования пар и может быть качественно понято даже из обычной нерелятивистской теории, где дебаевский радиус пропорционален $\sqrt{T/\rho}$. В релятивистском же случае, вследствие образования пар, плотность растет пропорционально T^3; тем самым получаем, что дебаевский радиус должен уменьшаться пропорционально температуре.

2. $A = \pi_{44} = 0$, когда $q < q_4 = 0$, причем это соотношение справедливо при любой температуре.

3. Когда $q_4 = 0$ и $q \to 0$,

$$A = -\frac{e^2 q^2 \ln m\beta}{6\pi^2}. \tag{9.12}$$

4. Когда $q_4 \neq 0$, $q \to 0$,

$$\pi_{44}^{(c)} = -\frac{4e^2q^2}{q_4^2\pi^2}\int_0^\infty \frac{p^2dp\left(\varepsilon_p^2-\frac{p^2}{3}\right)}{\varepsilon_p(4\varepsilon_p^2+q_4^2)}\left\{\frac{1}{1+\exp\beta(\varepsilon_p-\mu)} + [1+\exp\beta(\varepsilon_p+\mu)]^{-1}\right\};$$

$$A = \frac{q_4^2}{q^2}\pi_{44}. \tag{9.13}$$

5. Когда $q_4\beta \sim 1$, $q\beta \sim 1$,

$$\pi_{44}^{(c)} = -\frac{e^2}{\pi^2}\frac{2}{\beta^2}\int_0^\infty \frac{udu}{1+\exp u}\left[1 + \frac{k^2+k_4^2-4u^2}{8uq}\ln a - \frac{ik_4}{2k}\ln b\right],$$

$$A = -\frac{e^2}{\pi^2}\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty \frac{udu}{1+e^u}\left[1-\frac{k_4^2}{k^2} + \frac{k^4-k_4^4+4u^2(k^2+k_4^2)}{8uk^3}\ln a - \frac{ik_4(k^2+k_4^2)}{2k^3}\ln b\right], \tag{9.14}$$

$$a = \frac{(k^2+k_4^2-2uk)^2+4k_4^2u^2}{(k^2+k_4^2+2uk)^2+4k_4^2u^2}, \tag{9.15}$$

$$b = \frac{(k^2+k_4^2)^2-4(k+ik_4)^2u^2}{(k^2+k_4^2)^2-4(k-ik_4)^2u^2}, \tag{9.16}$$

где $k_4 = q_4\beta$, $k = q\beta$.

6. Когда $q_4\beta \to \infty$, $q\beta \to \infty$,

$$\pi_{44}^{(c)} = A = 0. \tag{9.16a}$$

Из (9.7) следует, что если $q^2 \ll \omega^2 < 4\hat{\varepsilon}_p^2$, то

$$\pi_{44}^{(c)} = q^2\left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2}+\frac{q^2b}{\omega^4}\right]; \quad \omega_0^2 = \frac{e^2}{\pi^2}\int\frac{n_p}{\varepsilon_p}\left(1-\frac{1}{3}\frac{p^2}{\varepsilon_p^2}\right)dp;$$

$$b = e^2/\pi^2\int\frac{n_p}{\varepsilon_p^3}\left(1-\frac{3}{5}\frac{p^2}{\varepsilon_p^2}\right)dp,$$

где $\omega^2 = -q_4^2$; $n_p = \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p-\mu)\beta} + \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p+\mu)\beta}$.

Заметим, что асимптотические формулы удобно получить из следующих выражений для $\pi_{\mu\nu}^{(c)}$, эквивалентных (9.6) — (9.8):

$$\pi_{44}^{(c)} = \frac{e^2}{2\pi^3}\mathrm{Re}\left[\int\frac{d^3p}{\varepsilon_p}n_p\frac{pk-2p_4(k_4-p_4)}{k^2-2pk}\right]_{p_4=i\varepsilon_p},$$

$$\pi_{\nu\nu}^{(c)} = \frac{e^2}{\pi^3}\mathrm{Re}\left[\int\frac{d^3p}{\varepsilon_p}\frac{(p+k)p}{(k^2-2pk)}\right]_{p_4=i\varepsilon_p}.$$

В заключение заметим, что для нахождения термодинамических величин существенно знать $\Pi_{\mu\nu}D_{\nu\mu}$. Нетрудно убедиться, что эта величина простым образом связана с A и Π_{44}:

$$\Pi_{\mu\nu}D_{\nu\mu} = \frac{2A}{q^2+q_4^2-A} + \frac{\Pi_{44}}{q^2-\Pi_{44}}. \tag{9.17}$$

2. Псевдоскалярная теория

Рассмотрим симметричную псевдоскалярную мезонную теорию. Оператор γ в этом случае есть $\tau_i\gamma_5$, где τ_i — изотопические матрицы. При этом поляризационный оператор, согласно (2.15), приобретает вид

$$\Pi_{ij}(k) = \frac{g^2}{\beta(2\pi)^3}\mathrm{Sp}\left\{\sum_{p_4}\int\tau_i\gamma_5 G(p+k)\Gamma_j(p+k,k)G(p)d^3p\right\}. \tag{9.18}$$

Рассмотрим случай слабой связи и найдем $\Pi(k)$ в первом приближении по g^2. Подставив $G = G^0 = \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4\mu + m}$ и $\Gamma_i = \tau_i\gamma^3$ в выражение

(9.18) и произведя суммирование по $p_4=\frac{2(n+1)\pi}{\beta}$ (см. Приложение 3), получим

$$\Pi(k)=\Pi^0(k)-\frac{8g^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{p^2dp}{\varepsilon_p}\left[\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p-\mu)\beta}+\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p+\mu)\beta}\right]\times$$
$$\times\left(1+\frac{k^2+k_4^2}{8pk}\ln\frac{(k^2+k_4^2-2pk)^2+4k_4^2\varepsilon_p^2}{(k^2+k_4^2+2pk)^2+4k_4^2\varepsilon_p^2}\right),\qquad(9.19)$$

где $\Pi^0(k)$ — значение поляризационного оператора при химическом потенциале и температуре, равных нулю. Это значение совпадает с поляризационным оператором обычной теории в эвклидовых переменных (см. гл. IV, § 2). Проведя перенормировку, получим следующее выражение для перенормированного поляризационного оператора в первом приближении по g^2:

$$\Pi(k)=-\frac{8g^2}{(2\pi)^2}\int_m^\infty\sqrt{\varepsilon^2-m^2}\,d\varepsilon\left[\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p-\mu)\beta}+\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p+\mu)\beta}\right]\times$$
$$\times\left(1+\frac{\mathbf{k}^2+k_4^2}{8pk}\ln\frac{(k^2+k_4^2-2k\sqrt{\varepsilon^2-m^2})^2+4k_4^2\varepsilon^2}{(k^2+k_4^2+2k\sqrt{\varepsilon^2-m^2})^2+4k_4^2\varepsilon^2}\right)+$$
$$+\frac{g^2(k^2+k_4^2+\varkappa^2)^2}{(2\pi)^2}\int_{4m^2}^\infty\frac{z^2\sqrt{1-\frac{4m^2}{z^2}}\,dz^2}{(z^2+k^2+k_4^2)(z^2+\varkappa^2)^2},\qquad(9.20)$$

где $k_4=\frac{2\pi n}{\beta}$; $p=\sqrt{\varepsilon^2-m^2}$.

В частности, при $m\beta\to 0$

$$\Pi(0)=\frac{4g^2}{(2\pi)^2}\int_m^\infty\sqrt{\varepsilon^2-m^2}\,d\varepsilon\left[\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p-\mu)\beta}+\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p+\mu)\beta}\right]=$$
$$=-\frac{16g^2}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{\beta^2}\frac{\pi^2}{12}+\frac{m}{\beta}\left(\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^\infty\frac{udu}{(e^u+1)^2}\right)\right].\qquad(9.21)$$

В случае малых k асимптотика имеет вид

$$\Pi(k_4=0,\mathbf{k})=\Pi(0)-\frac{4\mathbf{k}^2g^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\varepsilon_p(1+\exp\beta\varepsilon_p)\,dp=$$
$$=\Pi(0)-\frac{2g^2\mathbf{k}^2}{(2\pi)^2}\ln m\beta.\qquad(9.22)$$

В том случае, когда $m^2\ll k^2\approx k_4^2\ll\frac{1}{\beta^2}$, получим для $\Pi(k)$ следующую асимптотику:

$$\Pi(k)=\frac{g^2}{(2\pi)^2}(k^2+k_4^2)\left[\ln\frac{(\mathbf{k}^2+k_4^2)}{m^2}-\ln(\mathbf{k}^2+\mathbf{k}_4^2)\beta^2\right].\qquad(9.23)$$

Нетрудно показать, что в том случае, когда k_4 и k стремятся к ∞ (т. е. k_4 и $k\gg 1/\beta$), вся статистическая часть поляризационного оператора исчезает и поляризационный оператор при $T=\beta^{-1}=\mu=0$ имеет вид

$$\Pi(k)=\frac{g^2}{4\pi^2}(k^2+k_4^2)\ln\left(\frac{k^2+k_4^2}{m^2}\right)\qquad(9.24)$$

при $k^2 \approx k_4^2 \gg \frac{1}{\beta^2}$. Таким образом, статистическая часть поляризационного оператора не приводит к трудностям при больших импульсах в отличие от той части поляризационного оператора, которая не исчезает при $T = \mu = 0$ и соответствует обычной теории.

В заключение отметим, что существует простое правило определения асимптотики по температуре фейнмановских диаграмм в статистике, а именно: степень роста диаграммы с температурой совпадает со степенью расходимости соответствующей диаграммы. Это обстоятельство существенно облегчает отбор важных диаграмм при большой температуре. Учитывая это правило, удается показать, что при больших температурах энергия и давление пропорциональны температуре в четвертой степени (для перенормированных взаимодействий), однако коэффициент пропорциональности может существенно отличаться от соответствующего коэффициента для идеального газа в том случае, когда частицы среды сильно взаимодействуют между собой. Этот эффект обусловлен главным образом увеличением плотности частиц среды за счет образования пар.

§ 10. Функциональный метод в квантовой статистике

В § 1 этой главы получены функциональные уравнения (1.10) для статистической суммы. Здесь мы остановимся более подробно на применении операторного решения этих уравнений к конкретным задачам. Операторное решение этих функциональных уравнений имеет вид [50] (см. 1.16):

$$Z = Z_0 \exp \int \left\{ \bar{\eta}(x) G\left(x, y \,|\, g \frac{\delta}{\delta I}\right) \eta(y)\, d^4y + \Pi\left(x \,\Big|\, \frac{\delta}{\delta I}\right) \right\} d^4x \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int I(x) D(x, y) I(y)\, d^4y\, d^4x \right\}, \tag{10.1}$$

где

$$\Pi\left(x \,\Big|\, \frac{\delta}{\delta I}\right) = -i\, \mathrm{Sp} \left\{ \int_0^g dg' \gamma G\left(x, x \,|\, g' \frac{\delta}{\delta I}\right) \right\} \frac{\delta}{\delta I}; \tag{10.2}$$

$G\left(x, y \,|\, g \frac{\delta}{\delta I}\right)$ — функция Грина фермиона во внешнем поле $\varphi(x)$ с формальной заменой $\varphi(x)$ на $\frac{\delta}{\delta I(x)}$. При этом $G(x, y \,|\, \varphi)$ определяется из следующих уравнений, определенных в интервалах x_4 и y_4 от 0 до β:

$$\begin{gathered}
[\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_4 \mu + m - ig\gamma\varphi(x)]\, G(x, y \,|\, \varphi) = \delta(x - y); \\
G(y, x \,|\, \varphi)(-\gamma_\mu \partial_\mu - \gamma_4 \mu + m - ig\gamma\varphi) = \delta(x - y).
\end{gathered} \tag{10.3}$$

При отсутствии взаимодействия $G(x, y \,|\, 0)$ определяется формулой (1.14).

Особо удобно сформулировать необходимые условия, определяющие решение (10.3) в случае квантовой статистики, когда система уравнений (10.3) записана в импульсном пространстве; при этом четвертые компоненты импульсов дискретны и равны $\frac{2\pi n}{\beta}$ или $\frac{2n+1}{\beta}\pi$ соответственно для бозе- и ферми-частиц.

Так же как и в обычной теории, необходимо в первую очередь найти функцию Грина во внешнем поле в хорошем приближении в интересующей нас области. Как будет показано, в ряде случаев это удается сделать.

1. Зависимость функций Грина в статистической электродинамике от продольного поля

Действуя тем же способом, как в § 10 гл. 1, можно оттрансформировать всю зависимость от продольной части электромагнитного поля в выражении для функции Грина во внешнем электромагнитном поле. При этом получим следующее выражение для $G(x, y \mid e\varphi_\mu)$:

$$G(x, x' \mid e\varphi_\mu) = G(x, x' \mid e\varphi_\mu^t)\, e^{ie[\varphi(x)-\varphi(x')]}, \tag{10.4}$$

где

$$\varphi_\mu = \varphi_\mu^t + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu};$$

φ_μ^t — поперечная часть (в четырехмерном смысле) электромагнитного поля; $\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$ — продольная часть электромагнитного поля. Следовательно, функциональная зависимость от источников продольного поля имеет вид (более подробно см. § 10 гл. 1):

$$G\left(x, x' \mid e\frac{\partial}{\partial I_\mu}\right) = G\left(x, x' \mid e\frac{\delta}{\delta I^t}\right) \exp ie\left[\frac{\delta}{\delta j(x)} - \frac{\delta}{\delta j(x')}\right], \tag{10.5}$$

где j — источник поля I и связан с продольной частью источника электромагнитного поля I_μ^l соотношением

$$j = \frac{\partial I_\mu^l}{\partial x_\mu}. \tag{10.5a}$$

Из (10.5), в частности, следует, что $\Pi\left(x \mid e\frac{\delta}{\delta I}\right)$ не зависит от продольной части.

Подставив найденное решение (10.5) в (10.1) и проведя функциональное дифференцирование[1] по j, получим выражение, подобное (10.11) гл. 1:

$$Z = Z_0 \exp\left\{\int \Pi\left(x \mid e\frac{\delta}{\delta I^t}\right) d^4x\right\}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{n=1}^{k} \int dx_n\, dx_n' \times\right.$$

$$\left. \times\, \overline{\eta}(x_n)\, G\left(x_n, x_n' \mid e\frac{\delta}{\delta I^t}\right) \eta(x_n')\right] \exp\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y \left\{I_\mu^t(x)\, D_{\mu\nu}(x-y)\, I_\nu(y) + \right.$$

$$+ \left[j(x) + ie\sum_{n=1}^{k}(\delta(x-x_n) - \delta(x-x_n'))\right] \Delta^l(x-y) \times$$

$$\left. \times \left[j(y) + ie\sum_{n=1}^{k}(\delta(y-x_n) - \delta(y-x_n'))\right]\right\}, \tag{10.6}$$

где $D_{\mu\nu}(x) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\partial_\rho^2}\right) D(x)$,

[1] При дифференцировании по $\frac{\delta}{\delta I_\mu^l}$ мы воспользовались соотношением (10.5a).

$$\Delta^l(x) = \frac{-d^l(\partial_\rho^2, u_\mu \partial_\mu)}{\partial_\rho^2} D(x), \tag{10.7}$$

$$D(k) = \frac{1}{(2\pi)^3 \beta} \sum_{k_4} \int \frac{d^3k}{k^2} e^{ikx}. \tag{10.8}$$

Таким образом, всю зависимость от продольной части электромагнитного поля удалось явно оттрансформировать и из (10.6) легко получить зависимость от продольного поля для любой конкретной функции Грина. Так, для «одночастичных» функций Грина фермиона имеем

$$G(x, y) = G^t(x, y) \exp e^2 (\Delta^l (x-y) - \Delta^l(0)); \tag{10.9}$$

$$\frac{\delta G(x,y)}{\delta I_\mu(z)} = \frac{\delta G(x,y)}{\delta I^l_\mu(z)} + \frac{\delta G(x,y)}{\delta I^l_\mu(z)} = \left(\frac{\delta G(x,y)}{\delta I_\mu}\right)^t \exp e^2 [\Delta^l(x-y) - \Delta^l(0)] +$$

$$+ ieG^t(x, y) \left[\frac{\partial \Delta^l(y-z)}{\partial z_\mu} - \frac{\partial \Delta^l(x-z)}{\partial z_\mu}\right]. \tag{10.10}$$

2. Скалярное взаимодействие с покоящимся нуклоном

Этот пример в случае обычной теории подробно рассмотрим в Приложении 1. В нашем случае уравнение для функций Грина имеет следующий вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + m - \mu - g\varphi(\tau)\right] G(\tau, \tau' \mid \varphi) = \delta(\tau - \tau'). \tag{10.11}$$

Уравнение (10.11) имеет следующее решение:

$$G(\tau, \tau' \mid \varphi) = G_0(\tau - \tau') \exp\left\{g \int_{\tau'}^{\tau} \varphi(s)\, ds\right\}, \tag{10.12}$$

где

$$G_0(\tau - \tau') = \frac{1}{\beta} \sum_{p_4} \frac{e^{ip_4(\tau-\tau')}}{-ip_4 + m - \tilde{\mu}} = \begin{cases} \dfrac{e^{-(m-\tilde{\mu})(\tau-\tau')}}{1+\exp(\tilde{\mu}-m)\beta} & \text{для } \tau - \tau' > 0 \\ -\dfrac{e^{-(m-\mu)(\tau-\tau')}}{1+\exp(m-\tilde{\mu})\beta} & \text{для } \tau - \tau' < 0, \end{cases} \tag{10.13}$$

$\tilde{\mu} = \mu + g\varphi(\omega = 0)$.

Из (10.12) следует выражение для $\Pi(x|\varphi)$. Подставив (10.12) в (10.1), получим:

$$\left(Z'_0 = Z_0 \exp \int d^3x \left\{\exp\beta\left(\mu + g\frac{\delta}{\delta I(\omega=0)}\right) - \exp\beta\mu\right\}\right),$$

$$Z = Z_0' \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \prod_{n=1}^{k} \int_0^\beta d\tau_n\, d\tau'_n \bar{\eta}(\tau_n)\, G_0(\tau - \tau')\, \eta(\tau'_n)\right] \times$$

$$\times \exp \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau\, d\tau' \int d^3x\, d^3x' \left\{\left[I(\tau, \mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{k} g \int_{\tau'_n}^{\tau_n} \delta(\tau - s)\, ds\right] D(x - x') \times\right.$$

$$\left. \times \left[I(\tau', \mathbf{x}') + \sum_{n=1}^{k} g \int_{\tau'_n}^{\tau_n} \delta(\tau'_n - s)\, ds\right]\right\}. \tag{10.14}$$

3. Квазиклассическое приближение

Представляет интерес найти квазиклассическое приближение к операторному решению для интеграла состояния.

Удобно уравнение для функции Грина во внешнем поле записать в представлении, когда относительный импульс явно выделен. Для этого будем искать $G(x, x'|\varphi)$ в виде

$$G(xx'|\varphi) = \frac{1}{\beta} \sum_{p_4=\frac{2n+1}{\beta}\pi} \int d^3p G(p, x) e^{ip(x-x')}. \qquad (10.15)$$

Из (10.15) и (10.3) получим следующие эквивалентные уравнения для определения $G(px)$:

$$\left.\begin{aligned} &[i\gamma_\mu p_\mu - \mu\gamma_4 + m + \gamma_\mu \partial_\mu - ig\gamma\varphi(x)] G(p, x) = 1; \\ &G(p, x)\left[i\gamma_\mu p_\mu - \mu\gamma_4 + m - ig\gamma\varphi\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right)\right] = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (10.16)$$

В частности, в нерелятивистском приближении из (10.16) следует, что $G(p, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_4} - \frac{\Delta}{2m} - \frac{i}{m}\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - g\varphi(x) + g\varphi\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right)\right] G(p, x) = 0. \qquad (10.17)$$

Пренебрегая квантовыми добавками, из (10.17) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_4} - \frac{i}{m}\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} - ig\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) G(p, x) = 0. \qquad (10.18)$$

Из (10.16) получим следующее операторное решение для $G(p, x)$:

$$G(p, x) = \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu - \mu\gamma_4 + m + \gamma_\mu\partial_\mu - ig\gamma\varphi(x)} = \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu - \mu\gamma_4 + m - ig\gamma\varphi\left(x - i\frac{\partial}{\partial p}\right)}. \qquad (10.19)$$

В квазиклассическом приближении имеем

$$G(p, x) = \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu - \mu\gamma_4 + m - ig\gamma\varphi(x) + \gamma_4\partial_4}. \qquad (10.20)$$

С помощью (10.19) легко найти и последующие квантовые добавки к $G_0(p, x)$; для этой цели более удобно второе выражение (10.19), не содержащее явно производные по x.

Как известно, все термодинамические переменные могут быть найдены, если вычислить в хорошем приближении поляризационный оператор. В рамках операторного решения (10.1) для определения термодинамических характеристик особый интерес представляет найти выражение для $\Pi\left(x \middle| \frac{\delta}{\delta I}\right)$. В том случае, когда число частиц велико, можно надеяться, что квазиклассическое приближение для поляризационной части $\Pi\left(x \middle| \frac{\delta}{\delta I}\right)$ приведет к разумным результатам. Ниже, на конкретных примерах взаимодействий, имеющих практический интерес, будет найдено квазиклассическое приближение к $\Pi\left(x \middle| \frac{\delta}{\delta I}\right)$; при этом мы, естественно, интересуемся лишь статистической частью от поляризационного оператора $\Pi\left(x \,\middle|\, \frac{\delta}{\delta I}\right)$, т. е. $\Pi\left(x \,\middle|\, \frac{\delta}{\delta I}\right) - \Pi\left(x \,\middle|\, \frac{\delta}{\delta I}\right)\Big|_{T=\mu=0}$.

а) Квантовая электродинамика. В этом случае в квазиклассическом приближении имеем

$$G(p, x \mid \varphi) = \frac{-i(p_4 + i\mu - e\varphi_4)\gamma_4 - i\gamma(\mathbf{p} - e\varphi) + m}{(p_4 - e\varphi_4 + i\mu)^2 + (\mathbf{p} - e\boldsymbol{\varphi})^2 + m^2}; \tag{10.21}$$

$$\Pi(x \mid \varphi_\mu) = -i\int_0^e de' \operatorname{Sp} \gamma_\mu \varphi_\mu G(x, x \mid \varphi) =$$
$$= \frac{2}{(2\pi)^3\beta}\int d^3p \left[\ln \frac{1 + \exp\beta(\mu - e\varphi_0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})}{1 + \exp\beta(\mu - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})} + \right.$$
$$\left. + \ln \frac{1 + \exp - \beta(\mu - e\varphi_0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})}{1 + \exp - \beta(\mu + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})}\right], \tag{10.22}$$

где $\varphi_4 = i\varphi_0(x, \omega = 0)$.

Из (10.22) легко найти асимптотическое выражение для $\Pi(x \mid \varphi)$ при $\beta \to \infty$ и $\beta \to 0$. Так, при температуре, равной нулю ($\beta \to \infty$), получим

$$\Pi(x \mid \varphi) = \frac{1}{3\pi^2}\int_0^e \sqrt{[(\mu - e'\varphi_0)^2 - m^2]^3}\,\varphi_0\, de' =$$
$$= \frac{1}{3\pi^2}\left\{\left(\frac{(-e\varphi_0 + \mu)^2}{4} - \frac{5m^2}{8}\right)(-e\varphi_0 + \mu)\sqrt{(e\varphi_0 - \mu)^2 - m^2} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\mu^2}{4} - \frac{5m^2}{8}\right)\mu\sqrt{\mu^2 - m^2} + \frac{3m^4}{8}\ln\frac{-e\varphi_0 + \mu + \sqrt{(e\varphi_0 - \mu)^2 - m^2}}{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}\right\}. \tag{10.23}$$

В другом предельном случае, когда $\beta \to 0$, получим

$$\Pi(x \mid \varphi) \approx \frac{2}{\pi^2\beta^4}\left(e^{e\varphi_0\beta} + e^{-e\varphi_0\beta} - 2\right). \tag{10.24}$$

С помощью (10.22) легко получить в нерелятивистском приближении следующие выражения:

$$\Pi(x \mid \varphi) = \frac{1}{\pi^2\beta}\int p^2 dp \ln \frac{1 + \exp\beta\left(\mu - e\varphi_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)}{1 + \exp\beta(\mu - \mathbf{p}^2 \mid 2m)}. \tag{10.25}$$

Из (10.25) получаем следующие асимптотические выражения для $\Pi(x \mid \varphi)$:
1) при $\beta \to 0$

$$\Pi(x \mid \varphi) = \frac{1}{\pi^2\beta}\int p^2 dp \exp\beta\left(\mu - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)\left(e^{-e\varphi_0\beta} - 1\right); \tag{10.26}$$

2) при $\beta \to \infty$

$$\Pi(x \mid \varphi) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2}\int_0^e (\mu - e'\varphi_0)^{3/2}\varphi_0 de' = \frac{2(2m)^{3/2}}{15\pi^2}\left[(\mu - e\varphi_0)^{5/2} - \mu^{5/2}\right]. \tag{10.27}$$

б) Псевдоскалярная теория. В случае псевдоскалярного взаимодействия

$$G(p, x \mid \varphi) \approx \frac{-\gamma_4 i(p_4 + i\mu) - i\gamma\mathbf{p} + m + ig\gamma_5\varphi(x, \omega = 0)}{(p_4 + i\mu)^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + g^2\varphi^2(x, \omega = 0)}. \tag{10.28}$$

Подставляя (10.28) в (10.2), найдем

$$\Pi(x|\varphi) = \frac{8}{(2\pi)^2\beta}\int_0^\infty p^2dp\left\{\ln\frac{1+\exp\beta(\mu-\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2+g^2\varphi^2})}{1+\exp\beta(\mu-\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})}+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{1+\exp-\beta(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2+g^2\varphi^2}+\mu)}{1+\exp-\beta(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}+\mu)}\right\}. \qquad (10.29)$$

Из (10.29) легко получить асимптотику при $\beta\to\infty$ и $\beta\to 0$.

в) Скалярное взаимодействие. Представляет интерес рассмотрение скалярного взаимодействия, поскольку четырехфермионное взаимодействие может быть сведено к взаимодействию посредством скалярного поля с функцией распространения свободного поля, равной потенциалу взаимодействия.

В этом случае

$$G(p,\ x|\varphi)\approx\frac{-i\gamma_\mu p_\mu+\mu\gamma_4+m+g\varphi(\mathbf{x},\ w=0)}{(p_4+i\mu)^2+\mathbf{p}^2+(m+g\varphi)^2}; \qquad (10.30)$$

$$\Pi(x|\varphi)=\frac{1}{\beta(2\pi)^3}\int_0^g dg'\,\mathrm{Sp}\sum_{p_4}\int d^3pG(p,x|g'\varphi)\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi^2\beta}\int_0^\infty p^2dp\left[\ln\frac{1+\exp-\beta(\sqrt{\mathbf{p}^2+(m+g\varphi)^2}-\mu)}{1+\exp-\beta(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}-\mu)}+\right.$$

$$\left.+\ln\frac{1+\exp(-\beta(\sqrt{\mathbf{p}^2+(m+g\varphi)^2}+\mu))}{1+\exp-\beta(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}+\mu)}\right]. \qquad (10.31)$$

В нерелятивистском приближении из (10.31) получим

$$\Pi(x|\varphi)=\frac{1}{\pi^2\beta}\int_0^\infty p^2dp\ln\frac{1+\exp\beta(\mu-g\varphi-\mathbf{p}^2/2m)}{1+\exp\beta(\mu-\mathbf{p}^2/2m)}. \qquad (10.32)$$

Нетрудно получить асимптотику для $\Pi(x|\varphi)$:
при $\beta\to 0$

$$\Pi(x|\varphi)=\frac{1}{\pi^2\beta}\int p^2dp\exp\beta(\mu-\mathbf{p}^2/2m)\left(e^{-\beta g\varphi(x,\ \omega=0)}-1\right); \qquad (10.33)$$

при $\beta\to\infty$

$$\Pi(x|\varphi)=\frac{2(2m)^{3/2}}{15\pi^2}\left(-\mu^{5/2}+(\mu-g\varphi)^{5/2}\right). \qquad (10.34)$$

С помощью найденных выражений для $\Pi(x|\varphi)$ можно получить из (10.1) все термодинамические переменные в квазиклассическом приближении.

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ КИНЕТИКИ

§ 1. Метод получения временнóй функции Грина в статистике [52]

До сих пор мы занимались температурной функцией Грина, дающей возможность вычислить все интересующие нас термодинамические характеристики системы. Однако для нахождения энергетического спектра системы, а также для нахождения кинетических коэффициентов неравновесной системы весьма существенно найти временные функции Грина в статистике. Тем самым удается найти в полном объеме аналитические свойства функций Грина в комплексной плоскости энергии. В то время как в предыдущей главе все операторы поля в выражениях для функций Грина были выражены в зависимости от x_4, в настоящей главе мы займемся отысканием функций Грина, выраженных через операторы поля, зависящие от времени t. Начнем с рассмотрения временной одночастичной функции Грина в статистике G^c $(x, t; x', t')$. Последнюю определяем следующим образом

$$G^c(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = i\langle T(\psi(\mathbf{x}, t)\bar{\psi}(\mathbf{x}', t'))\rangle. \tag{1.1}$$

Символ $\langle\ \rangle$ означает усреднение по каноническому ансамблю. Для удобства сравнения с температурной функцией Грина зависимость от t любого гейзенберговского оператора f $(\mathbf{x}, t)$ обобщается следующим образом:

$$f(\mathbf{x}, t) = e^{i(H-\mu N)t} f(\mathbf{x})\, e^{-i(H-\mu N)t}. \tag{1.2}$$

С помощью (1.1) — (1.2) легко получить спектральные представления для временной функции Грина, а именно

$$G^c(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t-t') =$$

$$= \frac{i}{Z}\begin{cases} \sum\limits_{n,m}\psi_{nm}(\mathbf{x})\bar{\psi}_{mn}(\mathbf{x}')\exp\left[(\mu N_n - E_n)\beta + i(E_n - E_m - \mu N_n + \mu N_m)(t-t')\right] \\ \qquad\qquad \text{при } t-t' > 0, \\ \sum\limits_{n,m} -\psi_{nm}(\mathbf{x})\bar{\psi}_{mn}(\mathbf{x}')\exp\left[(\mu N_m - E_m)\beta + i(E_n - E_m - \mu N_n + \mu N_m)(t-t')\right] \\ \qquad\qquad \text{при } t-t' < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Сравнивая (1.3) и (2.10) гл. II, видим, что переход от температурной функции Грина G (для которой развит удобный аппарат счета) к временной функции Грина G^c осуществляется аналитическим продолжением по четвертой координате. Действительно, G^c $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t')$ в интервале $t - t' > 0$ является аналитическим продолжением по x_4 (заменой $x_4 \to it$) температурной функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', x_4 - x_4')$, найденной в интервале $0 > x_4 - x_4' > -\beta$.

Таким образом, задача нахождения G^c с помощью температурной функции Грина G сводится в первую очередь к восстановлению вида температурной функции Грина в интервале $(0,\beta)$ и $(-\beta,0)$. Для этого используем спектральное представление функции G $(x,x',x_4 - x'_4)$. Согласно (2.10) гл. II эта функция Грина имеет следующий спектральный вид:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_4) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', w)\, dw}{ip_4 - \mu + w}, \tag{1.4}$$

где

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_4) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\beta}^{+\beta} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', x_4 - x_4')\, e^{-ip_4(x_4 - x_4')}\, d(x_4 - x_4'); \tag{1.5}$$

$$p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta};$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \sum_{n,m} \psi_{nm}(\mathbf{x}) \bar{\psi}_{mn}(\mathbf{x}') \exp[(\Omega + \mu N_n - E_n)\beta] \times$$
$$\times (1 + \exp - (\omega_{nm} - \mu)\beta)\, \delta(\omega - \omega_{nm}).$$

С помощью спектрального представления (1.4) и (1.3) получим выражен для искомых функций Грина через одну и ту же спектральную пл ность f, а именно:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', x_4 - x_4') =$$
$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \dfrac{\exp[-(\omega - \mu)(x_4 - x_4')]}{1 + \exp[-(\omega - \mu)\beta]}, & \text{когда } \beta > x_4 - x_4' > 0, \\ -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \dfrac{\exp[-(\omega - \mu)(x_4 - x_4')]}{1 + \exp(\omega - \mu)\beta}, & \text{когда } -\beta < x_4 - x_4' < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

$$G^c(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t - t') =$$
$$= i \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \dfrac{\exp[-i(\omega - \mu)(t - t')]}{1 + \exp[-(\omega - \mu)\beta]}, & \text{когда } t - t' > 0, \\ -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \dfrac{\exp[-i(\omega - \mu)(t - t')]}{1 + \exp(\omega - \mu)\beta}, & \text{когда } t - t' < 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Сделав фурье-преобразование по $t - t'$, получим спектральное представление для временной функции Грина

$$G^c(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \left[\frac{\delta_+(p_0 + \mu - \omega)}{1 + \exp[-(\omega - \mu)\beta]} - \frac{\delta_-(p_0 + \mu - \omega)}{1 + \exp(\omega - \mu)\beta} \right], \quad (1.8)$$

где

$$G^c(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ip_0 t} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}' t)\, dt;$$

$$\delta_\pm(\alpha) = \int\limits_0^\infty \exp(\pm i\alpha t)\, dt = \pi\delta(\alpha) \pm \frac{i}{\alpha}; \quad (1.9)$$

при этом p_0 пробегает непрерывный ряд значений в интервале $-\infty$ до $+\infty$.

В случае пространственно-однородных систем, когда имеет место и пространственная трансляционная инвариантность, формулы (1.4) и (1.8) приобретают вид:

$$G(\mathbf{p}, p_4) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega f(p, \omega)}{\omega - \mu + ip_4}; \quad (1.10)$$

$$G^c(\mathbf{p}, p_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\mathbf{p}, \omega) \left\{ \mathrm{P} \frac{1}{\omega - \mu - p_0} + i\pi\delta(\omega - \mu - p_0)\, \mathrm{th}(\omega - \mu)\frac{\beta}{2} \right\}. \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует соотношение между действительной и мнимой частями для временно́й функции Грина, полученное Л. Д. Ландау [65]:

$$\operatorname{Re} G^c(\mathbf{p}, p_0) = \frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{cth} \frac{\omega\beta}{2} \frac{\operatorname{Im} G^c(\mathbf{p}, \omega)}{\omega - p_0} d\omega. \tag{1.12}$$

Из соотношения (1.12) следует [1], что G^c, рассматриваемая как функция комплексной переменной p_0, не является аналитической. Однако она простым образом связана с запаздывающей (опережающей) функцией, которая аналитична в верхней (нижней) полуплоскости p_0.

Приведенные выше формулы легко обобщаются на случай, когда операторы поля подчиняются статистике Бозе.

В этом случае спектральные представления принимают вид:

а) для температурной функции Грина D имеем

$$D(\mathbf{k}, k_4) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(\mathbf{k}, \omega)}{\omega - \mu + ik_4}, \tag{1.13}$$

где $k_4 = \frac{2\pi n}{\beta}$;

б) для временно́й функции Грина в этом случае имеем

$$D^c(\mathbf{k}, k_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\mathbf{k}, \omega) \left\{ \mathrm{P} \frac{1}{\omega - \mu' - k_0} + i\pi \operatorname{cth} \frac{\omega - \mu'}{2} \beta \delta(\omega - \mu' - k_0) \right\}; \tag{1.14}$$

$$\operatorname{Re} D^c(\mathbf{k}, k_0) = \frac{1}{\pi} \mathrm{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{th} \frac{\omega\beta}{2} \frac{\operatorname{Im} D^c(\mathbf{k}, \omega)}{\omega - k_0} d\omega. \tag{1.15}$$

В приведенных формулах (1.13—1.15) μ' — химический потенциал бозе-частиц. В том случае, когда число бозе-частиц не сохраняется (например для фононов, фотонов), химический потенциал $\mu' = 0$. Не представляет труда получить из приведенных формул спектральные соотношения для временны́х функций Грина в предельном случае, когда температура равна нулю ($\beta \to \infty$). Действительно, из (1.8) при $\beta \to \infty$ имеем

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \int_{\mu}^{\infty} \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)\, d\omega}{\omega - \mu - p_0 - i\varepsilon} - \int_{-\infty}^{\mu} \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)\, d\omega}{\omega - \mu - p_0 + i\varepsilon}; \tag{1.16}$$

$$\operatorname{Im} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0 - \mu) = \begin{cases} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0), & \text{когда } p_0 > \mu, \\ -f(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0), & \text{когда } p_0 < \mu. \end{cases} \tag{1.17}$$

Следует заметить, что аналогичные соотношения могут быть получены и для массового оператора.

---

[1] Используя соотношение $\mathrm{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x-y)(x-y')} = -\pi^2 \delta(y - y')$, получим выражение $\operatorname{Im} G$ через $\operatorname{Re} G$:

$$\operatorname{Im} G = \frac{1}{\pi} \operatorname{th} \left(\frac{\omega\beta}{2} \right) \mathrm{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} G(\mathbf{p}, \omega)}{\omega - p_0} d\omega. \tag{1.11a}$$

Переход к временны́м переменным в случае температуры, равной нулю может быть осуществлен непосредственно во всех формулах гл. II для температурных функций Грина путем формальной замены суммы по четвертым компонентам p (т. е. p_4) на интегралы по p_0 $\left(\frac{1}{\beta}\sum_{p_4} \to i\int \frac{dp_0}{(2\pi)}\right)$. При этом в указанных формулах температурные функции Грина G и заменяются на $(-iG^c)$ и $(-iD^c)$.

§ 2. Связь между различными функциями Грина в статистике

В предыдущем параграфе мы установили связь между температурной функцией Грина $G(p_4, \mathbf{p})$ и временно́й функцией Грина $G^c(p_0, \mathbf{p})$. Однако для ряда задач представляет интерес установить связь между различными временны́ми функциями Грина, которые строятся по аналогии с обычной теорией [3].

1. Для ферми-полей имеем:

$$G^{(n)}_{\alpha\beta'}(x-y) = i\langle[\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\beta'}(y)]_+\rangle; \tag{2.1}$$

$$G^{(+)}_{\alpha\beta'}(x-y) = i\langle\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\beta'}(y)\rangle; \tag{2.2}$$

$$G^{(-)}_{\alpha\beta'}(x-y) = -i\langle\overline{\psi}_{\beta'}(y)\psi_\alpha(x)\rangle; \tag{2.3}$$

$$G^{(n)}_{\alpha\beta'}(x-y) = G^{(+)}_{\alpha\beta'} - G^{(-)}_{\alpha\beta'}; \tag{2.4}$$

$$G^c_{\alpha\beta'}(x-y) = iT\langle\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\beta'}(y)\rangle = \theta(x^0-y^0)G^{(+)}_{\alpha\beta'}(x, y) + \theta(y^0-x^0)G^{(-)}_{\alpha\beta'}(x, y); \tag{2.5}$$

$$G^r_{\alpha\beta'}(x-y) = \theta(x^0-y^0)G^n_{\alpha\beta'}(x-y) = \begin{cases} i\langle[\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\beta'}(y)]_+\rangle & x^0 > y^0, \\ 0 & x^0 < y^0; \end{cases} \tag{2.6}$$

$$G^{(a)}_{\alpha\beta'}(x-y) = -\theta(y^0-x^0)G^{(n)}_{\alpha\beta'}(x-y), \tag{2.7}$$

где ψ-операторы взяты в обычном пространстве-времени в гейзенберговском представлении (см. § 1); символ $\langle\ \ \rangle$ означает усреднение по каноническому ансамблю; символ $[\ \ ]_+$ — антикоммутатор; G^n — перестановочная функция Грина; G^r — запаздывающая функция Грина.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x < 0; \end{cases}$$

$$G^{(+)}_{\alpha\beta'}(p_0, \mathbf{p}) = (2\pi)^4 i\sum_{nm}\exp[(\Omega+\mu N_n - E_n)\beta]\times$$
$$\times\psi_\alpha(0)_{nm}\overline{\psi}_{\beta'}(0)_{mn}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{m,n})\delta(p_0+\mu-\omega_{mn}) = (2\pi)if^{(+)}_{\alpha\beta'}(p_0+\mu, \mathbf{p}); \tag{2.8}$$

$$G^{(-)}_{\alpha\beta'}(p_0, \mathbf{p}) = -(2\pi)^4 i\sum_{nm}\exp[(\Omega+\mu N_n - E_n)\beta]\,\overline{\psi}_{\beta' nm}(0)\psi_{\alpha mn}(0)\times$$
$$\times\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{n,m})\delta(p_0+\mu-\omega_{nm}) = (2\pi)if^{(-)}_{\alpha\beta'}(p_0+\mu;\ \mathbf{p}) =$$
$$= -2\pi i f^+_{\alpha\beta'}(p_0+\mu, p)e^{-p_0\beta}; \tag{2.9}$$

$$G^{(n)}_{\alpha\beta'}(p_0, \mathbf{p}) = G^+_{\alpha\beta'} - G^-_{\alpha\beta'} = 2\pi i f^+_{\alpha\beta'}(p_0+\mu, \mathbf{p})[1+\exp(-p_0\beta)] =$$
$$= 2\pi i f_{\alpha\beta'}(p_0+\mu, \mathbf{p}); \tag{2.10}$$

$$G^r_{\alpha\beta'}(p_0, \mathbf{p}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\alpha\beta'}(\omega, \mathbf{p})\, d\omega}{\omega-\mu-p_0-i\varepsilon} = \int \Big\{ \mathrm{P}\, \frac{f_{\alpha\beta'}(\omega, \mathbf{p})}{\omega-\mu-p_0} + $$
$$+ i\pi\delta(\omega-\mu-p_0) f_{\alpha\beta'}(\omega, \mathbf{p}) \Big\} d\omega; \qquad (2.11)$$

$$G^{(a)}_{\alpha\beta'}(p_0, \mathbf{p}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\alpha\beta'}(\omega, \mathbf{p})}{\omega-\mu-p_0+i\varepsilon} d\omega; \qquad (2.12)$$

$$G^c_{\alpha\beta}(p_0, \mathbf{p}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{f^+_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p})\, d\omega}{\omega-\mu-p_0-i\varepsilon} - \frac{f^-_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p})\, d\omega}{\omega-\mu-p_0+i\varepsilon} \right) =$$
$$= \int f_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{p}) \left[\mathrm{P}\frac{1}{\omega-\mu-p_0} + i\pi\delta(\omega-\mu-p_0)\,\mathrm{th}(\omega-\mu)\frac{\beta}{2} \right] d\omega. \qquad (2.13)$$

В пределе нулевой температуры имеем $\mathrm{th}(\omega-\mu)\frac{\beta}{2} \to \frac{\omega-\mu}{|\omega-\mu|}$ и из (2.13) в этом случае при $\mu = 0$ следуют фейнмановские правила обхода полюса в обычной теории, а при $\mu \neq 0$ получаем известное правило обхода полюсов для функции Грина в среде [48]. Из определения G^c в силу правил коммутации гейзенберговских операторов при $t_1 = t_2$ имеем (спинорные индексы у G^r мы здесь опускаем):

$$G^r(\mathbf{x}-\mathbf{x}',\ t-t' = +0) = i\gamma_4\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int dp_0 e^{-ip_0\delta} G^r(\mathbf{p}, p_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega, \mathbf{p}) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ip_0\delta} dp_0}{\omega-\mu-p_0-i\varepsilon} =$$
$$= i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\omega, \mathbf{p})\, d\omega = i\gamma_4.$$

Следовательно, имеет место следующее равенство: $\int f(\omega, \mathbf{p})\, d\omega = \gamma_4$. Последнее приводит к следующей асимптотике для запаздывающих и опережающих функций при больших частотах:

$$G^r(\mathbf{p}, p_0) = G^a(\mathbf{p}, p_0) = -\frac{\gamma_4}{p_0}. \qquad (2.13а)$$

Нетрудно установить связь между G^r (G^a) и температурной функцией Грина. В самом деле, из (1.4) и (1.11) — (1.12) следует [53, 56]:

$$G\left(p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta},\ \mathbf{p}\right) = G^r(p_0 = -ip_4, \mathbf{p}) \text{ для } p_4 < 0; \qquad (2.14)$$

$$G\left(p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta},\ \mathbf{p}\right) = G^a(p_0 = -ip_4, \mathbf{p}) \text{ для } p_4 > 0. \qquad (2.15)$$

Поскольку запаздывающая (опережающая) функция аналитична в верхней (нижней) полуплоскости, то аналитическое продолжение, необходимое для построения по формулам (2.14) — (2.15) температурной функции Грина, может быть проведено. Задача построения функции G^r с помощью температурной функции Грина сводится к задаче аналитического продолжения с дискретного множества точек на всю верхнюю полуплоскость. Такое аналитическое продолжение может быть проведено, поскольку мы знаем не только температурные функции Грина в дискретных точках (для частот), но также и интегралы, определяющие эти функции, которые дают возможность привести выражения для температурной функции Грина к спектральному виду (1.4). Тем самым удается уже в температурном случае найти спектральную плотность f; последняя же, как мы видели, дает возможность построить все временны́е функции Грина. При этом для явного приведения температурной функции Грина к виду (1.4) достаточно в массовый оператор поставить всюду G в спектральной форме, и тем самым уравнения для температурных функций Грина приводятся к уравнениям для искомых спектральных плотностей.

Сравнивая спектральные представления для G^r, G^a и временно́й функции Грина G^c, получим, что главные значения в спектральной формуле совпадают у этих функций, но коэффициент при δ-функции («мнимая» часть) отличается у функции G^c на множитель $\operatorname{th} \frac{(p_0-\mu)}{2}\beta$ от соответствующего члена у функции G^r.

Согласно определению G^r и G^a, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}[G^r(x-y)]^+ = \gamma_4 (G^r(x-y))^* \gamma_4 = G^a(y-x);\\ \gamma_4 (G^r(k))^* \gamma_4 = G^a(k).\end{gathered} \tag{2.16}$$

Нетрудно выделить спинорную зависимость функции, а именно:

$$f_{\alpha,\beta}(p_0, \mathbf{p}) = (i\gamma_\nu p_\nu)_{\alpha\beta} f_1 + (i\gamma_4 p_4)_{\alpha\beta} f_2 + \delta_{\alpha\beta} f_3, \tag{2.17}$$

где $p_4 = ip_0$. В пределе, когда $\beta^{-1} \to 0$ и химический потенциал $\mu \to 0$, $f_2 \to 0$.

Следует заметить, что при получении спектральных представлений мы нигде не использовали конкретные свойства оператора ψ, кроме свойства коммутации и зависимости от одной точки x. Поэтому все результаты будут справедливы, если вместо ψ рассматривать, например, радиационный ферми-оператор первого порядка:

$$\eta(x) = ig\varphi(x)\gamma\psi(x), \quad \bar{\eta}(x) = ig\bar{\psi}\gamma\varphi.$$

В этом случае необходимо в формулах (2.8) — (2.13) всюду формально заменить $\psi(x) \to \eta(x)$, $\bar{\psi} \to \bar{\eta}$. Заметим также, что, используя уравнения для ψ в обобщенном гейзенберговском представлении $\left(\text{гамильтониан } H \text{ заменен на } H - \mu N \text{ или } \frac{\partial}{\partial x_4} \to \frac{\partial}{\partial x_4} - \mu,\ x_4 = it\right)$, получим

$$\eta(x) = ig\gamma\varphi(x)\psi(x) = (\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi(x); \tag{2.18}$$

$$\bar{\eta}(x) = ig\bar{\psi}\gamma\varphi = \bar{\psi}(x)(-\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m). \tag{2.19}$$

2 В случае бозе-полей рассмотрение аналогично предыдущему, с тем только отличием, что антикоммутатор всюду необходимо заменить на коммутатор. В этом случае имеем

$$D^{(n)}_{\alpha\beta}(x-y) = i\langle[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(y)]\rangle; \tag{2.20}$$

$$D^{+}_{\alpha\beta}(x-y) = i\langle\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(y)\rangle; \tag{2.21}$$

$$D^{-}_{\alpha\beta}(x-y) = -i\langle\varphi_\beta(y),\ \varphi_\alpha(\alpha)\rangle; \tag{2.22}$$

$$D^{c}_{\alpha\beta}(x-y) = iT\langle(\varphi_\alpha(x),\ \varphi_\beta(y))\rangle; \tag{2.23}$$

$$D^{r}_{\alpha\beta}(x-y) = \theta(x^0-y^0)\,D^{(n)}_{\alpha\beta}(x-y); \tag{2.24}$$

$$D^{a}_{\alpha\beta}(x-y) = -\theta(y^0-x^0)\,D^{(n)}_{\alpha\beta}(x-y); \tag{2.25}$$

$$D^{(n)} = D^{+} + D^{-}, \qquad D_{\alpha\beta}(x) = \theta(x^0)\,D^{+} - \theta(-x^0)\,D^{-}, \tag{2.26}$$

где α, β являются векторными индексами в случае электромагнитного поля или изотопическими индексами в случае заряженных мезонов (заметим, что в последнем случае $D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}D$); D^n — перестановочная функция Грина $[a, b] = ab - ba$; D^r — запаздывающая функция Грина; D^a — опережающая функция Грина; D^c — «причинная» функция Грина.

Перейдя к импульсному представлению, получим обычным способом следующую спектральную связь между функциями Грина: при этом для определенности полагаем химический потенциал для этого поля равным нулю:

$$D^{+}_{\alpha\beta}(p_0,\ \mathbf{p}) = (2\pi)^4\, i\sum_{n,m}\exp[(\Omega-E_n)\beta]\,\varphi_{\alpha}(0)_{n,m}\,\varphi_{\beta}(0)_{m,n}\times$$
$$\times\,\delta(p_0-\omega_{mn})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{mn}) = 2\pi i f^{+}_{\alpha\beta}(p_0,\ \mathbf{p}); \tag{2.27}$$

$$D^{-}_{\alpha\beta}(p_0,\ \mathbf{p}) = -(2\pi)^4\, i\sum_{n,m}\exp[(\Omega-E_n)\beta]\,\varphi_{\alpha}(0)_{nm}\,\varphi_{\beta}(0)_{mn}\times$$
$$\times\,\delta(p_0-\omega_{mn})\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_{mn})\exp(-\omega_{mn}\beta) = 2\pi i f^{-}_{\alpha\beta}(p_0,\ \mathbf{p}) =$$
$$= -2\pi i f^{+}(p_0,\ \mathbf{p})\exp(-p_0\beta); \tag{2.28}$$

$$D^{n}_{\alpha\beta}(p_0,\ \mathbf{p}) = 2\pi i\,(f^{+}_{\alpha\beta}+f^{-}_{\alpha\beta}) = 2\pi i f^{+}(p_0,\ \mathbf{p})\,(1-e^{-p_0\beta}) = 2\pi i f_{\alpha\beta}(p_0,\ \mathbf{p}); \tag{2.29}$$

$$D^{r}_{\alpha\beta'}(p_0,\ \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_{\alpha\beta'}(\omega,\ \mathbf{p})}{\omega-p_0-i\varepsilon}\,d\omega = 2\int_{0}^{\infty}\frac{f_{\alpha\beta'}(\omega,\ \mathbf{p})\,\omega}{(p_0+i\varepsilon)^2-\omega^2}\,d\omega; \tag{2.30}$$

$$D^{a}_{\alpha\beta'}(p_0,\ \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_{\alpha\beta}(\omega,\ \mathbf{p})}{\omega-p_0+i\varepsilon}\,d\omega = 2\int_{0}^{\infty}\frac{f_{\alpha\beta'}(\omega,\ \mathbf{p})\,\omega}{(p_0-i\varepsilon)^2-\omega^2}\,d\omega; \tag{2.31}$$

$$D^{c}_{\alpha\beta'}(p_0,\ \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{f^{+}_{\alpha\beta'}(\omega,\ \mathbf{p})}{\omega-p_0-i\varepsilon}+\frac{f^{-}_{\alpha\beta'}(\omega,\ \mathbf{p})}{\omega-p_0+i\varepsilon}\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha\beta'}(\omega,\ \mathbf{p})\left[\mathrm{P}\,\frac{1}{\omega-p_0}+i\pi\delta(\omega-p_0)\,\mathrm{cth}\,\frac{\omega\beta}{2}\right]d\omega. \tag{2.32}$$

В приведенных формулах мы использовали нечетность спектральной плотности f относительно ω. Нетрудно получить асимптотику функции Грина при больших p_0. Действительно, из правил коммутации для φ следует, что $-\int_{-\infty}^{\infty}\omega f_{\alpha\alpha'}(\omega,\ p)\,d\omega = \delta_{\alpha\alpha'}$, поэтому из (2.30) — (2.31) следует, что при $p_0\to\infty$ $D^{r}_{\alpha\alpha'} = D^{a}_{\alpha\alpha'} \simeq -\frac{\delta_{\alpha\alpha'}}{p_0^2}$. В предельном случае, когда температура равна нулю $\left(\operatorname{cth}\omega\beta \to \frac{\omega}{|\omega|}\right)$, мы получаем из (2. фейнмановский обход. Здесь рассматривались бозе-частицы, для ко рых химический потенциал равен нулю. Из приведенных формул вид что запаздывающая (опережающая) функция Грина аналитична в верх (нижней) полуплоскости p_0. При этом температурная функция Гр для $p_4 < 0$ совпадает с аналитическим продолжением D^r в верхней пол плоскости, и при $p_4 > 0$ — с аналитическим продолжением D^a в нижн полуплоскости, т. е.

$$D\left(p_4 = \frac{2n\pi}{\beta},\ p\right) = D^r(p_0 = -ip_4,\ p) \text{ для } p_4 < 0; \qquad (2.3$$

$$D\left(p_4 = \frac{2\pi n}{\beta},\ \mathbf{p}\right) = D^a(p_0 = -ip_4,\ \mathbf{p}) \text{ для } p_4 > 0. \qquad (2.3$$

Что касается связи радиационных операторов с функциями Гри и всевозможных их спектральных представлений, то этот вопрос подроб разобран в Приложении 6. Необходимо отметить, что приведенные зде спектральные формулы получены в предположении, что спектральны плотности достаточно убывают на бесконечности. В противном случа (это имеет место при написании аналогичных соотношений для массово или поляризационного операторов) необходимо применить обычную вы читательную процедуру (см. [3, § 48]).

Итак, мы убедились, что температурные и временные функции Грин определяются одной и той же спектральной плотностью. Потому мы може воспользоваться удобным аппаратом для температурных функций Грин и (учитывая спектральные представления для них) получить отсюда вы ражения непосредственно для интересующих нас спектральных плотно стей и, в частности, энергетический спектр возбужденных квази-частиц. Действительно, рассмотрим продолжение запаздывающей (опережающей) функции Грина в нижнюю (верхнюю) полуплоскость p_0. Поскольку она убывает на бесконечности и в верхней (нижней) полуплоскости запаздывающая (опережающая) функция аналитична, то в нижней (верхней) полуплоскости p_0 она не аналитическая и имеет особенности. Эти особенности имеют определенный физический смысл, а именно: полюса продолжения G^r в нижней полуплоскости p_0 дают энергетический спектр квазичастиц (возбуждения «частиц»), а полюса продолжения G^a в верхней полуплоскости p_0 определяют энергетический спектр (энергию и затухание) «дырок».

Итак, рассмотрим продолжение G^r в нижнюю полуплоскость p_0 (при нашем определении надо рассмотреть $p_0 + \mu$). Пусть при $p_0 + \mu = E_n(\mathbf{p}) - i\Gamma_n(\mathbf{p})$ возникающая особенность имеет вид полюса, т. е. [1]

$$G_r^{-1}[\mathbf{p},\ p_0 = E_n(\mathbf{p}) - \mu - i\Gamma_n(\mathbf{p})] = 0; \qquad (2.35)$$

$$D_r^{-1}[\mathbf{p},\ p_0 = E_n(\mathbf{p}) - i\Gamma_n(\mathbf{p})] = 0. \qquad (2.36)$$

Уравнения (2.35) — (2.36) и определяют $E_n(\mathbf{p})$ и $\Gamma_n(\mathbf{p})$.

[1] Соотношения (2.35)—(2.36) являются обобщением результатов работы [48] на случай температуры, отличной от нуля.

Наибольший интерес представляет случай, когда затухание Γ_n мало. В этом случае имеем:

а) Спектр бозе-возбуждений определяется из следующего уравнения:

$$-E_n^2+\mathbf{p}^2+\varkappa^2-\operatorname{Re}\Pi^r(\mathbf{p}^2,\ p_0^2=E_n^2)=0. \tag{2.37}$$

$$\Gamma_n(\mathbf{p})=\frac{\operatorname{Im}\Pi^r(\mathbf{p}^2,\ p_0^2=E_n^2)}{2E_n\left(1+\dfrac{\partial\operatorname{Re}\Pi^r(\mathbf{p}^2,p_0^2=E_n^2)}{\partial E_n^2}\right)}. \tag{2.38}$$

При этом поляризационный оператор запаздывающей функции Грина $\Pi^r(\mathbf{p},\ p_0)$ связан с температурным поляризационным оператором $\Pi(\mathbf{p},p_4)$ обычным соотношением $\Pi^r(\mathbf{p},p_0)=\Pi[\mathbf{p},\ p_4=i(p_0+i\varepsilon)]$, т. е. является аналитическим продолжением Π в полуплоскость $\operatorname{Re}p_4<0$.

б) Спектр ферми-возбуждения определяется из (2.35), и в нерелятивистском приближении мы получаем следующее уравнение при малом затухании

$$-E_n(\mathbf{p})+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+\operatorname{Re}\Sigma^*(\mathbf{p},\quad p_4=i(E_n^0-\mu))=0; \tag{2.39}$$

$$\Gamma_n(p)=\frac{\operatorname{Im}\Sigma^*\left(\mathbf{p},p_4=i\left(E_n^0-\mu-i\delta\right)\right)}{1-\dfrac{\partial\operatorname{Re}\Sigma^*\left(\mathbf{p},\ p_4=i\left(E_n^0-\mu\right)\right)}{\partial E_n}}, \tag{2.40}$$

где Σ^* — массовый оператор в статистике. До сих пор мы использовали аппарат температурных функций Грина для восстановления временны́х функций Грина в статистике. Можно развить удобный аппарат непосредственно для временных функций Грина, но с мнимой температурой. Такой аппарат, аналогичный рассмотренному в предыдущей главе, был развит И. Швингером и П. Мартином [55].

Переход к функциям Грина с мнимой температурой понадобился для того, чтобы явно учесть спектральные свойства для функций Грина (как это сделано нами в § 2 гл. II) в рамках самих уравнений. В этом представлении основной величиной теории является тот же производящий функционал $Z(\beta)$, но при мнимой температуре $\beta=is$ (аналог S-матрицы для конечного времени).

Можно показать, что в этом представлении система уравнений (2.12) — (2.16) гл. II для функций Грина принимает вид:

$$\begin{gathered}\{+ip_\nu\gamma_\nu-\gamma_4\mu+m+\Sigma^*(p)\}\,G(p)=\sum_n\delta_{p_0,\ \frac{(2n+1)\pi}{s}};\\
\{k^2+\varkappa^2-\Pi(k)\}\,D(k)=\sum_n\delta_{k_0,\ \frac{2n\pi}{s}};\\
\Sigma^*(p)=-\frac{g^2i}{(2\pi)^3s}\int\sum_{k_0}\gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k,\ k)\,D(k)\,d^3k;\\
\Pi(k)=-\frac{g^2i}{(2\pi)^3s}\int\sum_{p_0}\gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k,\ k)\,G(p)\,d^3p;\\
\Gamma(p,\ k)=\gamma+\frac{i}{(2\pi)^3s}\int\sum_{k'_0}G(p+k')\{[\Gamma(p+k',k)G(p+k'-k)\Gamma(p+k'-k,k')+\\
+\Gamma^{(1)}(p+k',\ p-k,\ k,\ k')]\,D(k')+\Gamma(p+k',\ k')\,D^{(1)}(k',\ k)\}\,d^3k'.\end{gathered} \tag{2.41}$$

Таким образом, система уравнений (2.41) для функций Грина отличается от уравнений (2.12) — (2.16) гл. II тем, что здесь вместо температуры входит величина s ($\beta \to is$) и соответственно $p_4 \to ip_0$, $k_4 \to ik_0$. Тем самым импульсное пространство становится здесь псевдоэвклидовым, причем четвертые компоненты импульсов принимают только дискретные значения.

Переход к интересующим нас временны́м функциям Грина совершается здесь также аналитическим продолжением, но не по времени, а по температуре.

Однако, как показали Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов [57], можно построить удобный расчетный аппарат и непосредственно для запаздывающих и опережающих функций Грина, не обращаясь при этом к процедуре аналитического продолжения.

§ 3. Энергетический спектр системы многих частиц (однородная модель)

В качестве иллюстрации метода нахождения спектра системы, указанного в § 1, рассмотрим здесь ряд простейших задач по нахождению спектра системы в однородной модели.

1. Однородная плазма (бозе-возбуждения). Для нахождения спектра бозе-возбуждения необходимо найти полюса аналитического продолжения температурной функции Грина. Для этого найдем аналитическое продолжение поляризационного оператора в этом случае.

Согласно § 4 гл. II, поляризационный оператор равен

$$\Pi(q,\ q_4) = \frac{2e^2 m_\lambda^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^2\,\beta q}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s-iq_4}\ln\frac{1+\exp\left\{\mu-\frac{m_\lambda}{2q^2}\left(s+\frac{q^2}{2m_\lambda}\right)^2\right\}\beta}{1+\exp\left\{\mu-\frac{m_\lambda}{2q^2}\left(s-\frac{q^2}{2m_\lambda}\right)^2\right\}\beta}, \tag{3.1}$$

где $q_4 = \frac{2\pi n}{\beta}$, $q = |\mathbf{q}|$. С другой стороны, спектральное представление имеет вид

$$\Pi(q,\ q_4) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(s,\ q)\,ds}{s-iq_4}. \tag{3.2}$$

Отсюда следует

$$\rho(s,\ q) = \frac{2e^2 m_\lambda^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^2\,\beta q}\ln\frac{1+\exp\left\{\mu-\frac{m_\lambda}{2q^2}\left(s+\frac{q^2}{2m_\lambda}\right)^2\right\}\beta}{1+\exp\left\{\mu-\frac{m_\lambda}{2q^2}\left(s-\frac{q^2}{2m_\lambda}\right)^2\right\}\beta} =$$

$$= \frac{2e^2 m_\lambda^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^2\,\beta q}\ln\left\{\left(e^{-s\beta}-1\right)\frac{1}{1+\exp\left[\frac{m_\lambda}{2q^2}\left(s-\frac{q^2}{2m_\lambda}\right)^2-\mu\right]\beta}+1\right\}. \tag{3.3}$$

Используя результаты предыдущего параграфа, можно получить следующее аналитическое продолжение Π:

$$\Pi^r(q, q_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(s,\ q)\,ds}{s-q_0-i\varepsilon} = \mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(s,\ q)\,ds}{s-q_0} + \pi i\rho(q_0,\ q); \tag{3.4}$$

$$\Pi^a(q,q_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(s, q)\, ds}{s - q_0 + i\varepsilon} = \mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(s, q)\, ds}{s - q_0} - \pi i \rho(q_0, q); \quad (3.5)$$

$$\Pi^n(q, q_0) = 2\pi i \rho(q_0, q); \quad (3.6)$$

$$\Pi^c(q,q_0) = \mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(s, q)\, ds}{s - q_0} + \pi i \operatorname{cth}\left(\frac{\beta q_0}{2}\right)\rho(q_0, q). \quad (3.7)$$

Функция $\Pi(q,q_4)$ совпадает со следующей функцией Π', являющейся аналитической функцией как в верхней, так и в нижней полуплоскостях q_0 (особенности этой функции расположены на действительной оси q_0):

$$\Pi'(q_0,q) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(s, q)}{s - q_0(1 + i\varepsilon)}\, ds, \quad (3.7\text{a})$$

т. е. Π' совпадает с Π^r в верхней полуплоскости (Π^r — регулярная функция) и с Π^a — в нижней полуплоскости (Π^a — регулярная функция). Как известно, $D(q, q_4)$ в случае плазмы имеет вид (см. § 4 гл. II):

$$D(q, q_4) = \frac{1}{\mathbf{q}^2 - \Pi(q_4, q)} = \frac{1}{q^2} + \int \frac{\rho_1(s, q)}{s - iq_4}\, ds, \quad (3.8)$$

где

$$q_4 = \frac{2n\pi}{\beta}.$$

Нетрудно убедиться, что имеет место следующая связь ρ с $\operatorname{Im}\Pi^r$:

$$\rho_1(s, q) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{q^2 - \Pi^r}\right\} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{Im}\Pi^r(s, q)}{[q^2 - \operatorname{Re}\Pi^r(s,q)]^2 + [\operatorname{Im}\Pi^r(s, q)]^2}. \quad (3.9)$$

Из (3.4) следует, что $\operatorname{Im}\Pi^r(s, q) = \pi\rho(sq)$, где $\rho(s, q)$ определяется формулой (3.3). Итак, окончательно получаем

$$\rho_1(q_0, q) = \frac{\rho(q_0, q)}{\left[q^2 - P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(s, q)}{s - q_0}\, ds\right]^2 + [\pi\rho(q_0, q)]^2}; \quad (3.10)$$

$$D(q; q_4) = \frac{1}{q^2} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(s, q)}{s - iq_4}\, ds; \quad (3.11)$$

$$D^r(q, q_0) = \frac{1}{q^2} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(s, q)}{s - q_0 - i\varepsilon}\, ds; \quad (3.12)$$

$$D^a(q, q_0) = \frac{1}{q^2} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(s, q)}{s - q_0 + i\varepsilon}\, ds; \quad (3.13)$$

$$D^n(q, q_0) = 2\pi i \rho_1(q_4, q); \quad (3.14)$$

$$D'(q, q_0) = \frac{1}{q^2} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(s, q)}{s - q_0(1 + i\varepsilon)}\, ds. \quad (3.15)$$

Для нахождения энергетического спектра достаточно найти полюса аналитического продолжения мнимой части ρ_1. Но поскольку

$$\rho_1(s, q) = \frac{D^r(s, q) - D^a(s, q)}{2i\pi} \tag{3.16}$$

и D^r регулярно в верхней полуплоскости, то полюса аналитического продолжения ρ_1, лежащие в верхней полуплоскости, совпадают с полюсами аналитического продолжения опережающей функции Грина D^a в верхней полуплоскости (где она, вообще говоря, нерегулярна), и, наоборот, из-за регулярности функции D^a в нижней полуплоскости полюса аналитического продолжения ρ_1, лежащие в нижней полуплоскости q_0, совпадают с полюсами аналитического продолжения $D^r(q_0, q)$ в нижней полуплоскости.

Итак, энергетический спектр определяется уравнением

$$\left\{q^2 - \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(s, q)}{s - q_0}\,ds + i\pi\rho(q_0, q)\right\} = 0, \qquad q_0 = \omega - i\,|\,\Gamma\,| \tag{3.17}$$

(аналитическое продолжение D^r в нижней полуплоскости);

$$\left\{q^2 - \mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(s, q)}{s - q_0}\,ds - i\pi\rho(q_0, q)\right\} = 0, \qquad q_0 = \omega + i\,|\,\Gamma\,| \tag{3.18}$$

(аналитическое продолжение D^a в верхней полуплоскости), где ρ определяется формулой (3.3). Решая указанные уравнения, получим все результаты по энергетическому спектру плазмы, полученные другими методами в самосогласованном приближении [66—69].

Уравнения для определения энергетического спектра системы эквивалентны следующим правилам обхода полюсов при вычислении аналитического продолжения запаздывающего поляризационного оператора. Чтобы аналитическое продолжение Π^r (Π^a) совпадало с аналитическим продолжением спектральных представлений (3.12) — (3.13), до взятия интеграла по s нужно сместить контур интегрирования по s так, чтобы обойти особенность подынтегрального выражения по s снизу (сверху).

Полученные правила обхода полюса по s, в частности, совпадают с правилами аналитического продолжения, сформулированными Ландау при нахождении спектра колебаний плазмы. При этом можно убедиться, что, найдя поляризационный оператор в первом приближении по e^2, мы получим при аналитическом продолжении (согласно указанным выше правилам) все результаты, касающиеся энергетического спектра в плазме, полученные другими способами [66—69].

По этой причине мы не будем здесь подробно анализировать энергетический спектр в указанном приближении и ограничимся лишь случаем малых и больших q.

Найдем в рассматриваемом приближении корни уравнения (3.17) или (3.18), для чего предварительно найдем $\mathrm{Re}\,\Pi^r$. Легко убедиться, что

$\mathrm{Re}\,\Pi^r$ можно представить в виде

$$\mathrm{Re}\,\Pi^r(q, q_0) = \frac{4e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3} \mathrm{P} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\lambda(\varepsilon_p)(\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p)}{q_0^2 - (\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p)^2} d^3p =$$

$$= \frac{2e^2 z_\lambda^2 m_\lambda}{(2\pi)^2} \mathrm{P} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_\lambda(\varepsilon_p)}{q} \ln\left(1 - \frac{2pq^3}{q_0^2 m_\lambda^2\left[1 - \left(\frac{q}{2} - p\right)^2 \frac{q^2}{q_0^2 m_\lambda^2}\right]}\right) p\,dp. \tag{3.19}$$

а) *Энергетический спектр при малых импульсах* q. В этом случае энергетический спектр плазмы удается получить в случае произвольной зависимости ε_p от p, поэтому все выкладки мы здесь проведем в общем виде (при произвольной дисперсии). Итак, рассмотрим случай малых q. В этом случае, разлагая (3.19) в ряд по $\frac{q^2}{q_0^2}$, получим

$$\mathrm{Re}\,\Pi_\lambda^r(q, q_0) = A_1^\lambda\left(\frac{q^2}{q_0^2} + A_2^\lambda \frac{q^4}{q_0^4}\right), \tag{3.20}$$

где

$$A_1^\lambda = \frac{4e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3} \int f_\lambda(\varepsilon_p)\left(\frac{\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p}{q^2}\right) d^3p \approx \frac{2e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3} \int f_\lambda(\varepsilon_p) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial p_i} d^3p; \tag{3.21}$$

$$A_1^\lambda A_2^\lambda = \frac{4e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3} \int f_\lambda(\varepsilon_p) \frac{(\varepsilon_{p+q} - \varepsilon_p)^3}{q^4} d^3p \approx \frac{2e^2 z_\lambda^2}{(2\pi)^3} \int f_\lambda \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\right)^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p_i \partial p_i} d^3p. \tag{3.22}$$

В случае $\varepsilon = \frac{p^2}{2m_\lambda}$ получим

$$A_1^\lambda = \omega_\lambda^2 = \frac{e^2 n_\lambda z_\lambda^2}{m_\lambda}; \tag{3.23}$$

$$A_2^\lambda = v_\lambda^2, \tag{3.24}$$

где ω_λ — плазменная частота частиц сорта λ; v_λ^2 — средний квадрат скоростей частиц сорта λ; n — средняя плотность частиц сорта λ.

Уравнение (3.17) в этом случае принимает вид

$$q^2 - \sum_{\lambda=1}^{n} \omega_\lambda^2 \frac{q^2}{\overset{*}{q}{}_0^2}\left(1 + v_\lambda^2 \frac{q^2}{\overset{*}{q}{}_0^2}\right) + i\pi \frac{2e^2 m_\lambda^2 z_\lambda^2 \left(e^{-\overset{*}{q}_0 \beta} - 1\right)}{(2\pi)^2 \beta q \left[1 + \exp\left(\frac{m_\lambda \overset{*}{q}{}_0^2}{2q^2} - \mu_\lambda\right)\beta\right]} = 0. \tag{3.25}$$

Полагая $\overset{*}{q}_0 = q_0 - i\Gamma$, получим в случае малого затухания $\Gamma \ll q_0$ следующие выражения для q_0 и Γ:

$$q_0^2 = \sum_{\lambda=1}^{n} A_1^\lambda\left(1 + \frac{A_2^\lambda q^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} A_1^\nu}\right) = \sum_{\lambda=1}^{n} \omega_\lambda^2\left(1 + v_\lambda^2 \frac{q^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^2}\right); \tag{3.26}$$

$$\Gamma = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{e^2 z_\lambda^2 m_\lambda^2 \pi q_0}{(2\pi)^2 \beta q^3}\left(1 - e^{-q_0 \beta}\right) \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{m_\lambda q_0^2}{2q^2} - \mu_\lambda\right)\beta}. \tag{3.27}$$

Как и следовало ожидать, из (3.27) следует, что полюса Π^R лежат в нижней полуплоскости q_0. Из формул (3.26) и (3.27) следует, в частности, энергетический спектр плазмы, полученный Л. Д. Ландау [66], А. А. Власовым [68] и др.

б) Энергетический спектр при больших q. Согласно (3.19), Π^r в этом случае имеет вид

$$\Pi^r_\lambda = A_1^\lambda \frac{q^2}{\overset{*2}{q}_{0,\lambda}}\left(1 + A_2^\lambda \frac{q^2}{\overset{*2}{q}_{0,\lambda}}\right) + i\,\frac{2e^2 z_\lambda^2 m_\lambda^2 \pi}{(2\pi)^2 \beta q}\left(e^{-q_0\beta} - 1\right)\frac{1}{1+\exp\left\{\frac{m_\lambda \overset{*2}{q}_{0,\lambda}}{2q^2} - \mu_\lambda\right\}\beta}, \tag{3.28}$$

где $q_{0,\lambda}^2 = q_0^2 - \left(\frac{q^2}{2m_\lambda}\right)^2$; коэффициент A определяется теми же формулами, что в случае $q \to 0$. В результате мы получим тот же энергетический спектр, что и в случае $q \to 0$, с той лишь разницей, что теперь q_0^2 надо всюду [за исключением множителя $(1 - e^{-q_0\beta})$] заменить на $q_{0,\lambda}^2$ (в этой форме энергетический спектр охватывает оба предельных случая). Итак, энергетический спектр при $q \to \infty$ определяется соотношениями

$$1 - \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{A_1^\lambda}{q_{0,\lambda}^2}\left(1 + A_2^\lambda \frac{q^2}{\overset{*2}{q}_{0,\lambda}}\right) = 0; \tag{3.29}$$

$$\Gamma = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{e^2 z_\lambda^2 m_\lambda^2 \pi}{(2\pi)^2 \beta q^3 q_0}\left(1 - e^{-q_0\beta}\right)\frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{A_1^\nu}{q^4_{0,\nu}}\right)^{-1}}{1 + \exp\left(\frac{m_\lambda q_{0,\lambda}^2}{2q^2} - \mu_\lambda\right)\beta}. \tag{3.29a}$$

Решая уравнение (3.29), найдем обе ветви энергетического спектра плазмы.

Не представляет труда найти и поправки в следующем приближении по e^2. Диаграммы в e^4-приближении представлены на рис. 1. Что касается диаграмм «собственной энергии», т. е. типа а и б, то их очень просто учесть, подставив в поляризационный оператор G с учетом массового оператора в e^2-приближении (приближение Хартри — Фока). В самом деле, в этом приближении, согласно (4.18), (4.20) гл. II:

$$G = \frac{1}{ip_4 - \mu + \varepsilon_p'}, \tag{3.30}$$

где

$$\varepsilon_p' = \frac{p^2}{2m_\lambda} + \frac{e^2}{(2\pi)^3}\int f_\lambda^0(\varepsilon_{p'})\,\frac{d^3p'}{(p'-p)^2}. \tag{3.31}$$

Подставляя найденное выражение для G в поляризационный оператор, получим выражение, аналогичное случаю, когда $G = G_0$, с той лишь разницей, что всюду необходимо заменить $\varepsilon_p \to \varepsilon_p'$, т. е. в этом приближении

$$\Pi^r(q, q_0) = \frac{z_\lambda^2\, 2e^2}{(2\pi)^3}\int \frac{f_\lambda^0(\varepsilon_{p+q}') - f_\lambda^0(\varepsilon_p')}{\varepsilon_{p+q}' - \varepsilon_p' - q_0 - i\delta}\,d^3p, \tag{3.32}$$

где

$$f_\lambda^0(\varepsilon_p') = \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p' - \mu_\lambda)\beta}. \tag{3.33}$$

Следует отметить, что в этом приближении мы учли не только диаграммы а и б рис. 1, но все приводимые диаграммы типа «собственной» энергии для G.

Итак, в этом случае мы получим для спектра те же результаты, что и в первом приближении по e^2, с той лишь разницей, что в коэффициентах A_2 и A_3 необходимо заменить ε_p на ε_p'. Поскольку нас интересует добавок к П от всех трех диаграмм (они одного порядка), то воспользуемся результатом § 4 гл. II — параграфа] для суммы этих диаграмм и найдем $\operatorname{Re}(\Pi_a^r + \Pi_b^r + \Pi_c^r)$ при малых q:

$$\operatorname{Re}(\Pi_a^r + \Pi_b^r + \Pi_c^r) \approx \frac{2e^4 z_\lambda^4}{(2\pi)^6} \int d^3p\, d^3p' \frac{\left(\mathbf{q}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{q}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}'}\right)\left(\mathbf{q}\frac{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})}{m_\lambda}\right)}{\left(\frac{\mathbf{p}\mathbf{q}}{m_\lambda} - q_0\right)^2\left(\frac{\mathbf{p}'\mathbf{q}}{m_\lambda} - q_0\right)|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2} \simeq$$

$$\simeq \frac{e^4 z_\lambda^4}{(2\pi)^6 q_0^4} \int d^3p\, d^3p' \frac{\left(\mathbf{q}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{q}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}'}\right)\left[\frac{\mathbf{q}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})}{m_\lambda}\right]^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}. \tag{3.34}$$

Таким образом, энергетический спектр при малых $\mathbf{q}$ остается такой же, как и без учета «обменных» членов, но коэффициент A_2 несколько уменьшается за счет обменной поправки, а именно:

$$q_0^2 = A_1^\lambda + A_2^\lambda q^2,$$

где

$$A_2^\lambda = v_\lambda^2 - \frac{e^2 z_\lambda^2 m_\lambda}{(2\pi)^6 n_\lambda} \int d^3p\, d^3p' \frac{\left(\mathbf{u}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}}\right)\left(\mathbf{u}\frac{\partial f_\lambda}{\partial \mathbf{p}'}\right)\left(\mathbf{u}\frac{(\mathbf{p}'-\mathbf{p})}{m_\lambda}\right)^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|^2}; \tag{3.35}$$

$$A_1^\lambda = \frac{e^2 n_\lambda z_\lambda^2}{m_\lambda} = v_\lambda^2;$$

$\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{q}$. В случае полностью вырожденного газа

$$v_\lambda^2 = \frac{3}{5}\frac{p_0^2}{m_\lambda^2}, \qquad A_2^\lambda = \frac{3}{5}\frac{p_0^2}{m_\lambda^2} - \frac{3w_\lambda^2}{20p_0^2},$$

где p_0 — граничный импульс распределения Ферми $p_0 = (3\pi^2 n_\lambda)^{1/3}$. Мы, таким образом, получили и обменную поправку к спектру, найденную В. П. Силиным [69] и др. методом квантового кинетического уравнения.

Не представляет труда найти спектр продольных и поперечных колебаний и в релятивистской плазме. Для этого надо решить соответственно следующие уравнения:

$$\begin{gathered} \varepsilon_R^l(\omega - i\Gamma, \mathbf{k}) = 0; \\ \varepsilon_R^t(\omega - i\Gamma, \mathbf{k})(\omega - i\Gamma)^2 = \mathbf{k}^2, \end{gathered} \tag{3.36}$$

где ε_R — аналитическое продолжение в нижнюю плоскость ω запаздывающей диэлектрической постоянной (см. Приложение 5, где приведено выражение для ε^t и ε^l в e^2-приближении).

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ЭВКЛИДОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Представляет интерес рассмотрение системы уравнений для функций Грина в квантовой статистике в предельном случае, когда температура равна нулю. В этом предельном случае мы получаем систему уравнений для функций Грина в эвклидовом четырехмерном импульсном пространстве, эквивалентную обычной теории поля в вакууме ($T = 0$, $\mu = 0$) или в среде ($T = 0$, $\mu \neq 0$). То обстоятельство, что теория вся сформулирована в эвклидовых переменных, приводит к определенным вычислительным удобствам по сравнению с обычной формулировкой теории в псевдоэвклидовых переменных.

Настоящая глава посвящена рассмотрению такой системы уравнений для функций Грина в эвклидовых переменных и установлению связи с обычной теорией. При этом здесь будут проведены главным образом для иллюстрации метода вычисления лишь тех величин, которые имеют непосредственное отношение к нахождению соответствующих операторов в случае температуры, отличной от нуля (гл. II и III).

В несколько другом аспекте вопрос о связи функций Грина в эвклидовых переменных с функциями Грина в псевдоэвклидовых переменных (обычной теории поля) рассмотрен Ю. Швингером [77].

§ 1. Квантовая теория поля в эвклидовых параметрах [52, 70]

Система уравнений (2.12) — (2.16) гл. II для функций Грина статистической квантовой теории поля в пределе $\mu = 0$, $T = 0$ дает квантовую теорию поля в эвклидовых параметрах. Ниже мы увидим, что полученная таким образом система уравнений для функций Грина приводит к тем же результатам, что и обычная теория в псевдоэвклидовых переменных. При этом переход от функций Грина в эвклидовых переменных к функциям Грина в псевдоэвклидовых переменных совершается аналитическим продолжением по правилам, разработанным в гл. III.

Существенно, что переход к псевдоэвклидову пространству можно провести в окончательном выражении для искомых величин, а все вычисления интегралов можно провести в эвклидовом пространстве с функциями Грина в эвклидовых переменных, что приводит к вычислительным упрощениям (подробно см. дальше). Итак, рассмотрим систему уравнений квантовой статистики в p-представлении в предельном случае, когда температура и химический потенциал равны нулю. В этом случае четвертые компоненты импульсов становятся непрерывными переменными и образуют четырехмерное эвклидово пространство.

Система уравнений для функций Грина (2.12) — (2.16) (гл. II) принимает вид:

$$\{i\gamma_\mu p_\mu + m + \Sigma(p)\}\, G(p) = 1; \tag{1.1}$$

$$\{k^2 + \varkappa^2 - \Pi(k)\}\, D(k) = 1; \tag{1.2}$$

$$\Gamma(p, p-s, s) = \gamma - \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \gamma G(p+k)[\Gamma(p+k, s) G(p+k-s)\Gamma(p+k-s, k) + \Gamma^{(1)}(p+k, p-s, k, s)] D(k)\, d^4k; \tag{1.3}$$

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \gamma G(p+k)\Gamma(p+k, k) D(k)\, d^4k; \tag{1.4}$$

$$\Pi(k) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int \gamma G(p+k)\Gamma(p+k, k)\, G(p)\, d^4p. \tag{1.5}$$

После перенормировок (см. § 3 гл. II) эта система уравнений принимает вид:

$$\{i\gamma_\mu p_\mu + m_e + \Sigma_1(p)\} G(p) = 1; \tag{1.6}$$

$$\{k^2 + \varkappa_e^2 - \Pi_1(k)\} D(k) = 1; \tag{1.7}$$

$$\Sigma_1(p) = \Sigma(p) - \left\{\Sigma(p^0) + (i\gamma_\mu p_\mu + m_e)\frac{\partial\Sigma(p^0)}{\partial(i\gamma_\mu p_\mu^0)}\right\}; \tag{1.8}$$

$$\Pi_1(k) = \Pi(k) - \left\{\Pi(k_0^2) + (k^2 + \varkappa_e^2)\frac{\partial\Pi(k_0^2)}{\partial(k_0^2)}\right\}; \tag{1.9}$$

$$\Sigma(p) = \frac{g_e^2}{(2\pi)^4} z_1 \int \gamma G(p+k)\Gamma(p+k, k) D(k)\, d^4k; \tag{1.10}$$

$$\Pi(k) = \frac{g_e^2}{(2\pi)^4} z_1\,\mathrm{Sp}\int \gamma G(p+k)\Gamma(p+k, k)\, G(p)\, d^4p; \tag{1.11}$$

$$\Gamma(p, k) = \gamma + [\Lambda(p, p') - \Lambda(p^0, p^0)], \tag{1.12}$$

где Λ — вершинная часть за вычетом простой вершины.

Вычитаемые постоянные перенормировки $\Lambda(p^0, p^0)$, $\Sigma(p^0)$, $\frac{\partial\Sigma(p_0)}{\partial p_0}$ суть значения указанных величин при формальной подстановке вместо $i\gamma_\mu p_\mu \to i\gamma_\mu p_\mu^0 \to -m_e p_0{}^2 = -m_e^2$. Аналогично, $\Pi(k_0^2)$ и $\frac{\partial\Pi(k_0^2)}{\partial(k_0^2)}$ суть значения указанных величин в точке $k_0^2 + \varkappa_e^2 = 0$.

Другими словами, как и в обычной теории, постоянные перенормировки являются коэффициентами разложения соответствующих величин в ряд Тэйлора в точках p^0 и k_0^2.

Полученная система уравнений по форме точно совпадает с системой уравнений обычной теории в псевдоэвклидовом пространстве при формальной замене d^4k в обычной теории на $id^3k dk_0$ в эвклидовом пространстве и отличается лишь тем, что:

1) импульсы берутся в обычном эвклидовом четырехмерном пространстве, при этом вычисления в эвклидовой метрике, вообще говоря, значительно проще, чем в псевдоэвклидовой метрике, это в особенности касается расходящихся выражений, где, не нарушая релятивистскую инвариантность, переходя к сферическим четырехмерным координатам, можно ввести верхний импульс, причем, как и следовало ожидать, перенормированные величины от верхнего импульса не будут зависеть;

2) $G^{-1}(p)$ и $D^{-1}(k)$ и прочие обратные операторы к функциям Грина не имеют нулей и потому деление на них однозначно;

3) $\mathrm{Im}\,\Pi$, $\mathrm{Im}\,\Sigma$, $\mathrm{Im}\,\Gamma$ равны нулю и появляются лишь при переходе от эвклидовой метрики к обычным псевдоэвклидовым переменным (такую

же ситуацию мы имеем уже в классической электродинамике, когда диэлектрическая постоянная, взятая при чисто мнимых частотах, становится действительной). По этой причине число неизвестных функций меньше, чем в обычной теории, в 2 раза и система уравнений проще, чем обычная система уравнений.

Аналогично обычной теории можно показать, что для перенормированных G и D имеют место следующие спектральные представления:

$$D(k) = \int \frac{\rho(M^2)\, dM^2}{k^2 + M^2} = \frac{1}{k^2 + \varkappa_e^2} + \int \frac{\rho_1(M^2)\, dM^2}{k^2 + M^2}\,; \tag{1.13}$$

$$G(p) = \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu + m_e} + \int \frac{\rho(M)\, dM}{i\gamma_\mu p_\mu + M} + \int \frac{\rho(-M)\, dM}{i\gamma_\mu p_\mu - M}\,. \tag{1.14}$$

При этом в отличие от представлений Челлена — Лемана в обычной теории входящие сюда импульсы образуют эвклидово четырехмерное пространство и потому знаменатели под интегралами нигде не обращаются в нуль.

Причинные функции Грина обычной теории получаются с помощью указанных функций Грина аналитическим продолжением.

$$p_4 \to i\left(p_0 + i\varepsilon \frac{p_0}{|p_0|}\right) \to ip_0(1 + i\varepsilon)$$

или, что эквивалентно, заменой $p_4 \to ip_0$ и массы $M \to M - i\varepsilon$; $\varepsilon \to 0$).

С помощью функций Грина в эвклидовых переменных можно получить все функции Грина в обычном эвклидовом пространстве следующей процедурой:

$$G^c(p, p_0) = iG(p, p_4 \to ip_0(1 + i\varepsilon));$$

$$G^r(p, p_0) = iG(p, p_4 \to +ip_0 - \varepsilon);$$

$$G^a(p, p_0) = iG(p, p_4 \to +ip_0 + \varepsilon),$$

где ε — положительная бесконечно малая величина; G^c — упорядоченная во времени причинная функция Грина; G^r — запаздывающая функция Грина; G^a — опережающая функция Грина. Поскольку импульсы p_μ образуют четырехмерное эвклидово пространство, целесообразно перейти к сферическим координатам:

$$p_1 = p\cos\varphi\sin\theta\sin\chi;$$

$$p_2 = p\sin\varphi\sin\theta\sin\chi;$$

$$p_3 = p\cos\theta\sin\chi;$$

$$p_4 = p\cos\chi;$$

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2};$$

$$d^4p = p^3 dp \sin^2\chi\, d\chi\, d\Omega;$$

$$d\Omega = \cos\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Пределы интегрирования: по φ — от π до $-\pi$, по θ — от 0 до π и по χ — от 0 до π. Интеграл по p берется от 0 до ∞, однако мы можем (без нарушения релятивистской инвариантности) ввести верхний импульс L и интегрировать до этого импульса, что в особенности удобно при работе с не-перенормированной системой уравнений. После проведения программы перенормировок перенормированные величины от этого предельного импульса не зависят.

Перейдя к сферическим координатам, легко найдем следующие основные интегралы:

$$L_1 = \int \frac{d^4p}{p^2 + 2pk + l};$$

$$L_2 = \int \frac{p_\mu d^4p}{p^2 + 2pk + l}.$$

С помощью L_1 и L_2 последовательным дифференцированием по k, l найдем все интегралы, которые встречаются при расчетах матричных элементов по теории возмущений.

В Приложении 4 выполнено вычисление указанных интегралов и там же приведена таблица встречающихся интегралов при $T = \mu = 0$.

В заключение отметим, что процедура перехода к эвклидовым переменным при вычислении диаграмм и асимптотики функции Грина в обычной теории поля уже с успехом применялась в работах Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова [16], И. Я. Померанчука, А. Д. Галанина, Б. Л. Иоффе [71], В. Б. Берестецкого и А. И. Ахиезера [3а]. Однако в указанных работах переход к эвклидовым переменным носил лишь вспомогательный вычислительный характер, поскольку не была сформулирована замкнутая система уравнений для функций Грина, содержащая лишь эвклидовы переменные. Исходной системой уравнений в указанных работах являлась система уравнений для функций Грина в псевдоэвклидовых переменных, вследствие чего переход к эвклидовому p-пространству требовал детального анализа расположения полюсов и наличия мнимых частей у временны́х функций Грина, входящих в каждую из рассматриваемых диаграмм.

§ 2. Мезодинамика

Рассмотрим симметричную псевдоскалярную теорию с псевдоскалярной связью.

Система перенормированных уравнений для функций Грина в эвклидовых переменных имеет вид:

$$\{i\gamma_\mu p_\mu + m_e + \Sigma^R(p)\} G(p) = 1; \tag{2.1}$$

$$\{k^2 + \varkappa_e^2 - \Pi^R(k)\} D(k) = 1; \tag{2.2}$$

$$\Sigma^R(p) = \Sigma(p) - \left\{\Sigma(p_0) + (i\gamma_\mu p_\mu + m_e)\frac{\partial \Sigma(p^0)}{\partial i\gamma_\mu p_\mu^0}\right\}; \tag{2.3}$$

$$\Pi^R(k) = \Pi(k) - \left\{\Pi(k_0^2) + (k^2 + \varkappa_e^2)\frac{\partial \Pi(k_0^2)}{\partial (k_0^2)}\right\}; \tag{2.4}$$

$$\Sigma(p) = \frac{g_e^2}{(2\pi)^4} z_1 \int \tau\gamma_5 G(p+k)\Gamma_5(p+k,\ k) D(k)\, d^4k; \tag{2.5}$$

$$\Pi(k)=\frac{g_e^2}{(2\pi)^4}z_1\,\mathrm{Sp}\int\tau\gamma_5 G(p+k)\,\Gamma_5\,(p+k,\,k)\,G(p)\,d^4p;\tag{2.6}$$

$$\Gamma_5(p,k)=\tau\gamma_5+\Lambda_5(p,\,p')-\Lambda_5(p^0,\,p^0);\tag{2.7}$$

$$\Lambda_5(p,\,p-s)=-\frac{g^2}{(2\pi)^4}z_1\int\tau\gamma_5 G(p+k)\,[\Gamma_5(p+k,\,s)\;G(p+k-s)\times$$
$$\times\,\Gamma_5(p+k-s,\,k)+\Gamma_5^1(p+k,\,p-s,\,k,\,s)]\,D(k)\,d^4k;\tag{2.8}$$

$$z_1^{-1}=1-\frac{g^2}{3\,(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\,\tau_i\int G(p^0+s)\,[\Gamma_5(p^0+s,\,k^0)\,G(p^0+s-k^0)\times$$
$$\times\,\Gamma_{i5}(p^0+s-k^0,\,s)+\Gamma_{i5}(p^0+s,\,p^0-k^0,\,s,\,k^0)]\,D(s)\,d^4s,\tag{2.9}$$

где τ_i — матрицы изотопического спина.

Найдем в первом приближении по g^2 поляризационный и массовый операторы.

2.1. Поляризационный оператор

Согласно (2.6) в первом приближении по g^2 поляризационный оператор имеет вид

$$\Pi(k)=\frac{g^2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int\tau\gamma_5\frac{1}{i\gamma_\mu\,(p_\mu+k_\mu)+m}\,\tau\gamma_5\,\frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu+m}\,d^4p.\tag{2.10}$$

После взятия шпура получим

$$\Pi(k)=\frac{4g^2}{(2\pi)^4}\int\left\{\frac{1}{(p+k)^2+m^2}+\frac{1}{p^2+m^2}-\frac{k^2}{[(p+k)^2+m^2]\,[p^2+m^2]}\right\}d^4p.\tag{2.11}$$

Из (2.11) с помощью формул Приложения 4 получим

$$\Pi(k)=\frac{g^2}{(2\pi)^2}\left\{2L^2-\frac{k^2}{2}-2m^2\ln\frac{L^2}{m^2}-k^2\left(\ln\frac{L^2}{m^2}-1\right)+\right.$$
$$\left.+\,k^2\int_0^1 dx\ln\left(\frac{k^2x}{m^2}(1-x)+1\right)\right\}.\tag{2.12}$$

Следуя (2.4) и (2.12), можно найти явное выражение для Π^R. Однако для проведения аналитического продолжения удобен интегральный вид перенормированного поляризационного оператора, который следует непосредственно из (2.12) после проведения перенормировки [см. (2.4)]:

$$\Pi^R(k)=\frac{g^2m^4}{2\,(2\pi)^2}(k^2+\varkappa^2)^2\int_0^1\frac{v^2dv}{\left[m^2+\frac{k^2}{4}(1-v^2)\right]\left[m^2-\frac{\varkappa^2}{4}(1-v^2)\right]^2}\,.\tag{2.13}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, Π^R не зависит от верхнего предела L. Заметим при этом, что при вычислении Π^R мы могли вообще не вводить L, а провести интегрирование по углам в (2.11) и перенормировку до вычисления интеграла по модулю p, после чего интеграл по p становится сходящимся и дает тот же результат, что (2.13). С помощью (2.13), согласно правилам аналитического продолжения, найдем поляризационный оператор временно́й функции Грина. Для этого удобно предварительно в интеграле (2.13) сделать замену переменных $\left(z^2=\frac{4m^2}{1-v^2}\right)$, после чего получим для поляризационного оператора временно́й функции Грина следующее спектральное представление:

$$\Pi^c(k) = \frac{g^2}{(2\pi)^2}(k^2+\varkappa^2)^2 \int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{z^2dz^2\sqrt{1-\frac{4m^2}{z^2}}}{(z^2+k^2-i\varepsilon)(z^2-\varkappa^2)^2}, \tag{2.14}$$

где

$$k^2 = \mathbf{k}^2 - k_0^2. \tag{2.15}$$

Таким образом, мы убеждаемся, что аналитическое продолжение поляризационного оператора, найденного в эвклидовом пространстве, совпадает с поляризационным оператором обычной теории.

2.2. Массовый оператор

Согласно (2.5), массовый оператор в первом приближении по g^2 имеет вид

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \tau\gamma_5 \frac{1}{i\gamma_\mu(p_\mu+k_\mu)+m}\tau\gamma_5\frac{1}{k^2+\varkappa^2}d^4k =$$

$$= \frac{3g^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \int\limits_0^1 \frac{dy\,[-i\gamma_\mu(p_\mu+k_\mu)+m]}{[p^2+2pky+k^2y+m^2y+\varkappa^2(1-y)]^2} =$$

$$= \frac{3g^2\pi^2}{(2\pi)^4}\int\limits_0^1 dy\left[(-i\gamma_\mu p_\mu+m)\left(\ln\frac{L^2}{a}-1\right)+y\gamma_\mu p_\mu\left(\ln\frac{L^2}{a}-\frac{3}{2}\right)\right], \tag{2.16}$$

где

$$a = (m^2+p^2)y + \varkappa^2(1-y) - p^2y^2.$$

Для перенормированного массового оператора получим, согласно (2.5) и (2.16), следующее выражение (для простоты полагаем $\varkappa^2 = 0$):

$$\Sigma^R(p) = \frac{3g^2(-i\gamma_\mu p_\mu+m)^2}{32\pi^2 i\gamma_\mu p_\mu}\left[\frac{p^2+m^2}{p^2}\ln\left(\frac{p^2+m^2}{m^2}\right)-1\right] =$$

$$= \frac{3g^2(-i\gamma_\mu p_\mu+m)^2\, i\gamma_\mu p_\mu}{16\pi^2}\int\limits_m^\infty \frac{(m^2-M^2)\,dM}{(p^2-M^2)M^3}. \tag{2.17}$$

Произведя аналитическое продолжение по p_4, найдем массовый оператор временно́й функции Грина:

$$\Sigma^R(\mathbf{p}, p_0) = \frac{3g^2(-i\gamma_\mu p_\mu+m)^2}{16\pi^2}\, i\gamma_\mu p_\mu \int\limits_m^\infty \frac{(m^2-M^2)\,dM}{(\mathbf{p}^2-p_0^2+M-i\varepsilon)M^3}. \tag{2.18}$$

§ 3. Квантовая электродинамика

В случае квантовой электродинамики система перенормированных уравнений для функций Грина имеет вид (здесь учтено соотношение (3.9а) гл. I и исключен множитель Z_1 способом, изложенным в § 4 гл. I):

$$\{i\gamma_\mu p_\mu + m_e + \Sigma^R(p)\}\,G(p) = 1; \tag{3.1}$$

$$\{k^2\delta_{\mu\nu} - \Pi^R_{\mu\nu}(k)\}\,D_{\nu\rho}(k) = \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{k_\mu k_\rho}{k^2}\right); \tag{3.2}$$

$$\Gamma_\mu(p, p-k, k) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, p-k) - \Lambda_\mu(p^0, p^0) = \gamma_\mu + \Lambda^R_\mu(p, p-k); \tag{3.3}$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\Pi(k^2); \tag{3.4}$$

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{3(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int\Big[\Gamma_\mu(p,\, p+k,\, -k) + \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int\Gamma_\nu(p,\, p+s,\, -s)\times$$
$$\times R_{\mu\nu}(p+s,\, p+k,\, -k,\, s)\,d^4s\Big]G(p+k)\,\Gamma_\mu(p+k,\, p,\, k)\,G(p)\,d^4p; \tag{3.5}$$

$$\Sigma^R(p) = i(p_\mu - p_\mu^0)\,\Lambda_\mu^R(p,\, p^0); \tag{3.6}$$

$$\Lambda_\mu(p, p-k) = -\frac{e^2}{2\pi}\int\Gamma_\rho(p,\, p+s,\, -s)\,R_{\mu\rho}(p+s,\, p-k,\, k,\, s)\,d^4s; \tag{3.7}$$

$$\Pi_{\mu\nu}^R = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left\{\Pi(k^2) - \Pi(k_0^2) - \frac{\partial\Pi(k_0^2)}{\partial k_0^2}\,k^2\right\}; \tag{3.8}$$

$$R_{\mu\nu}(p,\, p-l-s,\, l,\, s) = M_{\mu\nu}^{(1)}(p,\, p-l-s,\, l,\, s) +$$
$$+ \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int R_{\mu\rho}(p,\, p+k-s,\, -k,\, s)\,M_{\rho\nu}^{(1)}(p+k-s,\, p-s-l,\, l,\, k)\,d^4k, \tag{3.9}$$

где

$$M_{\mu\nu}^{(1)}(p,\, p-l-s,\, l,\, s) = -G(p+s)\left[\Gamma_{\mu\rho}(p,\, p-l,\, l)\,G(p-l)\times\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma_\rho(p-l,\, p-s-l,\, s) + \Gamma_{\mu\rho}^{(1)}(p,\, p-s-l,\, l,\, s)\right]D_{\rho\nu}(s);$$
$$k_0^2 = 0; \qquad (p^0)^2 = -m^2.$$

Поляризационный оператор

Найдем поляризационный оператор в первом приближении по e^2:

$$\Pi(k^2) = \frac{e^2}{3(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int\gamma_\mu G_0(p+k)\,\gamma_\mu G_0(p)\,d^4p =$$
$$= \frac{8e^2}{3(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{p^2 + pk + 2m^2}{[(p+k)^2 + m^2][p^2 + m^2]} =$$
$$= \frac{4e^2}{3(2\pi)^4}\int\left\{\frac{1}{(p+k)^2 + m^2} + \frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{2m^2 - k^2}{[(p+k)^2 + m^2]\,[p^2 + m^2]}\right\}d^4p. \tag{3.10}$$

Согласно (3.10) с учетом формул Приложения 4 получим для $\Pi(k^2)$ (см. также [3а]):

$$\Pi(k^2) = \frac{16e^2\pi^2}{3(2\pi)^4}\left\{L^2 - m^2\ln\frac{L^2}{m^2} - \frac{k^2}{4} +\right.$$
$$\left.+\left(m^2 - \frac{k^2}{2}\right)\left[\ln\frac{L^2}{m^2} - 1 - \int\limits_0^1 dx\,\ln\left(\frac{k^2}{m^2}(1-x)\,x + 1\right)\right]\right\}. \tag{3.11}$$

Проведя интегрирование по x, получим

$$\Pi(k^2) = \frac{16e^2\pi^2}{3(2\pi)^4}\left\{L^2 - m^2\ln\frac{L^2}{m^2} - \frac{k^2}{4} +\right.$$
$$\left.+\left(m^2 - \frac{k^2}{2}\right)\left[\ln\frac{L^2}{m^2} - 1 - 2\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}\right)\right]\right\}. \tag{3.12}$$

С помощью $\Pi(k^2)$ найдем перенормированное значение

$$\Pi^R(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(0) - k^2\left[\frac{\partial\Pi(k^2)}{\partial(k^2)}\right]_{k^2=0} =$$
$$= \frac{e^2k^2}{12\pi^2}\left\{2\left(1 - \frac{2m^2}{k^2}\right)\left[\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}}\,\mathrm{Arcth}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}}} - 1\right] + \frac{1}{3}\right\}. \tag{3.13}$$

Для аналитического продолжения при переходе к временным функциям Грина более удобно интегральное представление для $\Pi^R(k^2)$. Последнее получается, если провести процедуру перенормировки до вычисления интеграла по x в формуле (3.11) и перейти к новой переменной интегрирования [1] $z^2 = \frac{4m^2}{x(1-x)}$:

$$\Pi^r(k^2) = \frac{e^2}{12\pi^2}(k^2)^2 \int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{dz^2\left(1+2\frac{m^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{z^2}\right)^{1/2}}{(z^2+k^2)\,z^2}\,. \tag{3.14}$$

При переходе к временно́й функции Грина фотона необходимо заменить $k^2 \to \mathbf{k}^2 - k_0^2 - i\varepsilon$. Тогда получим поляризационный оператор обычной теории.

§ 4. К теории многих частиц

В настоящем параграфе рассмотрим систему уравнений для функций Грина в квантовой статистике в том случае, когда $T = 0$, но $\mu \neq 0$. В этом случае мы получим теорию взаимодействий многих частиц в эвклидовых переменных.

Согласно (3.3) — (3.9) гл. II, система перенормированных уравнений для функций Грина имеет вид:

$$\{i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4\mu + m + \Sigma_1(p)\}\,G(p) = 1; \tag{4.1}$$

$$\{k^2 + \varkappa^2 - \Pi_1(k)\}\,D(k) = 1; \tag{4.2}$$

$$\Sigma_1(p) = \{\Sigma(p) - \Sigma(p)|_{\mu=0}\} + \Sigma^R(p); \tag{4.3}$$

$$\Pi_1(k) = \{\Pi(k) - \Pi(k)|_{\mu=0}\} + \Pi^R(k); \tag{4.4}$$

$$\Gamma(p, k) = \{\Lambda(p, k) - \Lambda(p, k)|_{\mu=0}\} + \Gamma^R(p, k); \tag{4.5}$$

$$\Pi(k) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int z_1\gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k, k)\,G(p)\,d^4p; \tag{4.6}$$

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\int z_1\gamma G(p+k)\,\Gamma(p+k, k)\,D(k)\,d^4k; \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\Lambda(p, s) = -\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int z_1 G(p+k)\,\{[\Gamma(p+k, s)\,G(p+k-s)\,\Gamma(p+k-s, k) &+ \\ + \Gamma^{(1)}(p+k, p-s, s, k)]\,D(k) &+ \\ + \Gamma(p+k, k)\,D^{(1)}(k, s)\}\,d^4k&,\end{aligned} \tag{4.8}$$

где Σ^R, Γ^R, z_1 и Π^R соответственно равны своим значениям в обычной теории поля (см. § 1). С помощью (4.1) — (4.8) можно найти плотность и энергию среды, а также энергетический спектр. При этом существенно эффективно провести программу перенормировок и для плотности и энергии среды. Дело в том, что выражения для этих величин после перехода к перенормированным функциям Грина содержат в виде множителя z_1.

[1] При этом необходимо учесть, что в данном случае целесообразно интеграл по x в (3.11) представить в виде $\int\limits_0^1 f dx \to \int\limits_0^{1/2} f dx + \int\limits_{1/2}^1 f dx$ и провести замену переменных в каждом из этих интегралов, в пределах которых z монотонно зависит от x.

Так, например, плотность фермионов среды $\rho(\mu)$, выраженная через перенормированную функцию Грина фермиона, равна

$$\rho(\mu) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \mathrm{Sp} \int z_1 \gamma_4 G(p)\, d^4p. \tag{4.8}$$

Перенормированная плотность энергии среды E_R равна

$$E_R = \int_0^\mu d\mu' \rho(\mu') - \mu\rho(\mu) = -\int_0^\mu \mu' \frac{\partial\rho}{\partial\mu'} d\mu'. \tag{4.8б}$$

Используя результаты § 7 гл. II [формулы (7.11) — (7.17)], можем получить следующие выражения для ρ и E_R:

$$\rho(\mu) = \int_0^\mu [p(\mu') - p(0)]\, d\mu'; \tag{4.8в}$$

$$E_R(\mu) = -\int_0^\mu \mu' [p(\mu') - p(0)]\, d\mu',$$

где

$$p(\mu) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \mathrm{Sp} \int z_1 \gamma_4 G(p)\, \Gamma_4(p, p, 0)\, G(p)\, d^4p.$$

Нетрудно видеть, что $p(\mu)$ совпадает с точностью до множителя e^2 с компонентой четыре-четыре перенормированного электромагнитного тензора поляризации среды (т. е. $[p(\mu) - p(0)] = -\frac{\Pi^0_{44}}{e^2} = \frac{\lambda_d^{-2}}{e^2}$, где λ_d — дебаевский радиус среды), с тем только отличием, что здесь учитываются лишь те радиационные добавки к G и Γ_4, которые обусловлены реально рассматриваемым взаимодействием. Заметим, что полученные формулы универсальны и вид их не зависит от варианта взаимодействия и от числа взаимодействующих бозе-полей. Влияние всех этих факторов сказывается на формулы (4.8в) косвенно, поскольку они определяют вид радиационных добавок к G и Γ_4. В дальнейшем мы займемся вычислением поляризационного оператора в среде.

Квантовая электродинамика

В первом приближении по e^2 поляризационный оператор имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \mathrm{Sp} \int \frac{\gamma_\mu(-i\gamma_\rho(p^x_\rho + k_\rho) + m)\gamma_\nu(i\gamma_\sigma p^x_\sigma + m)}{(\tilde{p}^2 + m^2)[(\tilde{p} + k)^2 + m^2]} d^4p, \tag{4.9}$$

где $\tilde{p}^x_4 = p_4 + i\mu$, $\tilde{p}^x_i = p_i$ при $i = 1, 2, 3$. Опуская простые выкладки, получим для перенормированного поляризационного оператора следующие выражения:

$$\Pi_{1\mu\nu}(k) = \Pi^R_{\mu\nu}(k) + \Pi_{\mu\nu}(k);$$

$$\Pi_{44} = \frac{e^2}{2\pi^3} \mathrm{Re} \int \frac{d^3p}{\varepsilon_p} \theta(\mu - \varepsilon_p) \frac{pk - 2p_4(k_4 - p_4)}{k^2 - 2pk}\bigg|_{p_4 = i\varepsilon_p}; \tag{4.10}$$

$$\sum_{\nu=1}^4 \Pi_{\nu\nu} = \frac{e^2}{\pi^3} \mathrm{Re} \int \frac{d^3p}{\varepsilon_p} \theta(\mu - \varepsilon_p) \frac{p(p+k)}{k^2 - 2pk}\bigg|_{p_4 = i\varepsilon_p};$$

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu} &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) A + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\frac{k_4^2}{k^2}\Pi_{44}\\ \Pi_{\mu4} &= \Pi_{4\mu} = -\frac{k_4 k_\mu}{k^2}\Pi_{44};\end{aligned}\right\}\text{для } \mu, \nu = 1, 2, 3; \tag{4.11}$$

$$\Pi_{44} = -\frac{e^2}{\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^2-m^2}} \frac{p^2 dp}{\varepsilon_p}\left\{1 + \frac{k^2+k_4^2-4\varepsilon_p^2}{8pk}\ln a - i\frac{k_4\varepsilon_p}{2pk}\ln b\right\};$$

$$A = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^2-m^2}} \frac{p^2 dp}{\varepsilon_p}\left\{1 - \frac{k_4^2}{k^2} + \frac{k^4-k_4^4+4\varepsilon_p^2 k_4^2+4p^2k^2}{8pk^3}\ln a + \right.$$

$$\left. + i\frac{k_4\varepsilon_p}{2pk^3}(k^2+k_4^2)\ln b\right\};$$

$$a = \frac{(k^2-2pk+k_4^2)^2+4k_4^2\varepsilon_p^2}{(k^2+2pk+k_4^2)^2+4k_4^2\varepsilon_p^2}; \quad b = \frac{(k^2+k_4^2)^2-4(pk+ik_4\varepsilon_p)^2}{(k^2+k_4^2)^2-4(pk-ik_4\varepsilon_p)^2};$$

$$\varepsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}; \qquad k = |\mathbf{k}|. \tag{4.12}$$

При $k_4 < k \to 0$ При $k_4 > k \to 0$

$$\Pi_{44}^R(k) = \Pi_{44}(0) + O(k^2), \qquad \Pi_{44} = -\frac{4e^2k^2}{\pi^2k_4^2}\int\limits_0^{\sqrt{\mu^2-m^2}}\frac{p^2\left(\varepsilon_p^2-\frac{p^2}{3}\right)}{(4\varepsilon_p^2+k_4^2)\,\varepsilon_p}dp,$$

$$A = \frac{e^2k^2}{6\pi^2}\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-m^2}}{m}; \qquad \Pi_{44} = \frac{k^2}{k_4^2}A; \tag{4.13}$$

$\Pi_{\mu\nu}^r(k)$ определяется формулой (3.13) или (3.14). В частности, для дебаевского радиуса получим

$$\lambda_d^{-2} = -\Pi_{44}(0) = \frac{e^2}{\pi^2}\mu(\mu^2-m^2)^{1/2}. \tag{4.14}$$

С помощью найденных выражений для A и Π_{44} и формул Приложения 5 [формулы (6) и (20)] можно получить выражение для продольной и поперечной диэлектрических постоянных. Не представляет труда с помощью A и Π_{44} найти в этом же приближении проводимость и магнитную восприимчивость (последняя равна $\frac{A}{k^2}$ при $k_4 < k \to 0$).

Псевдоскалярная теория

В этом случае в первом приближении по q^2 имеем:

$$\Pi_{ij}(k) = \frac{g^2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int \tau_i\gamma_5 G(p+k)\,\Gamma_j(p+k, k)\,G(p)\,d^4p, \tag{4.15}$$

где

$$G = \frac{1}{i\gamma_\rho p_\rho - \gamma_4\mu + m}, \quad \Gamma_j = \tau_j\gamma_5;$$

$$\Pi_{ij}(k) = (\Pi^R(k) + \Pi^\mu(k))\,\delta_{ij}; \tag{4.16}$$

$$\Pi^\mu(k) = -\frac{g^2}{2\pi^2}\left\{2\mu\sqrt{\mu^2-m^2} - 2m^2\ln\frac{\sqrt{\mu^2-m^2}+\mu}{m} - \right.$$

$$\left. - k^2\int\limits_0^1 dx\,\theta\left(\mu - \sqrt{m^2+k^2x(1-x)}\right)\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-m^2-k^2x(1-x)}}{\sqrt{m^2+k^2x(1-x)}}\right\}, \tag{4.17}$$

где $\Pi^R(k)$ определяется формулой (2.14) или (2.13). Из (4.17), в частности, получаем

$$\Pi^{\mu}(0) = -\frac{g^2}{\pi^2}\left\{\mu\sqrt{\mu^2-m^2} - m^2\ln\frac{\sqrt{\mu^2-m^2}+\mu}{m}\right\}. \tag{4.18}$$

При этом химический потенциал μ связан с плотностью ρ фермионов соотношением

$$\begin{gathered}\rho = -\frac{1}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int\gamma_4 G(p)\,d^4p = \frac{1}{3\pi^2}\sqrt{(\mu^2-m^2)^3},\\ \mu = \sqrt{m^2+(3\pi^2\rho)^{2/3}}.\end{gathered} \tag{4.19}$$

С помощью (4.19) и (4.18) можно выразить $\Pi(0)$ через плотность фермионов.

Не представляет труда найти полную энергию (E) системы в единице объема, которая определяется простым образом через поляризационный или массовый оператор:

$$E = E\,|_{g=0} - \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^g\frac{dg'}{g'}\int\Pi'(k)\,D(k)\,d^4k = E\,|_{g=0} - $$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int_0^g\frac{dg'}{g'}\int\Sigma(k)\,G(k)\,d^4k. \tag{4.20}$$

В заключение отметим, что в ряде случаев более удобно иметь дело с формулировкой теории в обычном псевдоэвклидовом импульсном пространстве. В этом случае система уравнений для функций Грина может быть получена из системы уравнений (4.1) — (4.8) путем формальной замены $p_4 \to i\left(p_0 + i\varepsilon\frac{p_0}{|p_0|}\right)$ (для ферми-частиц) и соответственно $k_4 \to i\left(k_0 + i\varepsilon\frac{k_0}{|k_0|}\right)$ (для бозе-частиц с химическим потенциалом, равным нулю).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем краткое содержание и основные результаты настоящей диссертации.

Глава I

В первой главе рассматриваются некоторые вопросы метода функций Грина в теории квантованных полей.

В § 1 с помощью обычного уравнения для S-матрицы при наличии внешних источников ферми- и бозе-полей, не прибегая к вариационному принципу Швингера, получена система функциональных уравнений (1.3) для оператора S-матрицы.

Из этой системы уравнений получена система функциональных уравнений (1.14) для ожидания S-матрицы по состоянию вакуум — вакуум. Это вакуумное ожидание S-матрицы (производящий функционал) является основной величиной теории, поскольку функциональным дифференцированием по внешним источникам можно получить все интересующие нас вакуумные ожидания от T-произведения операторов поля, т. е. все функции Грина теории.

В § 2 с помощью системы функциональных уравнений (1.14) получена швингеровская система уравнений функций Грина при наличии внешних источников. В частности, уравнение Дирака в постоянном внешнем поле с учетом радиационных добавок [см. (2.29)].

В § 3 с помощью уравнения для функций Грина в квантовой электродинамике при наличии внешнего источника фотонного поля найдена связь (3.8) между функцией Грина электрона G и вершинной частью Г.

С помощью найденного общего соотношения (3.8), не прибегая к теории возмущений, получено соотношение Уорда и целый ряд других соотношений [см. (3.9) — (3.18)], обусловленных градиентной инвариантностью теории.

В § 4 проведена перенормировка швингеровских уравнений для функций Грина [см. (4.10) — (4.20)], проводится эффективное исключение множителя z_1 (т. е. исключение «перекрывающихся» бесконечностей), остающегося после перенормировки [см. (4.26), (4.29), (4.32), (4.34)].

В § 5 из точных перенормированных уравнений для функций Грина, оставляя лишь простейшие неприводимые диаграммы, получена система уравнений для функций Грина (5.10) — (5.15), эквивалентная «трехгаммному» приближению Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова. То обстоятельство, что в полученной системе уравнений соотношение Уорда выполнено точно, облегчает нахождение решений этих уравнений и, в частности, их асимптотики при больших p.

Обсуждается фундаментальная трудность современной теории — появление фиктивного полюса в перенормированной функции распространения фотонов. Анализу способа преодоления этой фундаментальной трудности теории путем привлечения метода дисперсионных соотношений посвящен § 6. Здесь установлено, что, несмотря на выполнение для D-функции спектрального соотношения Челлена—Лемана и ренормализационной инвариантности, указанный способ остается не однозначным.

В § 7 получены дисперсионные соотношения для рассеяния ферми-частиц вперед [см. (7.15) — (7.16)].

В § 8 найдено решение функциональных уравнений для производящего функционала двух взаимодействующих полей в виде континуального интеграла (8.17).

В § 9 найдено операторное решение функциональных уравнений для двух взаимодействующих полей [см. (9.10) — (9.13), (9.21)].

В § 10 с помощью операторного (или континуального) решения найдена зависимость (10.11) всех функций Грина в квантовой электродинамике от продольной части электромагнитного поля.

В § 11 с помощью операторного решения (9.21) найдена инфракрасная асимптотика всех функций Грина в квантовой электродинамике [см.(11.9)].

Глава II

Вторая глава посвящена работам автора по квантовой статистике.

В § 1 получена система функциональных уравнений для интеграла состояния в квантовой статистике [см. (1.10)].

Найдено операторное решение этих функциональных уравнений (1.11), (1.15), (1.16) и функциональное выражение для термодинамического потенциала (1.17).

В § 2 с помощью функциональных уравнений (1.10) получена система уравнений для функций Грина в квантовой статистике, получена система (2.12) — (2.16) уравнений для функций Грина в импульсном представлении.

В отличие от соответствующих уравнений в обычной теории четвертые компоненты импульсов в квантовой статистике дискретны и равны $\frac{2n\pi}{\beta}$ для бозе-поля и $\frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ для ферми-поля, ($\beta = 1/kT$); кроме того, деление на операторы, обратные к функциям Грина бозе-(D) и ферми-(G) полей однозначно, эти обратные операторы D^{-1} и G^{-1} не имеют нулей.

Показано, что все термодинамические переменные могут быть выражены через «одночастичные» функции Грина.

В § 3 проведена перенормировка и исключение бесконечностей в системе уравнений для функций Грина и получена система перенормированных уравнений для функций Грина в квантовой статистике (3.3) — (3.9).

В § 4 рассмотрена система частиц, взаимодействующих по закону Кулона в том случае, когда ионы распределены равномерно. Показано, что из системы уравнений для функций Грина (4.3) — (4.7) следуют в простом приближении результаты методов Хартри, Хартри — Фока, Гелл-Манна — Бракнера (4.15) — (4.17) и Дебая — Хюккеля (4.13) — (4.14).

В § 5 рассмотрена система частиц, взаимодействующих по закону Кулона в приближении, когда ионы неподвижны (атомная система). В этом случае получена система уравнений (5.7) — (5.10) для функций Грина. С помощью найденных уравнений в простом приближении получены уравнения обобщенной модели Томаса — Ферми (5.17) и Томаса — Ферми — Дирака (5.20) с релятивистскими и квантовыми добавками.

В § 6 рассмотрена система частиц с короткодействующим потенциалом. Получено операторное решение для интеграла состояния (6.2) и система зацепляющихся уравнений для функций Грина (6.4) — (6.6). Подробно анализируется найденная система уравнений для функций Грина в том случае, когда уравнение для «двухчастичной» функции Грина является уравнением типа Бете — Солпитера [см. (6.18) — (6.19)]. Приближенное рассмотрение полученной системы уравнений приводит к результатам «газового» приближения [см. (6.24) — (6.27)].

В § 7 с помощью уравнений для функций Грина в статистической квантовой электродинамике получена общая связь (7.7) «одночастичной» функции Грина фермиона и вершинной части. Из соотношения (7.7) следуют тождества типа Уорда (7.10) для квантовой статистики.

В отличие от обычной теории поля, в среде для векторных (например Γ_μ) и тензорных величин (например $\Pi_{\mu\nu}$) существуют, вообще говоря, разные предельные значения в зависимости от способа стремления внешнего импульса к нулю (т. е. $k_4 < k \to 0$; $k < k_4 \to 0$). В среде имеет место еще одно соотношение (7.11), связывающее производную «одночастичных» функций Грина фермиона по химическому потенциалу с вершинной частью при импульсе фотонов, равном нулю (предел $k_4 \to 0$, $k \to 0$). Кроме того, получено точное выражение (7.17) для дебаевского радиуса.

Система уравнений (8.9) — (8.14) для функций Грина в статистической квантовой электродинамике частиц со спином нуль получена в § 8. Выведены соотношения типа Уорда (8.15) — (8.17) и найдено точное выражение для дебаевского радиуса (8.20), а также вычислен поляризационный оператор в e^2-приближении.

Для нахождения термодинамических функций необходимо вычислить поляризационный оператор, это сделано в § 9, где статистический поляризационный оператор найден в первом приближении по квадрату заряда в квантовой электродинамике [см. (9.4) — (9.9)] и в псевдоскалярной теории [см. (9.29)].

В § 10 рассмотрены некоторые применения операторного решения для статистической суммы. Так, с помощью операторного решения найдена зависимость от продольной части электромагнитного поля для всех функций Грина [см. (10.6)]; рассмотрена задача скалярного взаимодействия с покоящимся нуклоном [см. (10.14)].

Получено квазиклассическое приближение к интегралу состояний в квантовой электродинамике (10.22), (10.24), (10.27), псевдоскалярной теории (10.29) и в скалярной теории (10.31) — (10.34).

Глава III

Третья глава посвящена построению временно́й функции Грина и нахождению энергетического спектра системы частиц.

В § 1, 2 сформулирован способ нахождения временны́х функций Грина по найденным температурным функциям Грина. Здесь же получены уравнения (2.35) — (2.40) для определения «одночастичных» ферми- и бозевозбуждений. Эти уравнения отражают то обстоятельство, что для нахождения спектра возбуждений необходимо найти полюса аналитического продолжения запаздывающей (опережающей) функции Грина в нижнюю (верхнюю) полуплоскость четвертой компоненты импульса.

Рассмотрена спектральная связь между различными временны́ми функциями Грина в квантовой статистике и их связь с температурной функцией Грина.

В качестве иллюстрации метода нахождения спектра системы в § 3 рассмотрен спектр возбуждений в однородной плазме. Показано, что известные результаты в этой области получаются с помощью формулы (2.40), вычисляя поляризационный оператор в простом приближении (главные члены спектра определяются поляризационным оператором в e^2-приближении, обменные же поправки к спектру содержатся в приближении e^4 [см. (3.26), (3.27) — (3.29) и (3.35)].

Глава IV

В четвертой главе рассмотрена система уравнений квантовой статистики в предельном случае, когда температура равна нулю. В этом случае из системы уравнений для функций Грина в квантовой статистике следует система уравнений в эвклидовом четырехмерном импульсном пространстве, эквивалентная обычной теории поля в вакууме ($T = 0$, $\mu = 0$) или в среде ($T = 0$, $\mu \neq 0$).

Рассмотрению этой системы уравнений и установлению связи с обычной теорией, вычислению (для иллюстрации метода) поляризационного и массового операторов в мезодинамике и электродинамике в среде и в вакууме посвящены § 1—4 четвертой главы. Эта формулировка теории в эвклидовых переменных имеет в ряде случаев определенное преимущество в вычислительном отношении, поскольку импульсное пространство здесь эвклидово; обратные операторы к функциям Грина не имеют нулей и потому деление на них однозначно, наконец, мнимые части всех функций Грина в этом случае равны нулю и возникают лишь при переходе к псевдоэвклидовым переменным.

В заключение приношу свою глубокую благодарность И. Е. Тамму, В. Л. Гинзбургу, Е. Л. Фейнбергу, Д. А. Киржницу, Ю. А. Гольфанду, В. Я. Файнбергу за многочисленные и плодотворные дискуссии результатов настоящей работы.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

К ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим взаимодействие нейтральных скалярных мезонов с нуклонами. Этот пример был рассмотрен в работе [39], где была найдена одночастичная функция Грина нуклона. Мы покажем, что в этом случае можно просто получить единым образом все функции Грина, а также приближенно учесть отдачу нуклонов. В самом деле, уравнение для функции Грина во внешнем поле (когда отдачей нуклонов пренебрегаем) имеет вид

$$\left\{- i\frac{\partial}{\partial t} + m - g\varphi(t)\right\} G(t, t' \mid \varphi) = \delta(t - t'). \tag{1}$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$G(t, t' | \varphi) = S(t - t') \exp\left\{ig\int_{t'}^{t} \varphi(s)\, ds \right\}, \tag{2}$$

где

$$S(t - t') = i\theta(t - t') \exp\{- im(t - t')\}. \tag{2a}$$

В этом приближении поляризационный член в операторном решении [(9.21) гл. I] равен нулю.

дставив найденное решение для функции Грина во внешнем поле аторные решения (9.21) гл. I, найдем следующее общее решение для рицы:

$$\frac{\langle S\rangle}{c}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\prod_{n=1}^{k}\int_0^{\infty}dt_n dt_n'\bar{\eta}(t_n)\,S(t_n-t_n')\,\eta(t_n')\exp\frac{i}{2}\int\left\{\left[I(t,x)+g\int_{t_m'}^{t_m}\delta(t-s)\,ds\right]D(x-x')\left[I(t',x')+\sum_{m=1}^{k}g\int_{t_m'}^{t_m}\delta(t'-s)\,ds\right]\right\}d^4x d^4x'. \quad (3)$$

етрудно учесть отдачу нуклонов. В самом деле уравнение для функ- Грина нуклона может быть записано в виде

$$\left\{-i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\nabla^2}{2m}-g\varphi(x)\right\}G(x,x'\,|\,\varphi)=\delta(x-x'). \quad (4)$$

бно перейти к импульсному представлению относительно разности x', т. е.

$$G(x,x')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int G(x,k\,|\,\varphi)\,e^{ik(x-x')}\,d^4k; \quad (5)$$

$$\left\{-i\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\nabla^2}{2m}-i\frac{\mathbf{p}\nabla}{m}-\omega+\frac{p^2}{2m}-g\varphi(x)\right\}G(x,p)=1. \quad (6)$$

(6) следует:

$$G(x,p)=i\int_0^{\infty}\exp-i\nu\left(\frac{p^2}{2m}-\omega-\frac{\nabla^2}{2m}-i\frac{\partial}{\partial t}-i\frac{\mathbf{p}\nabla}{m}-g\varphi-i\delta\right)d\nu=$$

$$=i\int_0^{\infty}\exp-i\nu\left(\frac{p^2}{2m}-\omega-i\delta\right)\Phi(\nu)\,d\nu, \quad (7)$$

Ф удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}=-\left(\frac{\nabla^2}{2m}+g\varphi(x)+i\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\mathbf{p}\nabla}{m}\right)\Phi(\nu). \quad (8)$$

Будем искать решение в виде $\Phi=\exp F$. Из (8) получим следующее внение для F:

$$i\frac{\partial F}{\partial\nu}=-\left(\frac{\nabla^2}{2m}+i\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\mathbf{p}\nabla}{m}\right)F-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\mu}\right)^2-g\varphi(x). \quad (9)$$

ение для F легко находится в виде ряда по g:

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}g^nF_n. \quad (10)$$

и этом из (9) имеем:

$$i\frac{\partial F_n}{\partial\nu}=\left(\frac{\nabla^2}{2m}+i\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\mathbf{p}\nabla}{m}\right)F_n+\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_\mu}\frac{\partial F_{n-s}}{\partial x_\mu}\right)+\varphi(x)\,\delta_{n1}. \quad (11)$$

Из (11) получаем следующее выражение для F_1 и рекуррентную формулу для остальных F_n:

$$F_1 = i\int_0^{\nu} \varphi(k) e^{ikx - i\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{pk}}{m} + k^0\right)\nu'} d\nu' \frac{d^4k}{(2\pi)^2}; \tag{12}$$

$$F_n = \frac{i}{2m}\int_0^{\nu} d\nu' e^{i\left(\frac{\nabla^2}{2m} + i\frac{\mathbf{p}\nabla}{m} + i\frac{\partial}{\partial t}\right)(\nu'-\nu)} \sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F_s(x,\nu)}{\partial x_\mu}\frac{\partial F_{n-s}(x,\nu')}{\partial x_\mu}\right). \tag{13}$$

В частности

$$F_2 = \frac{i}{2m}\int d^4k\, d^4k_1 f(k, k_1, x, \nu)\,\varphi(k)\,\varphi(k_1); \tag{14}$$

$$f(k, k_1, x, \nu) = \frac{\mathbf{kk}_1}{(2\pi)^4 m} e^{i(k+k_1)x}\int_0^{\nu} d\nu' \exp \times$$

$$\times\, i\left(\frac{(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}{m} + k_1^0 + k^0\right)(\nu'-\nu) \times$$

$$\times \int_0^{\nu'} d\nu_1 \int_0^{\nu'} d\nu_2 \exp - i\left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{pk}}{m} + k^0\right)\nu_1 + \left(\frac{\mathbf{k}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{pk}_1}{m} + k_1^0\right)\nu_2\right].$$

С помощью (12) и (14) легко из операторного решения для матрицы получить замкнутое выражение для всех функций Грина в этом приближении (учитываем F_1 и F_2):

$$\frac{\langle S\rangle}{c} = \sum \frac{c^{s+1}}{(2\pi)^3 s\, s!}\left\{\prod_{i=1}^{s}\left[\int d^3p_i\, d^4x_i\, d^4x_i' \bar{\eta}(x_i)\,\theta(t_i - t_i') \times\right.\right.$$

$$\times\, \eta(x_i')\exp\left(i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i')p_i - i(t_i - t_i')\frac{p^2}{2m}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\det D^s}}\exp\frac{i}{2}\left[\int d^4k\, d^4k_1\left\{\left(I(k) + g\sum_{n=1}^{s}\int_0^{t_n - t_n'} d\nu_n e^{ikx_n - i\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_n\mathbf{k}}{m} + k^0\right)\nu_n}\right)\times\right.\right.$$

$$\times\, D^s(k, k_1, x)\left(I(k_1) + g\sum_{n=1}^{s}\int_0^{t_n - t_n'} d\nu_n e^{ik_1x_n - i\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_n\mathbf{k}}{m} + k^0\right)\nu_n}\right)\Bigg]\Bigg], \tag{15}$$

где D^s определяется из уравнения

$$\int d^4k_1\left\{(k^2 + \mu^2)\,\delta(k - k_1) -\right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{s} f(k, k_1, x_n, \nu_n = t_n - t_n')\right\} D^s(k_1, k', x) = \delta(k + k'). \tag{16}$$

В частности, если учесть лишь F_1, то

$$D^s(k, k_1) = \frac{\delta(k + k_1)}{k^2 + \mu^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ИНФРАКРАСНАЯ АСИМПТОТИКА В СКАЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Здесь мы рассмотрим инфракрасную асимптотику в случае взаимодействия скалярной (псевдоскалярной) частицы с электромагнитным полем. Уравнение для функции Грина во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$[-(\partial_\mu - ieA_\mu(x))^2 + m^2]\, G(xx') = \delta(x - x'). \tag{1}$$

Сделаем фурье-преобразование относительно $x - x'$, уравнение (1) принимает при этом вид

$$[-(ip_\mu - ieA_\mu(x) + \partial_\mu)^2 + m^2]\, G(p, x) = 1. \tag{2}$$

Формальное операторное решение для $G(p, x)$ имеет вид

$$G(p, x) = i\int\limits_0^\infty e^{i\nu[(ip_\mu - ieA_\mu(x) + \partial_\mu)^2 - m^2}\, d\nu. \tag{3}$$

Действуя методикой Приложения 1, получим для $G(p, x)$ следующее решение (в лоренцовой калибровке)

$$G(p, x) = i\int\limits_0^\infty e^{-i\nu(p^2+m^2)+F}; \tag{4}$$

$$F = \sum e^n F_n, \text{ где } F_1 = -\frac{2}{(2\pi)^2}\int d^4k e^{ikx} p_\mu A_\mu(k)\, \frac{e^{-i(k^2+2pk)\nu} - 1}{(k^2 + 2pk)}, \tag{5}$$

а F_n определяется из следующего рекуррентного соотношения:

$$F_n = i\int\limits_0^\nu d\nu' e^{i(\partial_\mu^2 + 2ip_\mu\partial_\mu)(\nu-\nu')} \left\{\left(\frac{\partial F_{n-m}}{\partial x_\mu}\frac{\partial F_m}{\partial x_\mu} + 2iA_\mu(x)\frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_\mu}\right) - \delta_{n2}A^2{}_\mu(x)\right\}. \tag{6}$$

Взяв первое приближение по e для F, т. е. eF_1, легко найдем выражение для производящего функционала Z в этом приближении (мы пренебрегаем поляризационным членом в операторном решении);

$$cZ = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}\, !n}\left[\prod_{s=1}^n I(x_s)\, I(p^s)\, e^{ip^s x_s}\, d^4p^s d^4x_s A(I_\mu)\right] \tag{7}$$

$$A(I_\mu) = \exp -\left\{\frac{-i}{2}\int I_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) I_\nu(y)\, d^4x d^4y + \right.$$

$$+\sum_s^n \frac{2}{(2\pi)^2} p_\mu^s \int D_{\mu\nu}(k) I_\mu(k)\, e^{ikx_s}\, \frac{e^{-i(k^2+2p^s k)\nu_s} - 1}{(k^2 + 2p^s k)}\, d^4k +$$

$$+\sum_{s,m}^n \frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-i(k^2-2p^s k)\nu_s} - 1}{k^2 - 2p^s k}\, p_\mu^s D_{\mu\nu}(k)\, p_\nu^m\, \frac{e^{-i(k^2+2p^m k)\nu_m} - 1}{k^2 + 2p^m k}\, e^{ik(x_m - x'_s)}\, d^4k +$$

$$\left. + i\nu_s((p^s)^2 + m^2 - i\delta)\right\}, \tag{7a}$$

где I — источник бозе-поля; I_μ — источник электромагнитного поля.

Не представляет труда найти выражение для Z также в том случае, когда $F = eF_1 + e^2F_2$. Ограничиваясь в экспоненте членами, пропорциональными e и e^2, найдем следующее выражение для Z (в поперечной, лоренцовой, калибровке):

$$cZ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}\, n!} \prod_{s=1}^{n} \int [I(x_s)\, I(p^s)\, e^{ip^s x_s}\, d^4p^s d^4x_s A(I_\mu)]; \tag{8}$$

$$A(I) = \exp - \left\{\frac{-i}{2} \int I_\mu(x)\, D_{\mu\nu}(x-y)\, I_\nu(y)\, d^4x\, d^4y + i\nu_s((p^s)^2 + m^2 - i\delta) + \right.$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{2}{(2\pi)^2} \int p_\mu^s D_{\mu\nu}(k)\, I_\nu(k)\, e^{ikx_s}\, \frac{e^{-i(k^2+2p^s k)\nu_s} - 1}{k^2 + 2p^s k}\, d^4k +$$
$$+ \sum_{s \neq m}^{n} \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int (p_\mu^s D_{\mu\nu}(k)\, p_\nu^m)\, e^{ik(x_m - x_s)} \left[\left(\frac{e^{-i(k^2-2p^s k)\nu_s} - 1}{k^2 - 2p^s k}\, \frac{e^{-i(k^2+2p^m k)\nu_m} - 1}{k^2 + 2p^m k}\right) d^4k + \right.$$
$$\left.\left. + \sum_{s=1}^{n} \int \frac{4ie^2}{(2\pi)^4}\, d^4k\, p_\mu^s D_{\mu\nu}(k)\, p_\nu^s \left(\frac{e^{-i(k^2+2p^s k)\nu_s} - 1}{(k^2 + 2p^s k)^2} + \frac{i\nu_s}{k^2 + 2p^s k}\right)\right]. \tag{8a}$$

Из (8) получим для одночастичной функции Грина выражение

$$G(p) = i \int_0^{\infty} d\nu e^{-i\nu(p^2+m^2-i\delta) + M(\nu)};$$
$$M(\nu) = \frac{-4ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k\, p_\mu D_{\mu\rho}(k)\, p_\rho \left(\frac{e^{-i(k^2-2pk)\nu} - 1}{(k^2 - 2pk)^2} + \frac{i\nu}{k^2 - 2pk}\right). \tag{9}$$

Из (9) легко получить инфракрасную асимптотику, которая имеет вид (в поперечной калибровке):

$$G(p) \approx \frac{1}{p^2 + m^2}\, \frac{1}{\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right)^{e^2/4\pi^2}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right) + \ldots\right]. \tag{10}$$

Для получения замкнутого выражения для производящего функционала весьма полезно выражение для функции Грина $G(p, x)$ в виде континуального интеграла [эквивалентного формулам (3) — (6)], которое легко получить, действуя методом Фейнмана для распутывания упорядоченного произведения [38]:

$$G(p, x) = i \int_0^{\infty} d\nu e^{-i[(p_\mu - eA_\mu(x) - i\partial_\mu)^2 + m^2]\nu} = i \int_0^{\infty} d\nu e^{-im^2\nu - i\int_0^{\nu} (p_\mu - ieA_\mu(x(\nu') - i\partial_\mu(\nu'))^2 d\nu'} =$$
$$= c_1 i \int_0^{\infty} e^{-i(p^2+m^2)\nu}\, d\nu \int \Pi d^4t(\nu') \exp i \int_0^{\nu} d\nu' \left[t_\mu^2(\nu') + \right.$$
$$\left. + 2i(p_\mu - t_\mu(\nu'))\, eA_\mu\left(x - 2p(\nu - \nu') + 2\int_{\nu'}^{\nu} t_\mu(\xi)\, d\xi\right)\right]. \tag{11}$$

Константа c_1 выбирается из условия, чтобы при $e = 0$ интеграл по t равнялся единице. Подставляя (11) в операторное решение, получим вместо (8а) следующее точное выражение для $A(I)$:

$$A(I) = \exp\left\{\frac{i}{2}\int I_\mu(x) D_{\mu\rho}(x-y) I_\rho(y)\, d^4x d^4y - i\nu_s((p^s)^2+m^2-i\varepsilon)\right\}\int \Pi d^4t^s \times$$
$$\times \exp\left\{i\sum_s^n \int_0^{\nu_s} d\nu_s'\left[(t_\mu^s(\nu_s'))^2 + 2ie\,(p_\mu^s - t_\mu^s(\nu_s'))\int d^4y D_{\mu\rho}(x-2p^s(\nu_s-\nu_s') + \right.\right.$$
$$+2\int_{\nu_s'}^{\nu_s} t^s(\xi)\,d\xi - y) I_\rho(y) + 2ie^2\sum_m^n \int_0^{\nu_m} d\nu_m'(p_\mu^s - t_\mu^s(\nu_s'))\, D_{\mu\rho}\Big(x_s - x_m +$$
$$\left.+ 2p^m(\nu_m-\nu_m') - 2p^s(\nu_s - \nu_s') + 2\int_{\nu_s'}^{\nu_s} t^s(\xi)\,d\xi - 2\int_{\nu_m'}^{\nu_m} t^m(\xi)\,d\xi\Big)\Big(p_\rho^m - t_\rho^m(\nu_m')\Big)\right]. \tag{12}$$

С помощью (8) — (12) легко получить выражение для функции Грина в виде ряда по e^2, в exp. В заключение отметим, что в спинарной квантовой электродинамике также легко получить аналогичные выражения, для чего достаточно представить $G_{cn}(p, x)$ в виде $G_{cn}(p, x) = [-\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x) + ip_\mu) + m]\, G_1(p, x)$, где

$$\left[(p_\mu - eA_\mu(x) - i\partial_\mu)^2 + m^2 + ei\gamma_\mu\gamma_\rho\frac{\partial A_\rho(x)}{\partial x_\mu}\right] G_1(p, x) = 1. \tag{13}$$

Решение для G_1 может быть записано в такой же форме, как (11) для $G(p, x)$, с тем лишь отличием, что в квадратной скобке в (11) появляется добавочный член $\sim -ie\gamma_\mu(\nu')\gamma_\rho(\nu')\dfrac{\partial A_\rho\left(x - 2p(\nu-\nu') + 2\int_{\nu'}^{\nu} t(\xi)d\xi\right)}{\partial x_\mu}$, который в инфракрасной области малосуществен.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ [53]

Здесь мы остановимся на способе, с помощью которого вычисляются суммы по p_4 в квантовой статистике.

Идея способа заключается в том, что поскольку p_4 пробегает дискретный ряд значений, равный $\frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ для ферми-полей или $\frac{2n\pi}{\beta}$ для бозе-полей, то, подобрав функцию, имеющую полюса в этих дискретных точках, можно сумму по p_4 свести к вычислению контурного интеграла и, в конечном счете, к одному или нескольким вычетам.

Для определенности рассмотрим $p_4 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$. Найдем

$$\frac{1}{\beta}\sum_{p_4} F(\ldots p_4). \tag{1}$$

При этом возможны два случая:

1) существует единая аналитическая функция, совпадающая с F во всей плоскости комплексного переменного p_4;

2) нет такой функции.

Рассмотрим контурный интеграл $\int F(\ldots z)\, f^{\pm}(z)\, dz$. В первом случае контур интегрирования берется по окружности бесконечного радиуса (см. рис. 1). Подбираем функцию $f^{\pm}$ такой, чтобы она имела полюса в точках $z=\frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ (с вычетом, равным единице). В качестве таких функций можно взять

$$f^{\pm}=\frac{\pm i\beta}{1+e^{\mp i\beta z}}.$$

Выбор f^{+} или f^{-} определяется условием, чтобы контурный интеграл (по z) сходился бы на бесконечной окружности в комплексной плоскости. В этом случае контурный интеграл $\oint Ff dz=0$. С другой стороны, он же равен сумме вычетов функции f, которые и дают искомую сумму в точках $\frac{(2n+1)\pi}{\beta}$, и функции F. Следовательно,

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n}F\left(\ldots\frac{(2n+1)\pi}{\beta}\right)=-\frac{1}{\beta}\sum_{k}f^{\mp}(z_k)\operatorname{Res}F(\ldots z_k). \tag{2}$$

Таким образом, бесконечную сумму по n в этом случае мы свели к ограниченному числу вычетов (как правило, одному), аналитической функции $F(\ldots z)$.

В качестве примера возьмем $F=\frac{e^{ip_4x_4}}{ip_4-\mu+\frac{p^2}{2m}}$. Здесь необходимо различать два случая: $x_4>0$ и $x_4<0$. При $x_4>0$ контурный интеграл исчезает на бесконечной окружности только лишь для $f^{(-)}$; при $x_4<0$ контурный интеграл исчезает на бесконечной окружности в комплексной плоскости z лишь для f^{+}.

Согласно (2), имеем

$$\frac{1}{\beta}\sum_{p_4}\frac{e^{ip_4x_4}}{ip_4-\mu+p^2/2m}=-\frac{1}{\beta}\sum_{k}f^{-}(z_k)\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ix_4z_k}}{+iz_k-\mu+\frac{p^2}{2m}}\right)=$$

$$=\frac{e^{-\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)x_4}}{1+\exp\left(\mu-\frac{p^2}{2m}\right)\beta},\qquad x_4>0; \tag{3}$$

$$\frac{1}{\beta}\sum_{p_4}\frac{e^{ip_4x_4}}{ip_4-\mu+\frac{p^2}{2m}}=-\frac{1}{\beta}\sum_{k}f^{+}(z_k)\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz_kx_4}}{iz_k-\mu+\frac{p^2}{2m}}\right)=$$

$$=-\frac{e^{-\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)x_4}}{1+\exp\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)\beta},\qquad x_4<0. \tag{4}$$

В качестве примера второго случая рассмотрим сумму

$$G(p, x_4) = \frac{1}{\beta} \sum G(p, p_4) e^{ip_4x_4}. \tag{5}$$

При этом, вообще говоря, не существует единая аналитическая функция, совпадающая с $G(p, p_4)$ во всей плоскости комплексного переменного p_4. Однако известно, что $G(p, p_4)$ при $p_4 < 0$ совпадает с аналитической функцией $G^r(p, p_0 = -ip_4)$ (аналитическое продолжение в верхней полуплоскости запаздывающей функции Грина) (см. § 2 гл. III), а при $p_4 > 0$ $G(p, ip_4)$ совпадает с другой аналитической функцией $G^a(p, p_0 = ip_4)$ (аналитическое продолжение в нижней полуплоскости опережающей функции Грина). Аналитическая функция $G^r(p, p_0)$ не имеет полюсов при $\operatorname{Im} p_0 > 0$ (левая полуплоскость, p_4), а $G^a(p, p_4)$ не имеет полюсов при $\operatorname{Im} p_0 < 0$ (правая полуплоскость, p_4). Так что особенности функции $G(p, p_4)$ лежат на мнимой оси [1]. Итак

$$\beta G(p, x_4) = \sum_{p_4<0} G^r(p, -ip_4) e^{ip_4x_4} + \sum_{p_4>0} G^a(p, -ip_4) e^{ip_4x_4}. \tag{6}$$

Каждую из этих сумм прежним методом сводим к интегралу по оси бесконечно близкой к мнимой оси p_4 и расположенной от нее справа (для $p_4 > 0$) и слева (для $p_4 < 0$). Контур выбирается в полуплоскости p_4 вдоль оси, бесконечно близкой к мнимой оси p_4.

Таким образом, мы получаем

$$G(p,x_4) = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \{G^r(p, \omega + i\varepsilon) - G^a(p, \omega - i\varepsilon)\} f^{\pm}(-i\omega) e^{-\omega x_4} d\omega. \tag{7}$$

Поскольку при $\varepsilon \to 0$ $\operatorname{Re} G^r(\omega + i\varepsilon) = \operatorname{Re} G^a(\omega - i\varepsilon)$, то окончательно

$$G(p, x_4) = \frac{i}{\pi\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} G(p, \omega) f^{\pm}(-i\omega) e^{-\omega x_4} d\omega, \tag{8}$$

где

$$\operatorname{Im} G(p, \omega) = \frac{1}{2i} [G^r(p, \omega + i\varepsilon) - G^a(p, \omega - i\varepsilon)] =$$

$$= \frac{1}{2i} [G(p, p_4 = i\omega - \varepsilon) - G(p, p_4 = i\omega + \varepsilon)]. \tag{9}$$

Все результаты могут быть просто перенесены на случай бозе-статистики, когда $k_4 = \frac{2n\pi}{\beta}$, с тем только отличием, что в качестве $f^{\pm}$ надо брать следующие функции: $f^{\pm} = \frac{\pm i\beta}{1 - e^{\mp i\beta z}}$, имеющие полюса в точках $\frac{2\pi n}{\beta}$. При $\beta^{-1} = 0$ суммы по p_4 переходят в интеграл и оказывается более удобным вычислить интеграл по p_4 непосредственно в эвклидовом p-пространстве, не поворачивая ось интегрирования на 90°.

[1] В этом случае, если бы имелись добавочные полюса не на мнимой оси p_4, то необходимо было бы добавить вычеты и в этих полюсах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ $T = 0$

I. Рассмотрим предельный случай $T = 0$, $\mu = 0$. Как уже указывалось, в этом случае все функции Грина выражаются через интегралы в эвклидовом четырехмерном пространстве и при интегрировании удобно перейти к сферическим координатам в этом пространстве. Удобно также при интегрировании по длине вектора в четырехмерном эвклидовом пространстве брать не бесконечный верхний предел, а некоторый большой одинаковый для всех интегралов предельный импульс L. При этом после проведения программы перенормировок все перенормированные величины не зависят от этого предельного импульса. Более того, само введение L является лишь удобной вычислительной процедурой, поскольку можно было бы в самом начале провести перенормировку и уже после этого проводить интегрирование, не вводя предельный импульс.

Для вычисления всех интегралов, встречающихся при расчетах радиационных поправок, достаточно вычислить следующие два интеграла (вернее — практически достаточно знать) $L(k, l)$:

$$L^0(k, l) = \int \frac{d^4p}{p^2 + 2pk + l}; \tag{1}$$

$$L^0_\nu(k, l) = \int \frac{p_\nu d^4p}{p^2 + 2pk + l}. \tag{2}$$

Перейдем к сферическим координатам и введем верхний предельный импульс L. Тогда получим (заметим, что расходящийся интеграл изменяется от смещения начала координат при замене переменной интегрирования $p \to p+k$ и потому такую замену, вообще говоря, нельзя сделать):

$$L^0(k, l) = \int_0^L dpp^3 \int_0^\pi d\chi \int d\Omega \frac{\sin^2\chi}{p^2 + 2pk\cos\chi + l} =$$
$$= \pi^2 \left\{L^2 - \frac{k^2}{2} + (k^2 - l)\ln\frac{L^2}{l - k^2}\right\}_{L\to\infty}. \tag{3}$$

При вычислении интеграла L^0_ν учтем, что из ковариантных соображений

$$L^0_\nu = k_\nu A(k^2, l). \tag{4}$$

Из (2) и (4) получим для A следующее выражение:

$$A = \frac{1}{k}\int_0^L p^4 dp \int_0^\pi d\chi \int d\Omega \frac{\sin^2\chi\cos\chi}{p^2 + 2pk\cos\chi + l} =$$
$$= \pi^2 \left\{(l - k^2)\ln\frac{L^2}{l - k^2} - \frac{1}{2}L^2 + \frac{5}{6}k^2 - \frac{1}{2}l\right\}_{L\to\infty}.$$

Окончательно для L_ν имеем

$$L^0_\nu(k, l) = k_\nu\pi^2 \left\{(l - k^2)\ln\frac{L^2}{l - k^2} - \frac{1}{2}L^2 + \frac{5}{6}k^2 - \frac{1}{2}l\right\}_{L\to\infty}. \tag{5}$$

Последовательным дифференцированием по k и l мы получим следующую сводку для интегралов (см. также [3а]):

$$A_1^0 = \int \frac{d^4p}{(p^2+2pk+l)^2} = -\frac{\partial L^0(k,l)}{\partial l} = \pi^2 \left\{\ln \frac{L^2}{l-k^2} - 1\right\}; \tag{6}$$

$$A_2^0 = \int \frac{d^4p p_\nu}{(p^2+2pk+l)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L^0(k,l)}{\partial k_\nu} = -\pi^2 k_\nu \left(\ln \frac{L^2}{l-k^2} - \frac{3}{2}\right); \tag{7}$$

$$A_3^0 = \int \frac{d^4p}{(p^2+2pk+l)^3} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^0(k,l)}{(\partial l)^2} = \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{l-k^2}; \tag{8}$$

$$A_4^0 = \int \frac{d^4p p_\nu}{(p^2+2pk+l)^3} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 L^0(k,l)}{\partial k_\nu \partial l} = \frac{\pi^2}{2} k_\nu \frac{1}{k^2-l}; \tag{9}$$

$$A_5^0 = \int \frac{d^4p}{(p^2+2pk+l)^4} = -\frac{1}{6}\frac{\partial^3 L^0(k,l)}{(\partial l)^3} = \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(l-k^2)^2}; \tag{10}$$

$$A_6^0 = \int \frac{d^4p p_\nu}{(p^2+2pk+l)^4} = -\frac{1}{12}\frac{\partial^3 L^0(k,l)}{\partial k_\nu (\partial l)^2} = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_\nu}{(l-k^2)^2}; \tag{11}$$

$$A_7^0 = \int \frac{d^4p p_\nu p_\mu}{(p^2+2pk+l)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial L_\nu^0}{\partial k_\mu} = \frac{\pi^2}{2}\delta_{\nu\mu}\left\{\frac{L^2}{2} - \frac{5}{6}k^2 + \frac{1}{2}l + \right.$$
$$\left. + (k^2-l)\ln\frac{L^2}{l-k^2}\right\} + \pi^2 k_\nu k_\mu \left(\ln \frac{L^2}{l-k^2} - \frac{11}{6}\right); \tag{12}$$

$$A_8^0 = \int \frac{d^4p p_\nu p_\mu}{(p^2+2pk+l)^3} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 L_\nu^0}{\partial k_\mu \partial l} = \frac{1}{8}\frac{\partial^2 L^0}{\partial k_\nu \partial k_\mu} =$$
$$= \frac{\pi^2}{4}\delta_{\nu\mu}\left(\ln\frac{L^2}{l-k^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2}k_\nu k_\mu \frac{1}{l-k^2}. \tag{13}$$

Найдем, в частности, следующий интеграл:

$$B_1 = \int \frac{d^4p}{[(p+k)^2+m^2][p^2+m_1^2]}. \tag{14}$$

Известной процедурой $\left(\frac{1}{ab} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{[ax+(1-x)b]^2}\right)$ мы сводим этот интеграл к виду

$$B_1 = \int\limits_0^1 dx \int \frac{d^4p}{[p^2+2(pk)x+k^2x+m_1^2+(m^2-m_1^2)x]^2}.$$

Согласно (6), имеем

$$B_1 = \pi^2 \int\limits_0^1 dx \left\{\ln \frac{L^2}{k^2x(1-x)+m_1^2+(m^2-m_1^2)x} - 1\right\}. \tag{15}$$

Нетрудно найти интеграл (15), однако для аналитического продолжения удобнее записать интеграл в виде

$$B_1 = \pi^2\left(\ln\frac{L^2}{m^2} - 1\right) + \pi^2 k^2 \int\limits_0^1 dx \frac{(1-2x) + \dfrac{m^2-m_1^2}{k^2}}{(1-x)\left(k^2 + \dfrac{m_1^2}{x} + \dfrac{m^2}{1-x}\right)}. \tag{16}$$

II. Рассмотрим случай $T=0$, $\mu \neq 0$. В этом случае у полученных выше интегралов появятся добавки, пропорциональные μ. Можно показать, что при $T=0$ и $\mu \neq 0$ основные интегралы $L^{\mu}(k, l)$ и $L^{\mu}_{\rho}(k, l)$ равны соответственно (здесь мы ограничимся случаем отсутствия бозе-конденсата).

$$L^{\mu}(k, l)=\int \frac{d^4 p}{(p_4-i\mu)^2+2(p_4-i\mu)k_4+p^2+2pk+l}=$$

$$=L^0(k, l)-2\pi^2\theta(\mu-\sqrt{l-k^2})\Big[\mu\sqrt{\mu^2-l+k^2}+$$

$$+(k^2-l)\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-l+k^2}}{\sqrt{l-k^2}}\Big], \tag{17}$$

где

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & \text{когда } x>0,\\ 0, & \text{когда } x<0;\end{cases}$$

L^0 определяется формулой (3) и равно вычисляемому интегралу при $\mu=0$:

$$L^{\mu}_{\rho}(k, l)=\int \frac{d^4 p\tilde{p}_{\rho}}{(\tilde{p}^2+2\tilde{p}k+l)}=L^0_{\rho}(k, l)+$$

$$+2\pi^2\theta(\mu-\sqrt{l-k^2})\Big\{\Big[\mu\sqrt{\mu^2-l+k^2}+(k^2-l)\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-l+k^2}}{\sqrt{l-k^2}}\Big]k_{\rho}+$$

$$+\frac{2}{3}i(\mu^2-l+k^2)^{3/2}\delta_{\rho 4}\Big\}; \tag{18}$$

$$A^{\mu}_1=\int\frac{d^4 p}{(\tilde{p}^2+2\tilde{p}k+l)^2}=A^0_1-2\pi^2\theta(\mu-\sqrt{l-k^2})\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-l+k^2}}{\sqrt{l-k^2}}; \tag{19}$$

$$A^{\mu}_2=\int\frac{d^4 p p_{\rho}}{(\tilde{p}^2+2\tilde{p}k+l)^2}=A^0_2+$$

$$+2\pi^2\theta(\mu-\sqrt{l-k^2})\Big\{k_{\rho}\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-l+k^2}}{\sqrt{l-k^2}}+i\delta_{\rho 4}\sqrt{\mu^2-l+k^2}\Big\}; \tag{20}$$

$$A^{\mu}_7=\int\frac{\tilde{p}_{\rho}\tilde{p}_{\nu}\,d^4 p}{(\tilde{p}^2+2\tilde{p}k+l)^2}=A^0_7-2\pi^2\theta(\mu-\sqrt{l-k^2})\times$$

$$\times\Big\{\frac{\delta_{\rho\nu}}{2}\Big[\mu\sqrt{\mu^2-l+k^2}+(k^2-l)\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-l+k^2}}{\sqrt{l-k^2}}\Big]+$$

$$+k_{\rho}k_{\nu}\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-l+k^2}}{\sqrt{l-k^2}}+i(k_{\nu}\delta_{\rho 4}+k_{\rho}\delta_{\nu 4})\sqrt{\mu^2-l+k^2}-$$

$$-\delta_{\nu 4}\delta_{\rho 4}\mu\sqrt{\mu^2-l+k^2}\Big\}, \tag{21}$$

$$\text{где } \tilde{p}_{\rho}=\begin{cases}p_{\rho}, & \text{когда } \rho=1, 2, 3,\\ p_4-i\mu, & \text{когда } \rho=4.\end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ КАЛИБРОВКАМИ ПОТЕНЦИАЛА A_{μ}

Здесь мы рассмотрим вопрос о связи между D-функциями электромагнитного поля при различных калибровках потенциала.

1. Лоренцовская калибровка

Эта калибровка потенциала определяется условием $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\langle A_{\mu}\rangle=0.$

В этом случае (см. § 7, гл. II) $D_{\mu\nu}$ имеет вид

$$D_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) A_1 + \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \frac{u_\mu k_\nu}{(ku)} - \frac{u_\nu k_\mu}{(ku)} + \frac{u_\mu u_\nu k^2}{(ku)^2}\right) B_1. \tag{1}$$

При этом поляризационный оператор имеет вид

See eq 7.14a

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) A + \left(\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \frac{u_\mu k_\nu}{(ku)} - \frac{u_\nu k_\mu}{(ku)} + \frac{u_\mu u_\nu k^2}{(ku)^2}\right) B. \tag{2}$$

Коэффициенты A_1 и B_1 связаны с A и B следующими соотношениями:

$$A_1 = \frac{1}{k^2 - A}, \qquad B_1 = \frac{B}{(k^2 - A_1)\left(k^2 - A_1 + B\left(1 - \frac{k^2}{(ku)^2}\right)\right)}. \tag{3}$$

Расчеты производятся в системе покоя среды, тогда

$$D_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\right) C_1 + \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2} \frac{k_4^2}{\mathbf{k}^2} D_{44}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3,$$

$$D_{4\mu} = - \frac{k_\mu k_4}{\mathbf{k}^2} D_{44}; \tag{4}$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\right) C + \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2} \frac{k_4^2}{\mathbf{k}^2} \Pi_{44}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3;$$

$$\Pi_{4\mu} = - \frac{k_\mu k_4}{\mathbf{k}^2} \Pi_{44}; \tag{5}$$

$$C_1 = \frac{1}{k^2 - C};$$

$$D_{44} = \frac{\mathbf{k}^4}{k^4} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 - \Pi_{44})}. \tag{6}$$

2. Кулоновская калибровка

Эта калибровка потенциала определяется условием

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}_i} \langle A_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Легко убедиться, что между потенциалами в кулоновской и лоренцовской калибровках существует следующая связь:

$$\langle A_\mu^k \rangle = \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu (ku) u_\nu}{k^2 - (ku)^2}\right) \langle A_\nu^л \rangle = \langle A_\mu^л \rangle + \frac{k_\mu k_4 \langle A_4^л \rangle}{\mathbf{k}^2}. \tag{8}$$

В самом деле, из соотношения (8) следует, что лоренцовское условие для $A^л$ приводит к кулоновскому условию для A^k (т. е. из условия $k_\mu A_\mu^л = 0$ следует $\mathbf{k}\mathbf{A}^k = 0$). При этом $D_{\mu\nu}^k = iT \langle A_\mu^k A_\nu^k \rangle$ следующим образом связаны с

$$D_{\mu\nu}^л = iT \langle A_\mu^л A_\nu^л \rangle:$$

$$D_{\mu\nu}^k = D_{\mu\nu}^л + \frac{k_4 k_\nu}{\mathbf{k}^2} D_{4\mu}^л + \frac{k_4 k_\mu}{\mathbf{k}^2} D_{\nu 4}^л + D_{44}^л \frac{k_4^2 k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^4}. \tag{9}$$

Подставляя выражения (4) для $D_{\mu\nu}^л$ в формулу (9), получим

$$D_{\mu\nu}^k = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\right) C_1, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3; \tag{10}$$

$$D^k_{\mu 4} = D^k_{4\mu} = 0;$$
$$D^k_{44} = \frac{k^4}{\mathbf{k}^4} D^{\text{л}}_{44} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \Pi_{44}}; \tag{11}$$
$$C_1 = \frac{1}{k^2 - C}.$$

При малых импульсах k, C и Π_{44} связаны соотношением $\Pi_{44} = \frac{k^2}{k_4^2} C$.

Введем диэлектрическую постоянную ε следующим соотношением:

$$\varepsilon^t = 1 - \frac{C}{k_4^2}; \quad 1 - \frac{\Pi_{44}}{\mathbf{k}^2} = \varepsilon^l. \tag{12}$$

Тогда соотношения (10) и (11) принимают вид:

$$D^k_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\right) \frac{1}{\varepsilon^t k_4^2 + \mathbf{k}^2}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3;$$
$$D^k_{4\mu} = D^k_{\mu 4} = 0, \ D^k_{44} = \frac{1}{\varepsilon^l \mathbf{k}^2} \tag{13}$$

(при малых k $\varepsilon^l = \varepsilon^t$).

Процедуру перехода от одной калибровки к другой можно сформулировать несколько другим образом.

Необходимо записать уравнение для $D_{\mu\nu}$ с произвольной калибровкой:

$$D_{\mu\nu}(k) = D^0_{\mu\nu}(k) + D^0_{\mu\nu_1}(k)\,\Pi_{\nu_1\nu_2}(k)\,D_{\nu_2\nu}(k). \tag{14}$$

При этом различные калибровки отличаются лишь значением тензора $D^0_{\mu\nu}$, вид которого может быть легко найден, поскольку он соответствует $D_{\mu\nu}$ при отсутствии взаимодействия.

Так, для лоренцовской калибровки $D^0_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2}$ и мы получаем результаты (4)—(6). Для кулоновской калибровки

$$D^0_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\right) \frac{1}{k^2}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3; \tag{15}$$
$$D^0_{\mu 4} = D^0_{4\mu} = 0, \quad D^0_{44} = \frac{1}{\mathbf{k}^2}. \tag{16}$$

Подставив указанные $D^0_{\mu\nu}$ в уравнение (14) и учитывая, что $\Pi_{\mu\nu}$ не зависит от калибровки и имеет вид (2) или (5) (из-за закона сохранения тока $\Pi_{\mu\nu}$ всегда поперечен в четырехмерном смысле), получим в этом случае

$$D_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\mathbf{k}^2}\right)\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\left(\delta_{\mu i} - \frac{k_\mu k_i}{\mathbf{k}^2}\right) C D_{i\nu}, \ \mu, \nu, i = 1, 2, 3;$$
$$D_{4i} = 0, \ i = 1, 2, 3; \ D_{44} = \frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\mathbf{k}^2}\Pi_{44} D_{44}. \tag{17}$$

Таким образом этим способом мы получим предыдущие результаты. В некоторых случаях используется калибровка

$$D^0_{4\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4;$$
$$D^0_{nm} = \frac{1}{k^2}\left(\delta_{nm} + \frac{k_n k_m}{k_4^2}\right), \quad m, n = 1, 2, 3. \tag{18}$$

При этой калибровке мы получаем следующие результаты:

$$D_{4\mu}(k) = 0, \qquad \mu = 1, 2, 3, 4;$$

$$D_{nm} = \frac{1}{k^2 - C}\left[\delta_{nm} + \frac{k_n k_m\left(1 - \frac{C}{\mathbf{k}^2} + \frac{k_4^2 \Pi_{44}}{\mathbf{k}^4}\right)}{k_4^2\left(1 - \frac{\Pi_{44}}{\mathbf{k}^2}\right)}\right] = \tag{19}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^t k_4^2 + \mathbf{k}^2}\left[\delta_{nm} + \frac{k_n k_m\left(1 + (\varepsilon^t - \varepsilon^l)\frac{k_4^2}{\mathbf{k}^2}\right)}{k_4^2 \varepsilon^l}\right],$$

где

$$\varepsilon^t = 1 - \frac{C}{k_4^2}; \qquad \varepsilon^l = 1 - \frac{\Pi_{44}}{\mathbf{k}^2}; \tag{20}$$

ε^t — поперечная диэлектрическая постоянная; ε^l — продольная диэлектрическая постоянная. При малых $\mathbf{k}^2$, $\varepsilon^l = \varepsilon^t = \varepsilon$ мы получаем простое выражение для D_{nm} (см. также [73]):

$$D_{nm} = \frac{1}{\varepsilon k_4^2 + \mathbf{k}^2}\left[\delta_{nm} + \frac{k_n k_m}{k_4^2 \varepsilon}\right]. \tag{21}$$

Нетрудно рассмотреть таким методом и другие калибровки. Для этого достаточно вычислить лишь $D^0_{\mu\nu}$ искомой калибровки и воспользоваться уравнением (14) для $D_{\mu\nu}$.

Следует заметить, что в среде, по-видимому, самая удобная калибровка для потенциала есть кулоновская калибровка. Полученные результаты справедливы как в случае временно́й функции Грина, где $k_4 = i\omega$ и ε — функция ω (и получается из температурной функции аналитическим продолжением по правилам § 1—2 гл. III), так и в случае температурных функций Грина, где $k_4 = \frac{2\pi n}{\beta}$.

Используя результаты § 9 гл. II и § 2 гл. III, легко получить в первом приближении по e^2 следующие выражения для ε^l и ε^t:

$$\operatorname{Re}\varepsilon^l(k,\omega) = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}(k^2 - \omega^2)\,\mathrm{P}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dz^2\left(1 + 2\frac{m^2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{4m^2}{z^2}\right)^{1/2}}{z^2(z^2 + k^2 - \omega^2)} + \frac{e^2}{\pi^2 k^2}\,\mathrm{P}\int_0^{\infty}\frac{p^2 dp}{\varepsilon_p} n_p \times$$

$$\times\left\{1 + \frac{4\varepsilon_p^2 - k^2 + \omega^2}{8pk}\ln\frac{(k^2 - \omega^2 + 2pk)^2 - 4\varepsilon_p^2\omega^2}{(k^2 - \omega^2 - 2pk)^2 - 4\varepsilon_p^2\omega^2} + \frac{\varepsilon_p\omega}{2pk}\ln\frac{(k^2 - \omega^2)^2 - 4(pk - \varepsilon_p\omega)^2}{(k^2 - \omega^2)^2 - 4(pk + \varepsilon_p\omega)^2}\right\}; \tag{22}$$

$$\operatorname{Re}\varepsilon^t(k,\omega) = 1 + \frac{(k^2 - \omega^2)^2}{\omega^2}\frac{e^2}{12\pi^2}\,\mathrm{P}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dz^2\left(1 + 2\frac{m^2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{4m^2}{z^2}\right)^{1/2}}{z^2(z^2 + k^2 - \omega^2)} - \frac{e^2}{2\pi^2\omega^2}\,\mathrm{P}\int_0^{\infty}\frac{p^2 dp}{\varepsilon_p} n_p \times$$

$$\times\left\{1 + \frac{\omega^2}{k^2} - \frac{k^4 - \omega^4 - 4\varepsilon_p^2\omega^2 + 4p^2k^2}{8pk^3}\ln\frac{(k^2 - \omega^2 + 2pk)^2 - 4\varepsilon_p^2\omega^2}{(k^2 - \omega^2 - 2pk)^2 - 4\varepsilon_p^2\omega^2} - \frac{\omega\varepsilon_p}{2pk^3}(k^2 - \omega^2) \times\right.$$

$$\left.\times\ln\frac{(k^2 - \omega^2)^2 - 4(pk - \varepsilon_p\omega)^2}{(k^2 - \omega^2)^2 - 4(pk + \varepsilon_p\omega)^2}\right\}; \tag{23}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon^{t,l}(k,\omega) = -\operatorname{Im}\varepsilon^{t,l}(k,-\omega); \tag{24}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon_r^{t,l}(k,\omega) = -\operatorname{Im}\varepsilon_a^{t,l}(k,\omega), \tag{25}$$

где ε_r — диэлектрическая постоянная для запаздывающей функции Грина, а ε_a — диэлектрическая постоянная для опережающей функции Грина. Для $\omega > 0$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\varepsilon_r^t = \frac{e^2}{16\pi\omega^2 k}\int\limits_{\varepsilon'}^{\infty} d\varepsilon n(\varepsilon)\left[\frac{k^2-\omega^2}{k^2}(\omega^2-k^2+4\varepsilon^2+4\varepsilon\omega)+\right.\\
&+2(k^2-\omega^2-2m^2)]+\int\limits_{\varepsilon''}^{\infty} n(\varepsilon)\,d\varepsilon\left[\frac{k^2-\omega^2}{k^2}(k^2-\omega^2-4\varepsilon^2+4\varepsilon\omega)-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-2(k^2-\omega^2-2m^2)\right] \text{ для } \omega<k;\\
&\operatorname{Im}\varepsilon_r^t = 0 \quad \text{для } k^2<\omega^2<k^2+4m^2;\\
&\operatorname{Im}\varepsilon_r^t = \frac{e^2}{16\pi\omega^2 k}\int\limits_{\varepsilon'}^{\varepsilon} d\varepsilon n(\varepsilon)\left\{\frac{k^2-\omega^2}{k^2}(\omega^2-k^2+4\varepsilon^2-4\varepsilon\omega)+\right.\\
&\left.+2(k^2-\omega^2-2m^2)\right\}+\frac{e^2\varkappa_0(\omega^2-k^2)}{12\pi k\omega^2}\left(1+\frac{2m^2}{\omega^2-k^2}\right) \text{ для } \omega^2>k^2+4m^2;
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\varepsilon_r^l(k,\omega) = \frac{e^2}{8\pi k^3}\int\limits_{-\varepsilon'}^{\infty} d\varepsilon_p n(\varepsilon_p)(\omega^2-k^2+4\varepsilon_p^2+4\varepsilon_p\omega)+\\
&\qquad+\int\limits_{\varepsilon''}^{\infty} n(\varepsilon)\,d\varepsilon_p(k^2-\omega^2-4\varepsilon_p^2+4\varepsilon_p\omega) \text{ для } \omega<k;\\
&\operatorname{Im}\varepsilon_r^l(k,\omega) = 0 \text{ для } k^2<\omega^2<k^2+4m^2;\\
&\operatorname{Im}\varepsilon_r^l(k,\omega) = \frac{e^2}{8\pi k^3}\int\limits_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} n(\varepsilon_p)\,d\varepsilon_p(\omega^2-k^2+4\varepsilon_p^2-4\varepsilon_p\omega)+\\
&\qquad+\frac{e^2\varkappa_0}{12\pi k}\left(1+\frac{2m^2}{\omega^2-k^2}\right) \text{ для } \omega^2>k^2+4m^2,
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
&n_p = \frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p-\mu)\beta}+\frac{1}{1+\exp(\varepsilon_p+\mu)\beta};\\
&\varepsilon' = \left|-\frac{\omega}{2}+\varkappa_0\right|;\quad \varepsilon'' = \left|\frac{\omega}{2}+\varkappa_0\right|;\\
&\varkappa_0 = \frac{k}{2}\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2-\omega^2}};\qquad k=\sqrt{\mathbf{k}^2};\qquad p=\sqrt{\mathbf{p}^2}.
\end{aligned} \tag{27'}$$

Из (23), (24) получим, в частности, следующие асимптотические формулы:

1) при $\omega^2 \gg k^2$

$$\operatorname{Re}\varepsilon^t = \operatorname{Re}\varepsilon^l = 1-\frac{4e^2}{\omega^2\pi^2}\int\frac{p^2\,dp\,n_p}{\varepsilon_p(4\varepsilon_p^2-\omega^2)}\left(\varepsilon_p^2-\frac{p^2}{3}\right)+$$
$$+\frac{e^2\omega^2}{12\pi^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\left(1+2\frac{m^2}{z^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{z^2}\right)^{1/2}}{z^2(z^2-\omega^2)}\,dz^2; \tag{28}$$

2) при $\omega = k$

$$\operatorname{Re}\varepsilon^l = 1-\frac{\omega_l^2}{\omega^2},\quad \omega_l^2 = \frac{e^2}{\pi^2}\int n_p\left[\frac{2}{p}\ln\frac{\varepsilon_p+p}{m}-\frac{1}{\varepsilon_p}\right]p^2\,dp; \tag{29}$$

$$\operatorname{Re}\varepsilon^t = 1 - \frac{\omega_t^2}{\omega^2}, \quad \omega_t^2 = \frac{e^2}{\pi^2}\int \frac{n_p p^2\,dp}{\varepsilon_p}. \tag{30}$$

В частности, при нулевой температуре ($\beta^{-1} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \omega_l^2 &= \frac{e^2}{\pi^2}\mu m\left(\frac{\mu}{m}\operatorname{Arch}\frac{\mu}{m} - \sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - 1}\right),\\ \omega_t^2 &= \frac{e^2}{2\pi^2}\left[\mu\sqrt{\mu^2 - m^2} - m^2\operatorname{Arch}\frac{\mu}{m}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Что касается выражений (26)—(27) для мнимых частей ε^l и ε^t, то интегрирование можно легко провести в случае больцмановского распределения $(n(\varepsilon) = e^{-(\varepsilon_p - \mu)\beta})$ и в вырожденной среде $(n(\varepsilon) = \theta(\mu - \varepsilon_p))$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

РАДИАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВЯЗЬ С ФУНКЦИЯМИ ГРИНА

Следуя обычной теории поля [3], введем понятие радиационного оператора первого порядка для бозе-полей (j_μ) и ферми-полей (η):

$$j(x) = ig\operatorname{Sp}\gamma\,[\bar\psi(x)\psi(x) - \psi(x)\bar\psi(x)]; \tag{1}$$

$$\eta(x) = ig\gamma\varphi(x)\psi(x); \tag{2}$$

$$\bar\eta(x) = ig\bar\psi\gamma\varphi(x). \tag{3}$$

Введем T-произведение от этих операторов:

$$T(j(x), j(x')),\quad T(\eta(x), \bar\eta(x')).$$

Нетрудно убедиться, что введенные T-произведения простым образом связаны с T-произведением операторов φ и ψ. Переходя к импульсному представлению (по p_4, k_4 разлагаем в ряд Фурье), получим

$$D(k) = D^0(k) + D^0(k)P(k)D^0(k); \tag{4}$$

$$G(p) = G^0(p) - G^0(p)M(p)G^0(p); \tag{5}$$

где

$$G^0(p) = \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4\mu + m}; \tag{6}$$

$$D_0(k) = \frac{1}{k^2 + \varkappa^2}; \tag{7}$$

$$T(j(x)j(x')) = \frac{1}{(2\pi^3)\beta}\sum_{k_4}\int P(k)e^{ik(x-x')}\,d^3k; \tag{8}$$

$$T(\eta(x)\bar\eta(x')) = \frac{1}{(2\pi)^3\beta}\sum_{p_4}\int M(p)e^{ip(x-x')}\,d^3p. \tag{9}$$

Сравнивая формулы (4) и (5) с выражениями для G и D через массовый и поляризационный операторы, получим

$$P(k) = \Pi D(D^0)^{-1} = ((D^0)^{-1}D(k) - 1)(D^0)^{-1} = \Pi(k)\frac{1}{1 - \Pi(k)D^0(k)}; \tag{10}$$

$$M(p) = \Sigma^*(p)G(p)(G^0)^{-1} = ((G^0)^{-1}G - 1)(G^0)^{-1} = \Sigma^*(p)\frac{1}{1 + \Sigma^*(p)G^0(p)}. \tag{11}$$

Таким образом, в отличие от массового и поляризационного операторов, содержащих лишь «неприводимые» диаграммы, операторы $M(p)$ и $P(k)$ содержат как приводимые, так и неприводимые диаграммы.

Нетрудно убедиться, что для $P(k)$ и $M(p)$ имеют место следующие спектральные представления:

$$P(k_4, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(s, \mathbf{k})}{s + ik_4} ds; \qquad M(p_4, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(s, \mathbf{p})}{s - \mu + ip_4} ds,$$

где

$$f_1(s, \mathbf{k}) = (2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{(\Omega + \mu N_n - E_n)\beta} j_{nm}(0) j_{mn}(0)(1 - e^{-s\beta}) \delta(s - \omega_{mn}) \times \\ \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}_{mn});$$

$$f_2(s, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{(\Omega + \mu N_n - E_n)\beta} \eta_{nm}(0) \bar{\eta}_{mn}(0)(1 + e^{-(s-\mu)\beta}) \times \\ \times \delta(s - \omega_{nm}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{mn}),$$

$$\omega_{mn} = E_m - E_n, \qquad \mathbf{p}_{mn} = \mathbf{p}_m - \mathbf{p}_n;$$

E_n, $\mathbf{p}_n$ — энергия и импульс в n-м состоянии системы.

Исходя из формул (10) и (11), легко установить связь между спектральными функциями для P и M и соответствующими спектральными функциями для D и G. Остановимся более подробно на случае электромагнитного взаимодействия.

T-произведение радиационных операторов электромагнитного поля есть корреляционная функция токов; поскольку она пропорциональна D-функции электромагнитного поля, все результаты § 2 гл. III применимы и к корреляционным функциям токов.

Итак, рассмотрим корреляционную функцию токов

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = iT\langle j_\alpha(\mathbf{r}, t) j_\beta(\mathbf{r}', t')\rangle.$$

Представляют интерес следующие разновидности корреляционных функций токов (обозначения как в § 2 гл. III).

$$F^n_{\alpha\beta}(x, x') = i\langle[j_\alpha(x), j_\beta(x')]\rangle;$$

$$F^+_{\alpha\beta}(x, x') = i\langle j_\alpha(x) j_\beta(x')\rangle;$$

$$F^-_{\alpha\beta}(x, x') = -i\langle j_\beta(x') j_\alpha(x)\rangle;$$

$$F^R_{\alpha\beta}(x, x') = \theta(x_0 - x_0') F^n_{\alpha\beta}(x, x');$$

$$F^a_{\alpha\beta}(x, x') = -\theta(x_0' - x_0) F^n_{\alpha\beta}(x, x');$$

$$F_{\alpha\beta}(x, x') = \theta(x_0 - x_0') F^+_{\alpha\beta}(x, x') - \theta(x_0' - x_0) F^-_{\alpha\beta}(x, x');$$

$$F^n_{\alpha\beta}(x, x') = F^-_{\alpha\beta}(x, x') + F^+_{\alpha\beta}(x, x'),$$

$$F^{an}_{\alpha\beta}(x, x') = i\langle\{j_\alpha(x), j_\beta(x')\}_+\rangle = F^+_{\alpha\beta}(x, x') - F^-_{\alpha\beta}(x, x').$$

Из эрмитовости тока следует $F^{\pm}_{\alpha\beta}(x, x') = (F^{\mp}_{\beta\alpha}(x', x))^*$.

Сделаем фурье-преобразование относительно времени:

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{2\pi} f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', w)\, e^{-i\omega(t-t')}.$$

Легко установить следующие соотношения:

$$f^{n}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\,\omega) = f^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + f^{-}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega);$$

$$f^{-}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -e^{-\omega\beta} f^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega);$$

$$f^{an}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = f^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)(1 + e^{-\omega\beta});$$

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi i}\left\{P\frac{1}{\omega'-\omega} + \pi i \operatorname{cth}\frac{\beta\omega}{2}\,\delta(\omega-\omega')\right\} f^{n}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega');$$

$$f^{R}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi i}\,\frac{f^{n}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega')}{\omega'-\omega-i\varepsilon}; \qquad f^{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi i}\,\frac{f^{n}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega')}{\omega'-\omega+i\varepsilon}.$$

В этих обозначениях температурная корреляционная функция токов $f^{T}_{\alpha\beta}$ имеет вид: $f^{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) = \int \frac{d\omega'}{2\pi i}\,\frac{f^{n}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\,\omega')}{\omega'+i\omega_n}$, где $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$.

Используя связь $f^{T}_{\alpha\beta}$ с поляризационным оператором электромагнитного поля, нетрудно найти $f^{n}_{\alpha\beta}$ и, стало быть, все корреляционные функции токов:

$$f^{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = P_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega); \quad f^{n}_{\alpha\beta} = 2i \operatorname{Im} P^{R}_{\alpha\beta} = (P^{R}_{\alpha\beta} - P^{a}_{\alpha\beta}),$$

где $P_{\alpha\beta}$ определяется формулой (10) и в первом приближении по e^2 совпадает с поляризационным оператором $\Pi_{\alpha\beta}$.

Нетрудно установить связь корреляционных функций токов с проводимостью и магнитной восприимчивостью. Для этого учтем, что индуцированный ток, обусловленный внешним полем A_μ, в первом приближении по внешнему полю выражается следующим соотношением:

$$\langle j_\alpha(\mathbf{r}, t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'd^3r' f^{R}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')\, A_\beta(\mathbf{r}', t').$$

С другой стороны, из макроскопической электродинамики известно, что этот же индуцированный ток выражается через проводимость и магнитную восприимчивость. Тем самым легко установить связь $f^{R}_{\alpha\beta}$ с этими величинами.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

АСИМПТОТИКА УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Можно сделать некоторые общие утверждения относительно уравнения состояния при высоких температурах, не прибегая к конкретным расчетам. Это обстоятельство неоднократно отмечалось различными авторами [74, 75] и связано с тем, что из гейзенберговских уравнений для операторов поля и общего выражения для тензора энергии-импульса следует следующая связь между давлением (p) и энергией (E) (здесь мы ограничимся взаимодействием без производных):

$$3p = E - M\,\mathrm{Sp}\,(\bar{\psi}\psi) - \varkappa^2\varphi^2. \tag{1}$$

После проведения статистического усреднения и перенормировки (вычитание вакуумных значений), мы получим следующее выражение:

$$3\langle p\rangle^T = \langle E\rangle^T - M_e\,\mathrm{Sp}\,\langle\bar{\psi}\psi\rangle^T - \varkappa_e^2\langle\varphi^2\rangle^T; \qquad \langle F\rangle^T = \langle F\rangle - \langle F\rangle_0, \tag{2}$$

где $\langle F\rangle_0$ означает, что данная величина берется при $T = \mu = 0$.

Релятивистское приближение. Нетрудно убедиться, что в релятивистском случае при $T \to \infty$ члены с массой в формуле (2) меньшего порядка по сравнению с E и потому из (2) следует: $\langle p\rangle^T = \frac{1}{3}\langle E\rangle^T$, откуда $\langle E\rangle^T = \alpha T^4$.

Обычно для коэффициента α берут значения для свободного газа; между тем даже в случае взаимодействия без производных потенциальная энергия в случае сильной связи может стать еще более существенной, чем кинетическая энергия (это объясняется тем, что при $T \to \infty$ растет число пар частиц-античастиц, а потому эффективно растет плотность взаимодействующих частиц и с ней потенциальная энергия). Согласно (2.17) гл. II, для свободной энергии имеет место следующее соотношение:

$$F = \Omega_{\mu=0} = F_{g=0} - \frac{v}{(2\pi)^3\beta}\int\limits_0^g \frac{dg'}{g'}\Big\{\sum_{k_4=\frac{2\pi n}{\beta}}\int d^3k\,\Pi(k)\,D(k)\Big\}. \tag{3}$$

После проведения перенормировки можно сделать в интеграле (3) замену переменных, и мы получим асимптотическую зависимость от температуры $(T = \beta^{-1})$:

$$F^R = F^R_{g=0} - \frac{v}{\beta^4}\Big[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_0^g \frac{dg'}{g'}\sum_{k_4'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d^3k'\,(\Pi(k')\,D(k'))^R\Big], \tag{4}$$

где $k' = k\beta$; $k_4' = 2n\pi$; знак R означает, что данная величина берется после перенормировки (заметим, что $F^R_{g=0}$ соответствует значению свободной энергии для невзаимодействующих частиц, но с экспериментальными массами).

Из (4) мы получаем, что при $\beta \to 0$ $(T \to \infty)$ свободная энергия, обусловленная взаимодействием, растет как четвертая степень температуры с коэффициентом пропорциональности, равным выражению в квадратной скобке в формуле (4).

Используя выражения для поляризационного оператора, вычисленные в § 9 гл. II, нетрудно найти в этом приближении этот коэффициент.

В квантовой электродинамике добавок к F, обусловленный взаимодействием, также пропорционален T^4, но входит с малым коэффициентом e^2. Этот добавок может быть вычислен в хорошем приближении с помощью поляризационного оператора (§ 9 гл. II) в e^2-приближении. В мезодинамике такая оценка показывает, что изменение F, обусловленное взаимодействием из-за большой константы g^2, весьма существенно и может стать гораздо больше, чем $F_{g=0}$.

Однако в мезодинамике теория возмущений для поляризационного оператора неприменима и только привлечение дисперсионных уравнений может дать количественную оценку для коэффициента α, входящего в формулу (4); при этом сам качественный факт, что коэффициент α сильно зависит от взаимодействий, вероятнее всего, останется в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Schwinger. Proc. Nat. Acad. Sci., 37, 452, 455 (1951).
2. Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, 98, 47 (1954).
3. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.

3а. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959.

4. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 29, 121 (1955).
5. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос. ДАН СССР, 97, 209 (1954).
6. K. Symanzik. Zs. f. Naturforsch., 9a, 809 (1954); I. L. Anderson. Phys. Rev., 94, 703 (1954).
7. [illegible] Клепиков. ДАН СССР, 98, 937 (1954); Ю. Н. Новожилов. ЖЭТФ, 31, 493 (1956).
8. Б. Л. Иоффе. ДАН СССР, 95, 761 (1954).
9. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 26, 751 (1954).
10. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 29, 258 (1955).
11. H. S. Green. Phys. Rev., 95, 548 (1954).
12. Л. Д. Ландау, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 29, 89 (1955).
13. F. Dyson. Phys. Rev., 75, 1736 (1949); I. C. Ward. Proc. Phys. Soc., A64, 54 (1951).
14. А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 98, 361 (1954).
15. A. Salam. Phys. Rev., 82, 217 (1951).
16. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 497, 773, 1177 (1954); 96, 261 (1954).
17. А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. ДАН СССР, 97, 793 (1954).
18. M. Gell-Mann, F. E. Low. Phys. Rev., 95, 1300 (1954).
19. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 28, 750 (1955).
20. Д. А. Киржниц. ЖЭТФ, 32, 534 (1957).
21. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 102, 489 (1955).
22. И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 103, 1005 (1955); 105, 461 (1955); 104, 51 (1955).
23. А. Д. Галанин. ЖЭТФ, 32, 662 (1957).
24. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. УФН, 55, 149, 57, 3 (1955).
25. P. Redmond. Phys. Rev., 112, 1404 (1958); Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Д. В. Ширков. ЖЭТФ, 37, 805 (1959).
26. H. Lehman, K. Symanzik, W. Zimmerman. Nuovo Cim., 2, 425(1955).
27. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. ДАН СССР, 103, 203, 391 (1955).
28. В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 37, 1361 (1959).
29. Л. В. Овсянников. ДАН СССР, 109, 1112 (1956).
30. Д. А. Киржниц, В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 239 (1960).
31. В. Я. Файнберг, Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, 109, 507 (1956).
32. M. L. Goldberger. Phys. Rev., 99, 979 (1955).
33. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов. [illegible] теории дисперсионных соотношений. Гостехиздат, 1957.
34. Б. Л. Иоффе. ЖЭТФ, 31, 583 (1956).

35. M. Goldberger. Phys. Rev., 31, 583 (1956).
36. A. Salam. Nuovo Cim., 3, 424 (1956).
37. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 36, 515 (1956).
38. R. P. Feynman. Rev. Mod. Phys., 20, 376 (1947); Phys. Rev., 84, 108 (1951
39. S. F. Edwards, R. E. Peierls. Proc. Roy. Soc., 224, 24 (1954); S. F. Edwards. Proc. Roy. Soc., 232, 370 (1955).
40. Н. Н. Боголюбов. ДАН СССР, 99, 225 (1954).
41. Ю. А. Гольфанд. ЖЭТФ, 8, 140 (1955).
42. P.T. Matthews, A. Salam. Nuovo Cim., 12, 563 (1954).
43. И. М. Халатников. ЖЭТФ, 28, 633 (1955).
44. Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, 100, 897 (1955).
45. Н. П. Клепиков. ДАН СССР, 100, 1057 (1955).
46. I. G. Valatin. Proc. Roy. Soc., 229 (1955); А. А. Абрикосов. ЖЭТ 30, 96 (1956).
47. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. 3, 845 (1956); А. В. Свидзинский. ЖЭТФ, 31, 324 (1956); А. А. Логунов. ЖЭТФ, 29, 871 (1955); В. Бланк. ДАН СССР, 104, 706 (1955); Л. П. Горьков. ЖЭТФ 30, 790 (195
48. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 34, 139 (1958); В. Л. Бонч-Бруевич. ЖЭТФ, 30, 342, 523 (1956); С. Т. Беляев. ЖЭТФ, 34, 1 (1958); A. Klein, R. Prange. Phys. Rev., 112, 994 (1958).
49. T. Matzubara. Prog. Theor. Phys., 14, 351 (1955).
50. Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, 125, 66 (1959).
51. Е. С. Фрадкин. ДАН СССР, 125, 311 (1959).
52. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 36, 1286 (1959).
53. Е. С. Фрадкин. Nucl. Phys., 12, 455 (1959).
54. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 38, 157 (1960).
55. J. Schwinger, P. C. Martin. Phys. Rev., 115, 1342 (1959)
56. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. ЖЭТФ 36, 900 (1959).
57. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов. ДАН СССР, 126, 5
58. В. Л. Бонч-Бруевич. ДАН СССР, 126, 539 (1959); Ш. М... ДАН СССР, 126, 546 (1959).
59. Е. М. Лифшиц. ЖЭТФ, 29, 97 (1955).
60. Д. А. Киржниц. ЖЭТФ, 32, 115 (1957).
61. А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 32, 399 (1957).
62. Д. А. Киржниц. ЖЭТФ, 35, 1198 (1958); I. Hubbard. Proc. Roy. Soc. 243, 336 (1958).
63. Н. Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, 1946.
64. В. М. Галицкий. ЖЭТФ, 34, 152 (1958).
65. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 34, 262 (1958).
66. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
67. Н. Н. Боголюбов. Изв. АН СССР, серия физ., 11, 77 (1947); ЖЭТФ, 18 622 (1948); И. И. Гольдман. ЖЭТФ, 17, 681 (1947).
68. А. В. Власов. Теория многих частиц. Гостехиздат, 1951.
69. В. П. Силин. ФММ, 2, 193 (1956); Ю. Л. Климонтович и В. П. Силин. ДАН СССР, 82, 361 (1952); В. П. Силин. Диссертация. ФИАН (1953).
70. Е. С. Фрадкин. Материалы секции новых идей конференции по высоким энергиям. Киев, 1959.
71. А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 29, 51 (1955).
72. Е. С. Фрадкин. ЖЭТФ, 36, 951 (1959).
И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский. ЖЭТФ, 36, 1768 (1959).
M. Namiki, C. Iso. Prog. Theor. Phys., 18, 591 (1946).
Эт E zawa, I. Tomozawa, H. Umezawa. Nuovo Cim., 5, 811 (1957).
поля Фейнберг. Труды Конференции по физике высоких энергий. Киев, 1959.
мике Schwinger. Phys. Rev., 115, 728 (1959).